Sur les transformations de classe $\mathscr{C}_\varrho$ dans l'espace de Hilbert

Par A. RÁCZ à Timişoara (R. S. Roumanie)

1. Le but de la présente Note est d'étendre certains faits connus pour les contractions de l'espace de Hilbert au cas des opérateurs de classe $\mathscr{C}_\varrho$ et cela en adaptant les démonstrations correspondantes dans le cas des contractions de [1], [2], [3].

Rappelons (voir [4]) qu'un opérateur linéaire borné T de l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ est de classe $\mathscr{C}_\varrho$ ($\varrho > 0$) s'il existe un espace $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{H}$ et un opérateur unitaire U dans $\mathfrak{K}$ tel qu'on a

$$(1) \qquad T^n = \varrho \cdot \mathrm{pr}\, U^n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

On peut exiger aussi que $\mathfrak{K}$ soit sous-tendu par les éléments de la forme $U^n h$ ($h \in \mathfrak{H}$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); U est alors déterminé à isomorphie près et s'appelle la ϱ-dilatation unitaire minimum de T.

Désignons par C le cercle unité dans le plan des nombres complexes, par D le disque unité ouvert et par $\bar{D}$ le disque unité fermé.

2. Soit A_0 la classe des fonctions analytiques dans D de la forme

$$(2) \qquad u(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda^n \quad \text{avec} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty;$$

A_0 est une algèbre (sans unité) par rapport aux opérations usuelles. Soit $T \in \mathscr{C}_\varrho$ et soit U la ϱ-dilatation unitaire minimum de T. Puisque (1) entraîne $\|T^n\| \leqq \varrho$ ($n \geqq 1$), on peut définir l'opérateur $u(T)$ pour $u \in A_0$ par la série, convergente en norme,

$$(3) \qquad u(T) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T^n.$$

Notons que $u \to u(T)$ est un homomorphisme d'algèbre de A_0 dans l'algèbre opérateurs linéaires bornés dans $\mathfrak{H}$. De plus, (1) entraîne

$$(4) \qquad u(T) = \varrho \cdot \mathrm{pr}\, u(U),$$

où

$$(5) \qquad u(U) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n U^n = \int_0^{2\pi} u(e^{it})\, dE_t,$$

$\{E_t\}$ étant la famille spectrale de l'opérateur unitaire U.

3. Désignons par $H_{0,T}$ la classe des fonctions $u(\lambda)$, analytiques et bornés dans D, s'annulant à l'origine et telles que la limite radiale $u(e^{it}) = \lim_{r\to 1} u(re^{it})$ existe en tout point $e^{it}\in C$ sauf peut-être les points d'un ensemble C_u de mesure O par rapport à la mesure spectrale $E(\cdot)$ engendrée par $\{E_t\}$. Il est manifeste que cette classe est une algèbre et que $u_r(\lambda)=u(r\lambda)\in A_0$ pour tout $u\in H_{0,T}$ et $0\leqq r<1$. Ainsi $u_r(T)$ a un sens pour $T\in\mathscr{C}_\varrho$. Des relations (4) et (5), appliquées à u_r, et de la relation

$$\|[u(U)-u_r(U)]h\|^2 = \int_0^{2\pi} |u(e^{it})-u_r(e^{it})|^2\, d(E_t h, h) \to 0 \qquad (r\to 1),$$

valable pour tout $h\in\mathfrak{K}$, il s'ensuit que la limite

$$u(T) = \lim_{r\to 1} u_r(T) \tag{6}$$

existe au sens fort. Pour $u\in A_0$, la définition (6) de $u(T)$ est évidemment cohérente à celle donnée dans la section 2. De plus, l'application $u\to u(T)$ est un homomorphisme d'algèbre de $H_{0,T}$ dans l'algèbre des opérateurs linéaires bornés de H.

Remarquons aussi que (4) s'étend à $H_{0,T}$, $u(U)$ étant défini par l'intégrale spectrale figurant au dernier membre de (5).

De (4) on déduit que si $u_n\in H_{0,T}$, $|u_n(\lambda)|\leqq M$ $(\lambda\in D;\ n=1,2,\ldots)$ et $u_n(e^{it})\to 0$ $(n\to\infty)$ pp. par rapport à la mesure spectrale $E(\cdot)$ de U, alors $u_n(T)\to 0$ (fortement.)

Proposition 1. *Soit $T\in\mathscr{C}_\varrho$ et soit U la ϱ-dilatation unitaire minimum de T. Si $\varrho\neq 1$, le spectre de U recouvre le cercle unité C. Il en est de même dans le cas $\varrho=1$ si T n'est pas unitaire.*

Démonstration. Supposons que le spectre de U est situé dans un arc fermé α de C, $\alpha\neq C$. Comme α est alors dans l'intérieur d'un domaine simplement connexe du plan complexe, ne contenant pas le point $\lambda=0$, il s'ensuit du théorème de Runge qu'il existe une suite de polynômes $q_n(\lambda)$ tendant vers $1/\lambda^2$ uniformément sur α et par conséquent $p_n(\lambda)=\lambda q_n(\lambda)$ tendant vers $1/\lambda$ uniformément sur α. En vertu du calcul fonctionnel pour U on a

$$U^\nu\cdot p_n(U)\to U^{\nu-1} \qquad (\nu=0,1,\ldots;\ n\to\infty).$$

En prenant les projections sur H et eu égard à ce que $p_n(0)=0$, on obtient (avec $\delta=1/\varrho$):

$$(\nu=0)\qquad \delta p_n(T)\to \mathrm{pr}\, U^* = (\mathrm{pr}\, U)^* = \delta T^*,$$

$$(\nu=1)\qquad \delta T p_n(T) = \delta p_n(T) T\to I,$$

$$(\nu=2)\qquad \delta T^2 p_n(T)\to \delta T.$$

En comparant ces résultats on déduit

$$\delta TT^* = \delta T^* T = I,\quad \delta T = T.$$

Dans le cas $\delta=1/\varrho\neq 1$ la seconde relation donne $T=O$, ce qui est en contradiction avec la première relation. Donc $\varrho=1$ et la première des relations exprime alors que T est unitaire.

4. Nous disons que T est complètement non-unitaire si aucun sous-espace $\neq\{0\}$ ne réduit T à un opérateur unitaire. Il est manifeste que si $T\in\mathscr{C}_\varrho$ $(\varrho<1)$, T est complètement non-unitaire.

Proposition 2. *Soit $T\in\mathscr{C}_\varrho$, complètement non-unitaire, et soit U sa ϱ-dilatation unitaire minimum. La mesure spectrale $E(\cdot)$ de U est alors absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue m).*

Démonstration. Il suffit de démontrer que si un ensemble *fermé* $\sigma(\subset C)$ est de mesure 0 par rapport à la mesure de Lebesgue, on a aussi $E(\sigma)=O$.

A cet effet envisageons une fonction $u(\lambda)$, continue dans $\bar{D}$, holomorphe dans D et telle que

$$u(\lambda)=1 \quad \text{pour} \quad \lambda\in\sigma, \quad |u(\lambda)|<1 \quad \text{pour} \quad \lambda\in\bar{D}\setminus\sigma$$

(cf. [1], p. 253). Soit $z\to l(z)$ l'homographie de $\bar{D}$ sur $\bar{D}$ telle que $u(0)\to 0$ et $1\to 1$. La fonction $v(\lambda)=l(u(\lambda))$ jouit alors des mêmes propriétés que $u(\lambda)$, de plus on a $v(0)=0$. Il est manifeste que les opérateurs $v(T)$ et $v(U)$ existent et qu'on a

$$v(T)=\varrho\cdot\mathrm{pr}\, v(U).$$

On a évidemment

$$[v(U)]^n\to E(\sigma) \qquad (n\to\infty)$$

d'où il dérive

$$[v(T)]^n\to\varrho\cdot\mathrm{pr}\, E(\sigma)=B(\sigma).$$

De cette représentation on déduit que $B(\sigma)$ est une projection orthogonale, permutant à T.

Soit σ_t la partie de σ située dans l'arc fermé $[1, e^{it}]$ de C. Comme σ_t est aussi fermé et de mesure 0, on peut affirmer que

$$B(\sigma_t)=\varrho\cdot\mathrm{pr}\, E(\sigma_t) \qquad (0\leqq t\leqq 2\pi)$$

est une projection orthogonale permutant à T; de plus on a évidemment $B(\sigma_t)\leqq B(\sigma_{t'})$ pour $t\leqq t'$, donc, en posant $\mathfrak{H}(\sigma)=B(\sigma)\mathfrak{H}$, $B(\sigma_t)|\mathfrak{H}(\sigma)$ forme une famille spectrale dans l'espace $\mathfrak{H}(\sigma)$. Comme on a

$$T|\mathfrak{H}(\sigma)=\varrho\cdot\mathrm{pr}\, U|\mathfrak{H}(\sigma)=\int_0^{2\pi} e^{it}\, d[\varrho\cdot\mathrm{pr}\, E_t|\mathfrak{H}(\sigma)]=\int_0^{2\pi} e^{it}\, d[B(\sigma_t)|\mathfrak{H}(\sigma)],$$

$T|\mathfrak{H}(\sigma)$ est unitaire. Vu que T était supposé complètement non-unitaire, cela entraîne $\mathfrak{H}(\sigma)=\{0\}$, donc $B(\sigma)=0$. En répétant le raisonnement de [1] on conclut que $E(\sigma)=O$.

5. Nous terminons cette Note par la

Proposition 3. *Dans les conditions de la proposition 2, soit σ un sous-ensemble borélien de C tel que $m(\sigma)>0$. On a alors $E(\sigma)h\neq 0$ pour $h\in\mathfrak{H}$, $h\neq 0$.*

Démonstration. Le cas $\varrho=1$ étant envisagé dans [1], nous supposons désormais que $\varrho\neq 1$.

Soit σ un ensemble borélien tel que $m(\sigma)>0$ et soit $h\in H$ tel que $E(\sigma)h=0$. Nous allons démontrer que ces hypothèses entraînent $h=0$.

Notons d'abord que, en vertu de la proposition 2, on a

$$p_f(t)=\frac{d}{dt}(E_t h,f)\in L^1(0,2\pi)$$

pour tout f de l'espace de dilatation U. De plus, $p_f(t)$ s'annule pp. dans l'ensemble de mesure positive $(\sigma)=\{t\colon e^{it}\in\sigma\}$ et

$$(E(\omega)h,f)=\int_{(\omega)} p_f(t)\,dt \quad \text{où} \quad (\omega)=\{t\colon\ e^{it}\in\omega\}.$$

Choisissons d'abord $f=(U-T)g$, avec $g\in\mathfrak{H}$, arbitraire. On a alors

$$c_k=\int_0^{2\pi} e^{-ikt}p_f(t)\,dt=\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\,d(E_t h,f)=$$
$$=(h,U^k f)=(h,U^{k+1}g-U^kTg) \qquad (k=0,\pm1,\ldots).$$

Pour $k\geqq1$ cela donne $c_k=0$. Vu que $p_f(t)$ s'annule dans un ensemble de mesure positive, cela entraîne $p_f(t)=0$ pp. Donc on doit avoir $c_k=0$ aussi pour $k<1$. Or, on a

$$c_0=(h,Ug-Tg)=\left(\frac{1}{\varrho}-1\right)(h,Tg)=\left(\frac{1}{\varrho}-1\right)(T^*h,g).$$

On en déduit (vu que $1/\varrho-1\neq0$ et que g est arbitraire)

$$T^*h=0. \tag{7}$$

Choisissons maintenant $f=(U^*-T^*)g$, $g\in\mathfrak{H}$. On a

$$d_k=\int_0^{2\pi} e^{ikt}p_f(t)\,dt=\int_0^{2\pi} e^{ikt}\,d(E_t h,f)=(h,U^{*k}f)=$$
$$=(h,U^{*k+1}g-U^{*k}T^*g) \qquad (k=0,\pm1,\ldots).$$

Pour $k\geqq1$ cela donne $d_k=0$, d'où il s'ensuit $d_k=0$ aussi pour $k<1$, en particulier $d_{-1}=0$. Or,

$$d_{-1}=(h,g-UT^*g)=\left(h,g-\frac{1}{\varrho}TT^*g\right)=\left(\left(I-\frac{1}{\varrho}TT^*\right)h,g\right),$$

d'où $\left(I-\frac{1}{\varrho}TT^*\right)h=0$. Vu (7) cela donne $h=0$, c.q.f.d.

L'auteur tient à remercier M. le professeur B. Sz.-Nagy pour l'aide accordée dans la rédaction définitive de cette Note.*)

*) *Remarque par la rédaction.* La majeure partie des résultats de cette Note dérive aussi des résultats de la Note précédente de E. Durszt, On the spectrum of unitary ϱ-dilations, *Acta Sci. Math.*, **28** (1967), 299—304. Les deux travaux étant indépendants et leurs méthodes différentes, on a jugé justifié d'insérer toutes les deux Notes dans ces *Acta*.

Ouvrages cités

[1] B. SZ.-NAGY—C. FOIAŞ, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IV, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 251—259.

[2] ——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert. V, *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 106—129.

[3] ——— Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VI, *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 130—167.

[4] ——— On certain class of power-bounded operators in Hilbert space, *Acta Sci. Math.*, **27** (1966), 17—26.

[5] F. RIESZ—M. RIESZ, Über die Randwerte einer analytischen Funktion, *Quatrième congrès des math. scandinaves*, 1916, p. 27—44.

[6] K. HOFFMAN, *Banach spaces of analytic functions* (Englewood Cliffs, N. J., 1962).

(Reçu le 30 avril 1967)