Commutants de certains opérateurs

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

1. Introduction et préliminaires

1. Soit T une contraction d'un espace de Hilbert, de classe C_{00}, c'est-à-dire telle que T^n et T^{*n} convergent fortement vers O lorsque $n \to \infty$. Supposons de plus que T a ses indices de défaut égaux à 1, c'est-à-dire que $I - T^*T$ et $I - TT^*$ sont de rang 1.[1])

Dans des conditions équivalentes à celles énumérées, D. SARASON [2] a démontré que *les opérateurs qui permutent à T sont ceux qui peuvent être représentés sous la forme $X = b(T)$ où b est une fonction analytique bornée dans le disque unité ouvert D du plan des nombres complexes* et que de plus *b peut être choisie de façon que le supremum de sa valeur absolue dans D soit égal à la norme de X.* Un résultat analogue porte sur les commutants d'une somme orthogonale de répliques de la même contraction T, mais au lieu de la fonction scalaire b on aura alors une fonction matricielle. SARASON indique des applications intéressantes de ses résultats à certains problèmes d'interpolation.

L'un des buts de la présente Note est de généraliser ces résultats aux contractions de classe C_{00}, d'ailleurs arbitraires, et même à des couples T, T' de telles contractions, en déterminant alors les opérateurs X tels que $TX = XT'$.

Notre résultat principal, dont les autres dérivent, concerne les opérateurs X qui vérifient l'équation

$$TX = XS \tag{1. 1}$$

où T est une contraction de classe C_{00} et S est une translation unilatérale, de multiplicité donnée ω.

Nous abordons ce problème en représentant T et S par leurs modèles fonctionnels et déterminons alors la forme fonctionnelle correspondante des solutions X de (1. 1).

---

[1]) Pour une contraction $T \in C_{00}$ les rangs de ces deux opérateurs sont toujours égaux (finis ou infinis).

Tous les espaces de Hilbert que nous allons considérer seront supposés séparables, mais ils peuvent être aussi de dimension finie.

2. Introduisons quelques notions et notations qui nous seront nécessaires.

C désigne le cercle unité et D le disque unité ouvert dans le plan des nombres complexes; on désigne par z le point variable sur C et par λ le point variable dans D; m est la mesure de Lebesgue normée sur C. Pour un espace de Hilbert $\mathfrak{F}$ quelconque, $L^p(\mathfrak{F})$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ est l'espace des fonctions v sur C, à valeurs $v(z) \in \mathfrak{F}$, mesurables et telles que

$$\|v\|_p = \begin{cases} \left[\int \|v(z)\|_{\mathfrak{F}}^p \, dm(z)\right]^{1/p} < \infty \text{ si } 1 \leqq p < \infty, \\ \sup \|v(z)\|_{\mathfrak{F}} < \infty \quad \text{(supremum essentiel)} \quad \text{si } p = \infty; \end{cases}$$

on ne distingue pas deux fonctions comme éléments de $L^p(\mathfrak{F})$ si elles diffèrent seulement dans un ensemble de mesure 0. Les fonctions $v \in L^p(\mathfrak{F})$ pour lesquelles $\int z^n v(z) \, dm(z) = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$, forment la classe de Hardy $H^p(\mathfrak{F})$; c'est un sous-espace de $L^p(\mathfrak{F})$. Chaque fonction $v \in H^p(\mathfrak{F})$ admet un prolongement naturel analytique $v(\lambda)$ dans D. L'espace $L^2(\mathfrak{F})$ est hilbertien; normes et produits scalaires dans $L^2(\mathfrak{F})$ seront désignés par $\|\cdot\|$ et $(\cdot, \cdot)$ sans ajouter l'indice 2.

$\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ étant deux espaces de Hilbert, on désignera par $L^\infty(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ l'espace des fonctions V sur C, à valeurs $V(z)$ opérateurs de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{G}$, fonctions mesurables (faiblement et alors aussi fortement) et telles que

$$\|V\|_\infty = \sup \|V(z)\| < \infty \quad \text{(supremum essentiel)},$$

$\|V(z)\|$ désignant ici la norme de $V(z)$ comme opérateur de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{G}$. On ne distingue pas deux fonctions comme éléments de $L^\infty(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ si elles coïncident p. p. Les fonctions V pour lesquelles $\|V\|_\infty \leqq 1$, seront appelées contractives. La classe de Hardy correspondante sera désignée par $H^\infty(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$, les fonctions de cette classe admettent des prolongements analytiques $V(\lambda)$ dans D. [2]) Les fonctions $V \in H^\infty(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ telles que $\|V\|_\infty \leqq 1$ s'appellent analytiques contractives; lorsque de plus $\|V(0)f\|_{\mathfrak{G}} < \|f\|_{\mathfrak{F}}$ pour tout $f \in \mathfrak{F}$ $(f \neq 0)$, V s'appelle analytique contractive *pure*. Chaque fonction $V \in L^\infty(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ sera considérée aussi comme un opérateur de l'espace $L^2(\mathfrak{F})$ dans l'espace $L^2(\mathfrak{G})$, notamment celui défini par

$$(Vv)(z) = V(z) \, v(z), \quad v \in L^2(\mathfrak{F}).$$

La norme de V comme élément de $L^\infty(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ est égale alors à sa norme comme opérateur: $\|V\|_\infty = \|V\|$. Lorsque $V \in H^\infty(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$, on a

$$V H^2(\mathfrak{F}) \subset H^2(\mathfrak{G}).$$

---

[2]) D'après la notation de [A], chap. V, il s'agit donc d'une fonction opératorielle analytique bornée $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, V(\lambda)\}$.

La fonction $V \in H^\infty(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ est appelée *extérieure* lorsque

$$\overline{V H^2(\mathfrak{F})} = H^2(\mathfrak{G}) \qquad (\text{adhérence dans } L^2(\mathfrak{G}))$$

et *intérieure* lorsque V comme opérateur de $L^2(\mathfrak{F})$ dans $L^2(\mathfrak{G})$ est isométrique, ou, ce qui revient au même, lorsque $V(z)$ est un opérateur isométrique de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{G}$, presque partout (p. p.). V s'appelle $*$*-extérieure* ou $*$*-intérieure* lorsque la fonction associée $V^\sim \in L^\infty(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$, définie par $V^\sim(z) = V(\bar{z})^*$, est extérieure ou intérieure, selon les cas. Pour que V soit *intérieure des deux côtés* (c'est-à-dire à la fois intérieure et $*$-intérieure) il faut et il suffit que l'opérateur V soit unitaire de $L^2(\mathfrak{F})$ dans $L^2(\mathfrak{G})$, ou, d'une manière équivalente, que les valeurs $V(z)$ soient des opérateurs unitaires de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{G}$, p. p. [3])

Lorsque $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ sont de dimension 1, les espaces $L^p(\mathfrak{F})$, $H^p(\mathfrak{F})$, $L^\infty(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$, $H^\infty(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ se réduisent d'une manière évidente aux espaces scalaires L^p, H^p, L^∞, H^∞, selon les cas.

3. Cela étant, le modèle fonctionnel d'une contraction $T \in C_{00}$ s'obtient de la manière suivante. [4]) On prend une fonction $\Theta \in H^\infty(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})$ contractive pure, intérieure des deux côtés, $\mathfrak{F}$ étant un espace de Hilbert quelconque ($1 \leqq \dim \mathfrak{F} \leqq \aleph_0$). On construit l'espace

(1.2) $$H = H^2(\mathfrak{F}) \ominus \Theta H^2(\mathfrak{F})$$

qui est un sous-espace de $H^2(\mathfrak{F})$ et par conséquent de $L^2(\mathfrak{F})$ (notons que Θ est un opérateur unitaire dans $L^2(\mathfrak{F})$). On définit dans H l'opérateur T par

(1.3) $$Tu = P_H(zu) \qquad (u \in H),$$

où P_H est la projection orthogonale de $L^2(\mathfrak{F})$ sur H. L'opérateur adjoint T^* sera alors donné par

(1.3*) $$T^*u = v \quad \text{où} \quad v(z) = \frac{1}{z}[u(z) - u(0)] \qquad (u \in H).$$

Les opérateurs T ainsi obtenus sont des contractions de classe C_{00}, et toute contraction de classe C_{00} d'un espace de Hilbert ($\neq \{0\}$) s'obtient de cette façon, à équivalence unitaire près (notamment si l'on prend pour Θ la „fonction caractéristique" de la contraction en question).

Pour toute contraction T d'un espace de Hilbert, de classe C_{00} (et plus généralement pour toute contraction complètement non-unitaire) et pour toute fonction $\varphi(\lambda) = \sum_0^\infty c_k \lambda^k \in H^\infty$ on peut définir l'opérateur $\varphi(T)$ par

(1.4) $$\varphi(T) = \lim_{r \to 1-0} \sum_0^\infty c_k r^k T^k$$

[3]) Pour ces notions cf. [A], chap. V.

[4]) Cf. [A], chap. VI.

où la série converge en norme et la limite existe au sens de la convergence forte des opérateurs. [5]) Dans le cas particulier que nous avons en vue, il dérive de (1. 2—3) la représentation

(1. 5) $$\varphi(T)u = P_H(\varphi u) \qquad (u \in H).$$

Remarquons aussi la relation

(1. 6) $$TP_H v = P_H(zv) \quad \text{pour} \quad v \in H^2(\mathfrak{F}).$$

En effet, (1. 3) entraîne

$$TP_H v = P_H(z \cdot P_H v) = P_H(zv) - P_H(z \cdot (I - P_H)v)$$

et il ne reste qu'à montrer que le dernier terme est 0. Or, cela résulte de ce que, en vertu de la définition (1. 2) de H,

$$P_H(z \cdot (I - P_H)v) \in P_H(z \cdot \Theta H^2(\mathfrak{F})) \subset P_H(\Theta H^2(\mathfrak{F})) = \{0\}.$$

D'ailleurs, la multiplication par z dans un espace $L^2(\mathfrak{G})$, ou dans un espace $H^2(\mathfrak{G})$, est le modèle fonctionnel d'une translation bilatérale, ou unilatérale, selon les cas, de multiplicité égale à dim $\mathfrak{G}$. L'opérateur S figurant dans (1. 1) sera donc représenté par son modèle

(1. 7) $$Sw = z \cdot w \quad \text{où} \quad w \in H^2(\mathfrak{G}), \quad \dim \mathfrak{G} = \omega.$$

2. Les théorèmes

Notre résultat principal dans cette Note sera le suivant:

Théorème 1. *Soient la contraction T de classe C_{00} et la translation unilatérale S de multiplicité ω $(1 \leqq \omega \leqq \aleph_0)$ représentées par leurs modèles fonctionnels* (1. 2—3) *et* (1. 7). *Les opérateurs X de $H^2(\mathfrak{G})$ dans H vérifiant l'équation*

(2. 1) $$TX = XS$$

sont alors précisément ceux qui peuvent être représentés sous la forme

(2. 2) $$Xw = P_H Bw, \quad w \in H^2(\mathfrak{G}),$$

moyennant une fonction $B \in H^\infty(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$, de plus cette fonction peut être choisie telle que

(2. 3) $$\|B\|_\infty = \|X\|.$$

La démonstration de ce théorème fera l'objet des n[os] 4—6. Ici nous voulons en déduire le suivant

[5]) Cf. [A], chap. III.

Théorème 2. *Soient T et T' deux contractions de classe C_{00}, représentées par leurs modèles fonctionnels de type* (1. 2—3), *avec des fonctions $\Theta \in H^\infty(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})$ et $\Theta' \in H^\infty(\mathfrak{F}', \mathfrak{F}')$ (contractives pures, intérieures des deux côtés), selon les cas. Les opérateurs Y de H' dans H vérifiant la condition*

$$TY = YT' \tag{2. 4}$$

sont précisément ceux qui peuvent être représentés sous la forme

$$Yu = P_H Bu \qquad (u \in H'), \tag{2. 5}$$

moyennant une fonction $B \in H^\infty(\mathfrak{F}', \mathfrak{F})$ telle que

$$B\Theta' H^2(\mathfrak{F}') \subset \Theta H^2(\mathfrak{F}), \tag{2. 6}$$

de plus cette fonction peut toujours être choisie telle que

$$\|B\|_\infty = \|Y\|. \tag{2. 7}$$

Démonstration. On déduit de (2. 4) et de la relation (1. 6), appliquée à T' au lieu de T, que

$$TYP_{H'}u = YT'P_{H'}u = YP_{H'}(zu) \quad \text{pour} \quad u \in H^2(\mathfrak{F}').$$

Ainsi, en définissant l'opérateur S dans $H^2(\mathfrak{F}')$ et l'opérateur X de $H^2(\mathfrak{F}')$ dans H par

$$Su = zu \quad \text{et} \quad Xu = YP_{H'}u \qquad (u \in H^2(\mathfrak{F}')), \tag{2. 8}$$

on aboutit à l'équation $TX = XS$. En vertu du théorème 1 il existe alors une fonction $B \in H^\infty(\mathfrak{F}', \mathfrak{F})$ telle que

$$Xu = P_H Bu \quad \text{pour} \quad u \in H^2(\mathfrak{F}'), \quad \text{et} \quad \|B\|_\infty = \|X\|; \tag{2. 9}$$

vu que (2. 8) entraîne les relations $X|H' = Y$ et $\|Y\| = \|X\|$, il résulte de (2. 9) que

$$Y = P_H B|H' \quad \text{et} \quad \|Y\| = \|B\|_\infty.$$

Par conséquent notre fonction B vérifie (2. 5) et (2. 7). Elle vérifie aussi (2. 6) parce que de (2. 8—9) il dérive $P_H B(I - P_{H'})u = X(I - P_{H'})u = YP_{H'}(I - P_{H'})u = 0$ pour $u \in H^2(\mathfrak{F}')$; en vertu de la définition (1. 2) de H et celle analogue pour H' on en déduit que $P_H B\Theta' H^2(\mathfrak{F}') = \{0\}$, $B\Theta' H^2(\mathfrak{F}') \subset \Theta H^2(\mathfrak{F})$.

Inversement, une fonction $B' \in H^\infty(\mathfrak{F}', \mathfrak{F})$ quelconque, vérifiant la relation (2. 6) (avec B' au lieu de B) engendre, moyennant la formule $Y'u = P_H B'u$ $(u \in H')$, analogue à (2. 5), un opérateur Y' de H' dans H tel que $TY' = Y'T'$. En effet, on a alors

$$P_H B'(I - P_{H'}) H^2(\mathfrak{F}') \subset P_H B'\Theta' H^2(\mathfrak{F}') \subset P_H \Theta H^2(\mathfrak{F}) = \{0\},$$

d'où, faisant usage aussi de (1. 6), on obtient pour $u \in H'$:

$$TY'u = TP_H B'u = P_H(z \cdot B'u) = P_H B'(zu) =$$
$$= P_H B' P_{H'}(zu) + P_H B'(I - P_{H'})(zu) = P_H B' T'u = Y'T'u.$$

Cela achève la démonstration du théorème 2, comme une conséquence du théorème 1.

Remarque. Lorsque B vérifie (2. 6), la fonction B^+ définie par

$$B^+(z) = \Theta(z)^* B(z) \Theta'(z) \tag{2. 10}$$

vérifie $B^+ H^2(\mathfrak{F}') \subset H^2(\mathfrak{F})$. On en déduit que B^+ est analytique, donc

$$B^+ \in H^\infty(\mathfrak{F}', \mathfrak{F}). \tag{2. 11}$$

Inversement, (2. 11) entraîne évidemment (2. 6). Ainsi, les deux conditions sont équivalentes.

Un cas particulier où ces conditions sont vérifiées pour toute fonction $B \in H^\infty(\mathfrak{F}', \mathfrak{F})$, est celui où $\Theta'(z) = \varphi(z) I_{\mathfrak{F}'}$, φ étant une fonction intérieure scalaire non constante, et Θ admet φ comme un multiple, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $\Omega \in H^\infty(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})$ telle que $\Theta(z)\Omega(z) = \varphi(z) I_{\mathfrak{F}}$. C'est le cas tout particulièrement, si $\Theta(z) = \varphi(z) I_{\mathfrak{F}}$. Si l'on a de plus $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$, c'est-à-dire que $\Theta = \Theta' = \varphi I_{\mathfrak{F}}$, on aboutit ainsi essentiellement au théorème 3 de SARASON [2], et si $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}' = E^1$, à son théorème 1. Dans ce dernier cas la fonction B se réduit à une fonction scalaire $b \in H^\infty$ et l'équation (2. 5) prend la forme

$$Yu = P_H(bu) = b(T)u \qquad (u \in H)$$

où l'on a fait usage aussi de (1. 5). Ainsi, $Y = b(T)$, $\|b\|_\infty = \|Y\|$: le théorème de SARASON en sa forme citée au commencement du n° 1.

D'ailleurs, les méthodes adoptées dans [2] sont différentes des nôtres. Un point commun des deux raisonnements est un lemme de factorisation qu'on va établir au n° 3.

3. Un lemme de factorisation

Il s'agit du suivant

Lemme. *Toute fonction $\Omega \in H^\infty(\mathfrak{L}, \mathfrak{N})$ admet une factorisation*

$$\Omega(z) = \Omega_2(z)\,\Omega_1(z) \tag{3. 1}$$

en produit de deux fonctions, $\Omega_1 \in H^\infty(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$ et $\Omega_2 \in H^\infty(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, dont la première est extérieure, et qui sont telles que

$$\Omega_1(z)^* \Omega_1(z) = [\Omega(z)^* \Omega(z)]^{\frac{1}{2}} \tag{3. 2}$$

et

$$\Omega_2(z)^* \Omega_2(z) = \Omega_1(z)\,\Omega_1(z)^*. \tag{3. 3}$$

Ce résultat, généralisant des résultats antérieurs de HELSON—LOWDENSLAGER et de DEVINATZ, se trouve (même pour des fonctions non bornées, mais de carré sommable) dans SARASON [2] (théorème 4). Nous en allons donner une démonstration simple, basée sur un critère général de factorisation dû à LOWDENSLAGER [1], *cf.* aussi [A], proposition V. 4. 2.

Démonstration. Il ne restreint évidemment pas la généralité de supposer que la fonction Ω est contractive. Posons

$$N(z) = [\Omega(z)^* \Omega(z)]^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad N_1(z) = N(z)^{\frac{1}{2}};$$

ce sont des fonctions contractives à valeurs opérateurs autoadjoints positifs dans $\mathfrak{L}$. Comme $N - N^2 = N(I-N) \geqq O$, on a pour $v \in L^2(\mathfrak{L})$:

$$\|N_1 v_2\| = (N_1^2 v, v) = (Nv, v) \geqq (N^2 v, v) = (\Omega^* \Omega v, v) = \|\Omega v\|^2,$$

d'où il résulte en particulier qu'il existe une contraction

$$Z\colon \overline{N_1 \cdot H^2(\mathfrak{L})} \to H^2(\mathfrak{N})$$

pour laquelle

$$Z(N_1 z) = \Omega u \qquad (u \in H^2(\mathfrak{L})).$$

Comme les opérateurs N_1 et Ω permutent à la multiplication par des fonctions scalaires, il en est de même pour Z et par conséquent

$$Z \bigcap_{n \geqq 0} z^n \overline{N_1 \cdot H^2(\mathfrak{L})} \subset \bigcap_{n \geqq 0} z^n \overline{\Omega \cdot H^2(\mathfrak{L})} \subset \bigcap_{n \geqq 0} z^n H^2(\mathfrak{N}) = \{0\}.$$

De ce résultat on pourra conclure

$$\bigcap_{n \geqq 0} z^n \overline{N_1 \cdot H^2(\mathfrak{L})} = \{0\} \tag{3.4}$$

dès qu'on aura montré que le seul élément w de $\overline{N_1 \cdot H^2(\mathfrak{L})}$ pour lequel $Zw = 0$, est $w = 0$. Or, soit $w = \lim v_n$ où $v_n = N_1 u_n$, $u_n \in H^2(\mathfrak{L})$. Alors, $0 = Zw = \lim Zv_n = \lim \Omega u_n$ entraîne

$$\|Nu_n\| = \|\Omega u_n\| \to 0, \quad Nu_n \to 0, \quad N_1 v_n = N_1 N_1 u_n = Nu_n \to 0.$$

Ainsi, $N_1 w = \lim N_1 v_n = 0$. Comme $w \in \overline{N_1 \cdot H^2(\mathfrak{L})}$, cela entraîne $w = 0$.

La relation (3. 4) que nous venons d'établir, entraîne, d'après le critère cité, qu'il existe une fonction $\Omega_1 \in H^\infty(\mathfrak{L}, \mathfrak{M})$, même extérieure, telle que

$$\Omega_1(z)^* \Omega_1(z) = N_1(z)^2; \tag{3.5}$$

$\mathfrak{M}$ est un certain espace de Hilbert. C'est l'équation (3. 2).

Vu que $N_1(z)^2 = N(z) \geqq N(z)^2 = \Omega(z)^* \Omega(z)$, (3. 5) entraîne

$$\Omega_1(z)^* \Omega_1(z) \geqq \Omega(z)^* \Omega(z). \tag{3.6}$$

Vu que Ω_1 est une fonction extérieure, il s'ensuit de (3. 6) qu'il existe une fonction $\Omega_2 \in H^\infty(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ telle que la factorisation (3. 1) subsiste; *cf.* [A], proposition V. 4. 1. En réunissant ces résultats on obtient

$$[\Omega_1(z)^* \Omega_1(z)]^2 = N_1(z)^4 = N(z)^2 = \Omega(z)^* \Omega(z) = (\Omega_2(z)\Omega_1(z))^* (\Omega_2(z)\Omega_1(z))$$

et par conséquent

$$\Omega_1(z)^* \Delta(z) \Omega_1(z) = 0, \quad \text{où} \quad \Delta(z) = \Omega_1(z)\Omega_1(z)^* - \Omega_2(z)^* \Omega_2(z).$$

Puisque $\overline{\Omega_1(z)\mathfrak{L}} = \mathfrak{M}$ (*cf.* [A], proposition V. 2. 4 (b)) et que par conséquent $\Omega_1(z)^*$ est inversible, on conclut que $\Delta(z) = 0$; tout cela p. p. Cela établit la relation (3. 3) et achève la démonstration.

4. Une inégalité

1. Nous commençons la démonstration du théorème 1. Soient donc T et S donnés par leurs modèles fonctionnels (1. 2—3) et (1. 7) où $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ sont deux espaces de Hilbert ($\neq \{0\}$), $\dim \mathfrak{G} = \omega$, et où Θ est une fonction $\in H^\infty(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})$, contractive pure, intérieure des deux côtés.

Il ne restreint pas la généralité de choisir $\mathfrak{G} = E^\omega$, l'espace des vecteurs $x = [x_k]_1^\omega$ [6]) à composantes nombres complexes, avec

$$\|x\|_{E^\omega} = \left[\sum_1^\omega |x_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

On désignera par $e^{(k)}$ le vecteur dont la composante de rang k est 1 et les autres sont 0.

Auprès de l'espace $H = H^2(\mathfrak{F}) \ominus \Theta H^2(\mathfrak{F})$, dans lequel T est défini, on envisagera aussi le sous-espace suivant de $L^2(\mathfrak{F})$:

$$G = L^2(\mathfrak{F}) \ominus \Theta H^2(\mathfrak{F}) = [L^2(\mathfrak{F}) \ominus H^2(\mathfrak{F})] \oplus H. \tag{4. 1}$$

Pour toute fonction scalaire $\varphi \in H^\infty$ on a $\varphi\Theta H^2(\mathfrak{F}) = \Theta\varphi H^2(\mathfrak{F}) \subset \Theta H^2(\mathfrak{F})$ et par conséquent

$$\bar{\varphi} G \subset G. \text{ [7])} \tag{4. 2}$$

Nous définissons dans $L^2(\mathfrak{F})$ des opérateurs Φ et Ψ de la manière suivante:

$$(\Phi v)(z) = \bar{z} \cdot \Theta(z) v(\bar{z}), \quad (\Psi v)(z) = \bar{z} \cdot \Theta^\sim(z) v(\bar{z}). \tag{4. 3}$$

[6]) Dans le cas $\omega = \aleph_0$ convenons d'entendre par $k = 1, \ldots, \omega$ la suite des nombres naturels.

[7]) Pour une fonction scalaire ψ nous définissons les fonctions $\psi^\sim$ et $\bar{\psi}$ par $\psi^\sim(z) = \overline{\psi(\bar{z})}$ et $\bar{\psi}(z) = \overline{\psi(z)}$. On a alors $\bar{\psi}^\sim(z) = \overline{\psi^\sim(z)} = \psi(\bar{z})$. Pour $\psi \in H^\infty$ on a aussi $\psi^\sim \in H^\infty$.

Comme Θ est intérieure des deux côtés, ses valeurs sont des opérateurs unitaires dans $\mathfrak{F}$, p. p., donc on a

$$\|(\Phi v)(z)\|_{\mathfrak{F}} = \|v(\bar{z})\|_{\mathfrak{F}} = \|(\Psi v)(z)\|_{\mathfrak{F}} \quad \text{p.p.} \tag{4.4}$$

Or il est manifeste que pour toute fonction $a \in L^1$, l'intégrale de $a(\bar{z})$ sur C est égale à celle de $a(z)$, donc il dérive de (4. 4) par l'intégration des carrés que $\|\Phi v\| = \|v\| = \|\Psi v\|$: les opérateurs Φ et Ψ sont donc isométriques. De plus on a $(\Phi\Psi v)(z) = \bar{z}\Theta(z)\cdot z\Theta^{\sim}(\bar{z})\, v(z) = \bar{z}z\Theta(z)\Theta(z)^* v(z) = v(z)$ et une relation analogue pour $\Psi\Phi$, d'où il résulte que Φ et Ψ sont des opérateurs unitaires dans $L^2(\mathfrak{F})$ et que $\Phi = \Psi^{-1}$.

Il est manifeste que si $v(z)$ parcourt les fonctions dans $H^2(\mathfrak{F})$, $\bar{z}v(\bar{z})$ parcourt les fonctions dans $L^2(\mathfrak{F}) \ominus H^2(\mathfrak{F})$ et $\bar{z}\Theta(z)\, v(\bar{z})$ parcourt les fonctions dans $\Theta[L^2(\mathfrak{F}) \ominus H^2(\mathfrak{F})] = L^2(\mathfrak{F}) \ominus \Theta H^2(\mathfrak{F}) = G$. Cela prouve que

$$\Phi H^2(\mathfrak{F}) = G, \quad \Psi G = H^2(\mathfrak{F}). \tag{4.5}$$

Notons encore que pour toute fonction scalaire $\varphi \in L^\infty$ on a $\varphi(z)\cdot(\Psi v)(z) = \varphi(z)\ \bar{z}\ \Theta(z)\, v(\bar{z}) = \bar{z}\ \Theta(z)\ \bar{\varphi}^{\sim}(\bar{z})\, v(\bar{z}) = \big(\Psi(\bar{\varphi}^{\sim} v)\big)(z)$, donc

$$\varphi \cdot \Psi v = \Psi(\bar{\varphi}^{\sim} v) \qquad (v \in L^2(\mathfrak{F}), \quad \varphi \in L^\infty). \tag{4.6}$$

2. Soit X un opérateur (de $H^2(E^\omega)$ dans H) vérifiant l'équation $TX = XS$. On a alors aussi $T^n X = XS^n$ pour $n = 0, 1, \cdots$ et par conséquent $\varphi(T)\cdot X = X\cdot\varphi(S)$ pour $\varphi \in H^\infty$. Or, $\varphi(T)$ s'exprime aussi par (1. 5), et on déduit de (1. 7) que $\varphi(S)$ est la multiplication par la fonction φ. Donc nous avons

$$P_H(\varphi \cdot Xu) = X(\varphi u) \quad \text{pour} \quad u \in H^2(E^\omega) \quad \text{et} \quad \varphi \in H^\infty. \tag{4.7}$$

Désignons

$$a_k = Xe^{(k)} \qquad (k = 1, \dots, \omega), \tag{4.8}$$

où on considère $e^{(k)}$ comme la fonction constante ayant cette valeur. (4. 7) entraîne

$$P_H(\varphi a_k) = X(\varphi e^{(k)}). \tag{4.9}$$

Soit $g \in G$ où G est le sous-espace de $L^2(\mathfrak{F})$ défini par (4. 1) et soit $\varphi \in H^\infty$. En appliquant (4. 9) à $\varphi^{\sim} \in H^\infty$, on obtient

$$(g, X(\varphi^{\sim} e^{(k)})) = (g, P_H(\varphi^{\sim} a_k)) = (P_H g, \varphi^{\sim} a_k) = (g, \varphi^{\sim} a_k),$$

la dernière équation dérivant de ce que, en vertu de la seconde des représentations (4. 1) de G, la projection de g à H est égale à sa projection à $H^2(\mathfrak{F})$. Comme $\overline{\varphi^{\sim}} = \bar{\varphi}^{\sim}$, notre résultat peut être écrit aussi sous la forme

$$(g, X(\varphi^{\sim} e^{(k)})) = (\bar{\varphi}^{\sim} g, a_k). \tag{4.10}$$

Envisageons alors une somme de la forme

$$\sum_{k=1}^{r}\Big(\sum_{j=1}^{s}\bar{\varphi}_{\tilde{j}k}g'_j,\, a_k\Big)$$

où r et s sont des nombres naturels, r ne dépassant pas ω, et où

$$\varphi_{jk}\in H^{\infty} \quad \text{et} \quad g'_j\in G.$$

En vertu de (4. 10) cette somme est égale à

$$\sum_{j=1}^{s}\Big(g'_j,\, X\sum_{k=1}^{r}\varphi_{\tilde{j}k}e^{(k)}\Big)$$

et sa valeur absolue est par conséquent majorée par

$$\|X\|\cdot\sum_{j=1}^{s}\Big[\|g'_j\|\cdot\Big\|\sum_{k=1}^{r}\varphi_{\tilde{j}k}e^{(k)}\Big\|\Big].$$

Ce résultat peut être formulé aussi dans la forme suivante: pour $g_k\in G$ $(k=1,\cdots,r)$ quelconques,

$$\Big|\sum_{k=1}^{r}(g_k, a_k)\Big| \leqq \|X\|\cdot\inf\sum_{j=1}^{s}\Big[\|g'_j\|\cdot\Big\|\sum_{k=1}^{r}\varphi_{\tilde{j}k}e^{(k)}\Big\|\Big] \tag{4. 11}$$

où g'_j, φ_{jk} varient sous les conditions

$$g'_j\in G,\quad \varphi_{jk}\in H^{\infty},\quad \sum_{j=1}^{s}\bar{\varphi}_{\tilde{j}k}g'_j = g_k \qquad (k=1,\cdots,r). \tag{4. 12}$$

Soit Ψ l'opérateur unitaire dans $L^2(\mathfrak{F})$ introduit ci-dessus, et posons

$$\alpha_k=\Psi a_k \qquad (k=1,\cdots,\omega). \tag{4. 13}$$

Puisque Ψ applique G sur $H^2(\mathfrak{F})$ (*cf.* (4. 5)), on déduit de (4. 11—12) et de (4. 6) que pour $\gamma_k\in H^2(\mathfrak{F})$ $(k=1,\cdots,r)$ quelconques on a

$$\Big|\sum_{k=1}^{r}(\gamma_k, \alpha_k)\Big| \leqq \|X\|\cdot\inf\sum_{j=1}^{s}\Big[\|\gamma'_j\|\cdot\Big\|\sum_{k=1}^{r}\varphi_{\tilde{j}k}e^{(k)}\Big\|\Big] \tag{4. 14}$$

où γ'_j et φ_{jk} varient sous les conditions

$$\gamma'_j\in H^2(\mathfrak{F}),\quad \varphi_{jk}\in H^{\infty},\quad \sum_{j=1}^{s}\varphi_{jk}\gamma'_j = \gamma_k \qquad (k=1,\cdots,r). \tag{4. 15}$$

Envisageons le cas particulier où les fonctions γ_k sont *bornées.* Elles engendrent alors une fonction $\gamma\in H^{\infty}(E^r,\mathfrak{F})$ par la définition

$$\gamma(z)\,x = \sum_{k=1}^{r}\gamma_k(z)\,x_k,\quad x=[x_k]_1^r\in E^r. \tag{4. 16}$$

D'après le lemme du n°. 3 il existe des fonctions $\Omega_1 \in H^\infty(E^r, \mathfrak{M})$ et $\Omega_2 \in H^\infty(\mathfrak{M}, \mathfrak{F})$, avec un espace de Hilbert intermédiaire $\mathfrak{M}$, telles que Ω_1 est extérieure et les relations suivantes sont vérifiées:

$$\gamma(z) = \Omega_2(z)\Omega_1(z), \tag{4.17}$$

$$\Omega_1(z)^*\Omega_1(z) = (\gamma(z)^*\gamma(z))^{\frac{1}{2}}, \tag{4.18}$$

$$\Omega_2(z)^*\Omega_2(z) = \Omega_1(z)\Omega_1(z)^*. \tag{4.19}$$

Le fait que Ω_1 est extérieure entraîne $\dim \mathfrak{M} \leqq \dim E^r = r$; *cf.* [A], corollaire à la proposition V. 2. 4. Ainsi, on peut supposer $\mathfrak{M} = E^s$, $0 \leqq s \leqq r$. Laissant à part le cas banal $\gamma = 0$ (c'est-à-dire où $\gamma_k = 0$ pour tous les k) on a même $1 \leqq s \leqq r$. Les fonctions

$$\Omega_1 \in H^\infty(E^r, E^s), \quad \Omega_2 \in H^\infty(E^s, \mathfrak{F})$$

peuvent être représentées sous les formes

$$\Omega_1(z)x = \Big[\sum_{k=1}^{r} \varphi_{jk}(z)x_k\Big]_{j=1}^{s} \quad \text{où} \quad x = [x_k]_1^r \in E^r, \tag{4.20}$$

$$\Omega_2(z)y = \sum_{j=1}^{s} \gamma_j'(z)y_j \quad \text{où} \quad y = [y_j]_1^s \in E^s, \tag{4.21}$$

moyennant des fonctions $\varphi_{jk} \in H^\infty$ $(j = 1, \cdots, s;\ k = 1, \cdots, r)$ et $\gamma_j' \in H^\infty(\mathfrak{F})$ $(j = 1, \cdots, s)$. En vertu de (4. 17) on en déduit pour la fonction $\gamma \in H^\infty(E^r, \mathfrak{F})$ la représentation

$$\gamma(z)x = \sum_{j=1}^{s} \gamma_j'(z) \sum_{k=1}^{r} \varphi_{jk}(z)x_k \quad \text{où} \quad x \in E^r. \tag{4.22}$$

En comparant (4. 16) à (4. 22) il résulte que

$$\gamma_k = \sum_{j=1}^{s} \gamma_j'\varphi_{jk} \qquad (k = 1, \cdots, r).$$

Ainsi, les fonctions obtenues γ_j' et φ_{jk} vérifient les relations (4. 15).

Evaluons la double somme correspondante, figurant au second membre de (4. 14). A cette fin, désignons par $e^{(h)}$ les vecteurs de base de E^r, ainsi que les vecteurs de base de E^s $(h = 1, \cdots, r$ et $h = 1, \cdots, s$, selon les cas). En vertu de (4. 21) on a $\Omega_2(z)e^{(j)} = \gamma_j'(z)$; vu aussi (4. 19) et (4.20) on en déduit

$$\|\gamma_j'(z)\|_{\mathfrak{F}}^2 = \|\Omega_2(z)e^{(j)}\|_{\mathfrak{F}}^2 = (\Omega_2(z)^*\Omega_2(z)e^{(j)}, e^{(j)})_{E^s} =$$

$$= (\Omega_1(z)\Omega_1(z)^*e^{(j)}, e^{(j)})_{E^s} = \sum_{k=1}^{r} |\varphi_{jk}(z)|^2.$$

Par intégration sur C il en résulte

$$\|\gamma_j'\|^2 = \sum_{k=1}^{r} \|\varphi_{jk}\|^2.$$

D'autre part, il est manifeste que

$$\Big\| \sum_{k=1}^{r} \varphi_{j\tilde{k}} e^{(k)} \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{r} \|\varphi_{j\tilde{k}}\|^2 = \sum_{k=1}^{r} \|\varphi_{jk}\|^2.$$

Faisant usage aussi de (4. 18) on obtient donc

$$\sum_{j=1}^{s} \Big[\|\gamma_j'\| \cdot \Big\| \sum_{k=1}^{r} \varphi_{j\tilde{k}} e^{(k)} \Big\|\Big] = \sum_{j=1}^{s} \Big[\sum_{k=1}^{r} \|\varphi_{jk}\|^2\Big] = \sum_{k=1}^{r} \Big[\sum_{j=1}^{s} \|\varphi_{jk}\|^2\Big] =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \int (\Omega_1(z)^* \Omega_1(z) e^{(k)}, e^{(k)})_{E^r} \, dm(z) = \int \operatorname{tr} [\Omega_1(z)^* \Omega_1(z)] \, dm(z) =$$

$$= \int \operatorname{tr} [\gamma(z)^* \gamma(z)]^{\frac{1}{2}} \, dm(z),$$

„tr" désignant la trace de l'opérateur.

En utilisant la notation $|\tau| = (\tau^*\tau)^{\frac{1}{2}}$ pour un opérateur τ (d'un espace de Hilbert en soi-même ou dans un autre) nous pouvons résumer nos résultats dans *l'inégalité*

$$\left| \sum_{k=1}^{r} (\gamma_k, \alpha_k) \right| \leqq \|X\| \cdot \int \operatorname{tr} |\gamma(z)| \cdot dm(z), \tag{4. 23}$$

valable pour les $\alpha_k = \Psi a_k$ *et pour des* $\gamma_k \in H^\infty(\mathfrak{F})$ *quelconques, en nombre fini* $r \leqq \omega$. [8])

Ajoutons que si l'on complète la suite $[\gamma_k]_1^r$ à une suite $[\gamma_k]_1^\omega$ par des fonctions $\gamma_k = 0$ $(k > r)$ il y correspondra, par la même formule (4. 16), une fonction $\gamma \in H^\infty(E^\omega, \mathfrak{F})$. La trace de $|\gamma(z)|$ ne change pas lors de ce prolongement.

5. Application du théorème de Hahn—Banach

1. L'inégalité que nous venons d'obtenir impose d'introduire l'espace linéaire normé L suivant. Ses éléments sont les fonctions $\gamma \in L^\infty(E^\omega, \mathfrak{F})$ définies par

$$\gamma(z) x = \sum_{1}^{\omega} \gamma_k(z) x_k, \quad x = [x_k]_1^\omega \in E^\omega, \tag{5. 1}$$

où $\gamma_k \in L^\infty(\mathfrak{F})$ $(k = 1, \cdots, \omega)$, $\gamma_k = 0$ pour $k > r$, r étant un nombre fini $\leqq \omega$, dépendant de γ. Les opérations linéaires étant celles évidentes, on définit la norme par

$$\|\gamma\| = \int \operatorname{tr} |\gamma(z)| \cdot dm(z). \tag{5. 2}$$

[8]) Le cas $\gamma = 0$, mis à part dans la démonstration, s'y range d'une manière évidente.

Cette intégrale existe. En effet, $|\gamma(z)| = (\gamma(z)^* \gamma(z))^{\frac{1}{2}}$ est un opérateur autoadjoint de rang $\leqq r$, de borne indépendante de z et fonction (faiblement et alors aussi fortement) mesurable de z; par conséquent tr $|\gamma(z)|$ est une fonction mesurable bornée de z. La propriété $\|c\gamma\| = |c| \|\gamma\|$ est manifeste. La propriété $\|\gamma + \gamma'\| \leqq \|\gamma\| + \|\gamma'\|$ résulte de ce qu'on a même $\mathrm{tr}|\gamma(z) + \gamma'(z)| \leqq \mathrm{tr}|\gamma(z)| + \mathrm{tr}|\gamma'(z)|$ par points, et cela en vertu de l'inégalité

$$\mathrm{tr}\ |\tau + \tau'| \leqq \mathrm{tr}\ |\tau| + \mathrm{tr}\ |\tau'|,$$

valable pour des opérateurs τ, τ' (d'un espace de Hilbert dans soi-même ou dans un autre), de la „classe de trace" („trace class"), classe qui comprend en particulier les opérateurs de rang fini. [9])

On déduit de (5. 1) que l'opérateur $\gamma(z)^*$ (de $\mathfrak{F}$ dans E^{ω}) est défini par

$$\gamma(z)^* f = [(f, \gamma_k(z))_{\mathfrak{F}}]_{k=1}^{\omega} \qquad (f \in \mathfrak{F})$$

et par conséquent on a

$$\text{(5. 3)} \qquad \gamma(z)^* \gamma(z) x = \left[\sum_{j=1}^{\omega} x_j (\gamma_j(z), \gamma_k(z))_{\mathfrak{F}} \right]_{k=1}^{\omega} \qquad (x \in E^{\omega}),$$

c'est-à-dire la matrice de $\gamma(z)^* \gamma(z)$ par rapport à la base $\{e^{(k)}\}$ a ses éléments

$$\text{(5. 4)} \qquad m_{kj}(z) = (\gamma_j(z), \gamma_k(z))_{\mathfrak{F}} \qquad (j, k = 1, \cdots, \omega).$$

2. Envisageons le sous-ensemble $\boldsymbol{H}$ de $\boldsymbol{L}$, évidemment linéaire, constitué des $\gamma \in \boldsymbol{L}$ tels que $\gamma_k \in H^{\infty}(\mathfrak{F})$ pour tous les k, et la fonctionnelle linéaire L dans $\boldsymbol{H}$ définie par

$$\text{(5. 5)} \qquad L(\gamma) = \sum_{k=1}^{\omega} (\gamma_k, \alpha_k) \qquad (\gamma \in \boldsymbol{H}).$$

D'après (4. 23) et la remarque y ajoutée, L vérifie l'inégalité

$$\text{(5. 6)} \qquad |L(\gamma)| \leqq \|X\| \cdot \|\gamma\|.$$

En vertu du théorème de Hahn—Banach il existe donc un prolongement de L à tout l'espace $\boldsymbol{L}$ de façon qu'elle reste une fonctionnelle linéaire vérifiant (5. 6) pour tous les $\gamma \in \boldsymbol{L}$.

Pour chaque nombre naturel $r \leqq \omega$ définissons la fonctionnelle L_r sur l'espace $L^{\infty}(\mathfrak{F})$ par

$$\text{(5. 7)} \qquad L_r(v) = L(ve^{(r)}) \qquad (v \in L^{\infty}(\mathfrak{F})).$$

Pour $\gamma = ve^{(r)}$ la matrice (5. 4) a tous ses éléments 0 sauf l'élément $m_{rr}(z)$ qui est égal à $\|v(z)\|_{\mathfrak{F}}^2$. Il en résulte que tr $|\gamma(z)| = \|v(z)\|_{\mathfrak{F}}$ et par conséquent

$$\|ve^{(r)}\| = \int \|v(z)\|_{\mathfrak{F}}\, dm(z) = \|v\|_1,$$

[9]) Cf. [3], lemma 5.14.

d'où

(5. 8) $$|L_r(v)| \leqq \|X\|\cdot\|v\|_1 \qquad (v\in L^\infty(F)).$$

Le dual de l'espace $L^1(\mathfrak{F})$ étant $L^\infty(\mathfrak{F})$, il s'ensuit de (5. 8) qu'il existe des fonctions $\beta_r\in L^\infty(\mathfrak{F})$ $(r=1, \cdots, \;)$ telles que

(5. 9) $$L_r(v) = \int (v(z), \beta_r(z))_{\mathfrak{F}}\, dm(z).$$

Comme v et β_r sont compris à fortiori dans $L^2(\mathfrak{F})$, (5. 9) s'écrit aussi sous la forme

(5. 10) $$L_r(v)=(v, \beta_r) \quad (\text{produit scalaire dans } L^2(\mathfrak{F})).$$

Dans le cas particulier où $v\in H^\infty(\mathfrak{F})$, on a $ve^{(r)}\in \boldsymbol{H}$ et il résulte de (5. 5), (5. 7) et (5. 10) que

(5. 11) $$(v, \beta_r) = (v, \alpha_r) \qquad (r = 1, \cdots, \omega).$$

Puisque les fonctions bornées sont partout denses dans $H^2(\mathfrak{F})$ dans la métrique de ce dernier espace (il n'y a qu'à prendre les sommes partielles de la série de Fourier) on conclut que (5. 11) *subsiste pour toutes les fonctions* $v\in H^2(\mathfrak{F})$.

3. Envisageons un élément $\gamma\in \boldsymbol{L}$ quelconque. On peut l'écrire sous la forme

$$\gamma=\sum_1^\omega \gamma_k e^{(k)} \quad (\text{il n'y a qu'un nombre fini de termes } \neq 0);$$

vu (5. 7) et (5. 10) il en dérive

(5. 12) $$L(\gamma) = \sum_1^\omega L(\gamma_k e^{(k)}) = \sum_1^\omega L_k(\gamma_k) = \sum_1^\omega (\gamma_k, \beta_k).$$

Soit en particulier γ la fonction aux composantes

(5. 13) $$\gamma_k(z) = \bar{x}_k\cdot\delta(z)\cdot f \qquad (k = 1, \cdots, \omega)$$

où $f\in\mathfrak{F}$, $\delta\in L^\infty$ à valeurs $\delta(z)\geqq 0$, et $x=[x_k]_1^\omega\in E^\omega$ tel que $x_k=0$ pour tous les k qui dépassent un nombre fini r (dépendant de x). En vertu de (5. 12) on a alors

(5. 14) $$L(\gamma) = \sum_1^\omega \bar{x}_k\int \delta(z)\,(f, \beta_k(z))_{\mathfrak{F}}\, dm(z)$$

et la matrice correspondante (5. 4) a ses éléments

$$m_{kj}(z) = \bar{x}_j x_k\,\delta(z)^2\,\|f\|_{\mathfrak{F}}^2.$$

Or la matrice hermitienne $[\bar{x}_j x_k]$ $(j, k=1, \cdots, r)$ a son polynôme caractéristique

$$P(\xi) = \xi^r-\xi^{r-1}\sum_1^r \|x_j\|^2$$

parce que tous ses mineurs principaux d'ordre $\geqq 2$ s'annulent. Si $x\neq 0$, la seule valeur propre $\neq 0$ de cette matrice est donc égale à $\|x\|^2_{E^\omega}$ et par conséquent la racine carrée positive de cette matrice a la seule valeur propre $\neq 0$ égale à $\|x\|_{E^\omega}$, qui est alors égale à la trace de cette racine carrée. Ce résultat subsiste aussi dans le cas $x=0$. On en déduit que pour la fonction γ aux composantes (5. 13) on a

$$\operatorname{tr} |\gamma(z)| = \delta(z) \cdot \|f\|_{\mathfrak{F}} \|x\|_{E^\omega},$$

d'où

$$\|\gamma\| = \int \delta(z)\, dm(z) \cdot \|f\|_{\mathfrak{F}} \cdot \|x\|_{E^\omega}. \tag{5. 15}$$

En combinant (5. 6), (5. 14) et (5. 15) on obtient

$$\left| \sum_1^r \bar{x}_k \int \delta(z) (f, \beta_k(z))_{\mathfrak{F}}\, dm(z) \right| \leqq \|X\| \cdot \int \delta(z)\, dm(z) \cdot \|f\|_{\mathfrak{F}} \|x\|_{E^\omega}. \tag{5. 16}$$

Choisissons δ en particulier de la manière suivante:

$$\delta(z) = \frac{2\pi}{h} \quad \text{lorsque} \quad t \leqq \arg z < t + h \pmod{2\pi}$$

et $\delta(z)=0$ ailleurs. L'intégrale au second membre de (5. 16) est alors égale à 1 et, lorsque $h \to 0$, l'intégrale dans le premier membre tend vers

$$(f, \beta_k(\zeta))_{\mathfrak{F}} \qquad (\zeta = e^{it})$$

en presque tous les points $\zeta \in C$. On a donc l'inégalité

$$\left| \sum_1^r \bar{x}_k \, (f, \beta_k(\zeta))_{\mathfrak{F}} \right| \leqq \|X\| \cdot \|f\|_{\mathfrak{F}} \cdot \|x\|_{E^\omega} \tag{5. 17}$$

en presque tous les points de C, l'ensemble exceptionnel pouvant dépendre de f. Grâce à la séparabilité de $\mathfrak{F}$ il existe alors un sous-ensemble ε de C, de mesure 0, tel que (5. 17) est vérifiée pour $z \notin \varepsilon$ quels que soient $f \in \mathfrak{F}$ et $x \in E^\omega$. Pour $\zeta \notin \varepsilon$ (5. 17) entraîne (en choisant $f = \sum_1^r x_k \beta_k(\zeta)$):

$$\left\| \sum_1^r \beta_k(\zeta) x_k \right\|_{\mathfrak{F}} \leqq \|X\| \cdot \|x\|_{E^\omega} \quad \text{pour tout} \quad x \in E^\omega. \tag{5. 18}$$

6. Conclusion de la démonstration du théorème 1

Les fonctions β_r obtenues dans le n° 5 étant comprises dans $L^2(\mathfrak{F})$ on y peut appliquer l'opérateur Φ du n° 3; soient

$$b_r = \Phi \beta_r \qquad (r = 1, \cdots, \omega).$$

Vu que $\Phi \alpha_r = \Phi \Psi a_r = a_r$, *cf.* (4. 13), on déduit de (5. 11) que

$$(g, b_r) = (g, a_r) \qquad (r = 1, \cdots, \omega) \tag{6. 1}$$

pour tout $g \in \Phi H^2(\mathfrak{F}) = G$; *cf.* (4. 5). Les éléments g du sous-espace $L^2(\mathfrak{F}) \ominus H^2(\mathfrak{F})$ de G sont orthogonaux aux a_r (parce que $a_r \in H \subset H^2(\mathfrak{F})$); (6. 1) entraîne alors qu'ils sont orthogonaux aussi aux b_r, donc

$$b_r \in H^2(\mathfrak{F}) \qquad (r = 1, \cdots, \omega). \tag{6. 2}$$

D'autre part, envisagée pour les éléments g du sous-espace H de G, la relation (6. 1) entraîne que

$$a_r = P_H b_r \qquad (r = 1, \cdots, \omega). \tag{6. 3}$$

Appliquons la première des relations (4. 4) à $v = \sum_1^r x_k \beta_k$. Grâce à (5. 18) on obtient

$$\left\| \sum_1^r b_k(z) x_k \right\|_{\mathfrak{F}} \leqq \|X\| \cdot \|x\|_{E^\omega} \tag{6. 4}$$

pour tout $x \in E^\omega$ et pour tout $z \in C$ sauf peut-être les points z d'un ensemble $\bar{\varepsilon}$ de mesure 0. Il s'ensuit que si $z \notin \bar{\varepsilon}$, $\sum_1^\omega b_k(z) x_k$ converge (dans $\mathfrak{F}$) pour tout $x \in E^\omega$ et que

$$\left\| \sum_1^\omega b_k(z) x_k \right\|_{\mathfrak{F}} \leqq \|X\| \cdot \|x\|_{E^\omega}. \tag{6. 4*}$$

Définissons la fonction B, à valeurs $B(z)$ opérateurs de E^ω dans $H^2(\mathfrak{F})$, par

$$B(z)x = \sum_1^\omega b_k(z) x_k \qquad (x \in E^\omega). \tag{6. 5}$$

En vertu de (6. 4*) on a p.p.

$$\|B(z)x\|_{\mathfrak{F}} \leqq \|X\| \cdot \|x\|_{E^\omega},$$

donc $B \in H^\infty(E^\omega, \mathfrak{F})$ et

$$\|B\|_\infty \leqq \|X\|. \tag{6. 6}$$

Pour $\varphi \in H^\infty$ on a

$$P_H(B \cdot \varphi e^{(k)}) = P_H(\varphi \cdot Be^{(k)}) = P_H(\varphi \cdot P_H Be^{(k)}) \tag{6. 7}$$

parce que

$$P_H(\varphi \cdot (I - P_H) Be^{(k)}) \in P_H(\varphi \cdot \Theta H^2(\mathfrak{F})) \subset P_H \Theta H^2(\mathfrak{F}) = \{0\}.$$

Vu que $B(z)e^{(k)} = b_k(z)$, *cf.* (6. 5), on déduit de (6. 7), (6. 3) et (4. 9):

$$P_H B(\varphi e^{(k)}) = P_H(\varphi \cdot P_H b_k) = P_H(\varphi \cdot a_k) = X(\varphi e^{(k)}). \tag{6.8}$$

Soit $u \in H^\infty(E^\omega)$. On peut l'écrire sous la forme

$$u = \sum_1^\omega u_k e^{(k)} \qquad (u_k \in H^\infty)$$

(convergence dans la métrique de $H^2(E^\omega)$), donc, grâce à (6. 8),

$$Xu = \sum_1^\omega X(u_k e^{(k)}) = \sum_1^\omega P_H B(u_k e^{(k)}) = P_H Bu.$$

Toute fonction $u \in H^2(E^\omega)$ étant la limite, dans la métrique de $H^2(E^\omega)$, d'une suite de fonctions bornées $u^{(n)} \in H^\infty(E^\omega)$, l'équation

$$Xu = P_H Bu \tag{6.9}$$

s'étend par continuité à toutes les fonctions $u \in H^2(E^\omega)$.

Inversement, toute fonction $B' \in H^\infty(E^\omega, \mathfrak{F})$ engendre, moyennant la formule (6. 9), un opérateur X' de $H^2(E^\omega)$ dans H vérifiant (1. 1) et tel que

$$\|X'\| \leqq \|B'\|_\infty. \tag{6.10}$$

En effet, la linéarité de X' étant manifeste, il n'y a qu'à observer que pour $u \in H^2(E^\omega)$

$$\|X'u\| = \|P_H B'u\| \leqq \|B'u\| \leqq \|B'\|_\infty \|u\|$$

et que, en vertu de (1. 6—7),

$$TX'u = TP_H B'u = P_H(z \cdot B'u) = P_H B'(zu) = X'(zu) = X'Su.$$

En choisissant pour B' la fonction B que nous avons construite plus haut, (6. 6) et (6. 10) entraînent qu'il y a égalité dans (6. 6).

Cela achève la démonstration du théorème 1 et finit notre étude.

Ouvrages cités

[A] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert* (Budapest, 1967).

[1] D. B. Lowdenslager, On factoring matrix valued functions, *Annals of Math.*, **78** (1963), 450—454.

[2] D. Sarason, Generalized interpolation in H^∞, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **127** (1967), 179—203.

[3] R. Schatten, *A theory of cross-spaces* (Annals of Math. Studies, vol. 26, Princeton, 1950).

(Reçu le 20. octobre 1967)