Objektentheoretische Untersuchungen über die kovarianten Ableitungen in allgemeinen Linienelementräumen

Von A. MOÓR in Szeged*)

§ 1. Einleitung

Ein allgemeiner Linienelementraum $\mathfrak{M}_n$ ist eine Mannigfaltigkeit der Grundelemente (x^i, v^i), $(i=1, 2, \cdots, n)$, die dem Transformationsgesetz:

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} \hat{x}^i = \hat{x}^i(x^1, x^2, \cdots, x^n) \\ \hat{v}^i = \hat{v}^i(\bar{v}^1, \bar{v}^2, \cdots, \bar{v}^n), \qquad \bar{v}^j = \dfrac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^r} v^r \end{cases}$$

genügen, wo die Funktionen $\hat{v}^i(\bar{v})$ homogen von erster Ordnung in den $\bar{v}^i$ sind, ferner

$$\text{(1.1a)} \qquad \operatorname{Det}\left(\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^k}\right) \neq 0, \quad \operatorname{Det}\left(\frac{\partial \hat{v}^i}{\partial \bar{v}^k}\right) \neq 0$$

besteht. Die Bedingungen (1.1a) sichern die Existenz der inversen Transformationen. Im $\mathfrak{M}_n$ soll noch eine Übertragungstheorie der erweiterten kontra- und kovarianten Vektoren existieren [3]. Diese erweiterten Vektoren genügen bezüglich der Transformationen (1.1) dem Transformationsgesetz:

$$\text{(1.2a)} \qquad \hat{X}^i = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^r} X^r \quad \text{bzw.} \quad \text{(1.2b)} \quad \hat{Y}_i = \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^i} Y_s.$$

Die Übertragungstheorie haben wir in unserer Arbeit [3] entwickelt, deren Resultate wir im folgenden weitgehend benützen werden. Die wichtigsten Transformationsformeln stellen wir zusammen.

Nach den Bezeichungen

$$\hat{q}^i_j \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j} \equiv \frac{\partial \bar{v}^i}{\partial v^j}, \qquad q^i_j \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j},$$

$$\hat{p}^i_j \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial \bar{v}^j}, \quad p^i_j \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \bar{v}^i}{\partial \hat{v}^j},$$

*) Jetzt in Sopron (Ungarn).

folgt auf Grund von (1. 1), daß die $\hat{q}^i_j$ bzw. q^i_j allein von den x^i bzw. $\hat{x}^i$ abhängig sind, ferner die Relationen

$$\hat{q}^i_r q^r_j = \hat{q}^r_j q^i_r = \delta^i_j, \tag{1.3}$$

$$\hat{p}^i_r p^r_j = \hat{p}^r_j p^i_r = \delta^i_j \tag{1.4}$$

bestehen. Die Transformationsformeln (1. 2a) und (1. 2b) können somit in der Form:

$$\text{(1.5a)}\quad \hat{X}^i = \hat{p}^i_s \hat{q}^s_r X^r, \qquad \text{(1.5b)}\quad \hat{Y}_i = q^s_i p^t_i Y_s$$

geschrieben werden (vgl. für die inversen Trasformationen von (1. 1) die Formeln (2. 4) von [3]). Die Transformationsformeln der Übertragungsparameter sind die folgenden (vgl. die Formeln (3. 8) und (4. 6) von [3]):

$$\hat{M}_j{}^i{}_k = M_a{}^b{}_c p^t_j q^a_t \hat{p}^i_r \hat{q}^r_b p^s_k q^c_s - \hat{p}^i_{ts} p^t_j p^s_k, \tag{1.6}$$

$$\hat{L}^{*i}_j{}_k = L^{*b}_a{}_c p^r_j q^a_r \hat{p}^i_s \hat{q}^s_b q^c_k + \hat{p}^i_{bc} p^b_j \hat{q}^c_t q^r_k L^{*t}_o{}_r + \hat{p}^i_{bc} \hat{q}^c_r p^b_j q^r_{tk} \bar{v}^t + \hat{p}^i_r \hat{q}^r_t q^t_{sk} p^s_j, \tag{1.6*}$$

wo der Index „o" die Kontraktion mit v^i, ferner

$$\hat{p}^i_{ts} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \hat{v}^i}{\partial \bar{v}^t\, \partial \bar{v}^s}, \quad q^t_{sk} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 x^t}{\partial \hat{x}^s\, \partial \hat{x}^k}$$

bezeichnen. Bei der Herleitung dieser Formeln haben wir außer den zitierten Formeln von [3] die Relationen

$$v^i = q^i_s \bar{v}^s, \quad \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^j} = \hat{p}^i_r \hat{q}^r_j, \quad \frac{\partial v^j}{\partial \hat{v}^k} = q^j_s p^s_k$$

ferner (1. 3) und (1. 4) beachtet.

Es gelten noch für $M_j{}^i{}_k$ die Relationen

$$M_o{}^i{}_k \equiv M_k{}^i{}_o \equiv 0.$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir unsere Resultate kurz formulieren. Die kovariante Ableitung der Vektoren im Sinne der Theorie der geometrischen Objekte ist ein Tensor zweiter Stufe, der aus dem Vektor, aus seiner partiellen Ableitungen und aus einem Hilfsobjekt gebildet ist (vgl. [1], Kapitel IV). In unserer Arbeit [3] haben wir zwei kovariante Ableitungen im $\mathfrak{M}_n$-Raum bestimmt, undzwar:

$$\overset{*}{\nabla}_k X^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial X^i}{\partial v^k} + M_j{}^i{}_k X^j, \quad \nabla_k X^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial X^i}{\partial x^k} - \frac{\partial X^i}{\partial v^j} L^{*j}_o{}_k + L^{*i}_j{}_k X^j,$$

bzw. für die erweiterten kovarianten Vektoren

$$\overset{*}{\nabla}_k Y_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial Y_i}{\partial v^k} - M_i{}^j{}_k Y, \quad \nabla_k Y_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial Y_i}{\partial x^k} - \frac{\partial Y_i}{\partial v^j} L^{*j}_o{}_k - L^{*j}_i{}_k Y_j.$$

Diese fundamentalen kovarianten Ableitungen genügen den Transformationsformeln ([3], (4. 15)):

(1. 7a) $$\overset{*}{\nabla}_k \hat{X}^i = \hat{p}^i_r \hat{q}^r_s q^t_m p^m_k \overset{*}{\nabla}_t X^s,$$

(1. 7b) $$\nabla_k \hat{X}^i = \hat{p}^i_r \hat{q}^r_s q^t_k \nabla_t X^s$$

(1. 8a) $$\overset{*}{\nabla}_k \hat{Y}_i = q^r_t p^t_i q^m_s p^s_k \overset{*}{\nabla}_m Y_r,$$

(1. 8b) $$\nabla_k \hat{Y}_i = q^r_t p^t_i q^s_k \nabla_s Y_r.$$

Die erste kovariante Ableitung $\overset{*}{\nabla}_k$ ist vom Vektor selbst, von seinen partiellen Ableitungen nach v^k und von dem Hilfsobjekt $M_j{}^i{}_k$ abhängig. Im zweiten kovarianten Ableitung ∇_k kommt noch die partielle Ableitung nach $x^k_{\cdot}$ vor und statt der Übertragungsparameter $M_j{}^i{}_k$ ist $L^{*}_j{}^i{}_k$ vorhanden. Die allgemeinsten ersten und zweiten kovarianten Ableitungen, die wir mit ${}_{(1)}\nabla_k$ bzw. ${}_{(2)}\nabla_k$ bezeichnen werden, sind auch von diesen Größen abhängig, aber nach der Theorie der geometrischen Objekte haben sie eine allgemeinere Form, da z. B. Linearität nicht gefordert wird. Die allgemeinen ersten und zweiten kovarianten Ableitungen verallgemeinern somit die fundamentalen kovarianten Ableitungen $\overset{*}{\nabla}_k$ und ∇_k. Wir wollen in diesem Aufsatz eben diese allgemeinere Form bestimmen (vgl. unsere Sätze 1—4.).

Ein $\mathfrak{M}_n$-Raum heißt ein *gewöhnlicher Linienelementraum* (vgl. Aufsatz [2]) falls

(1.9) $$\hat{v}^i \equiv \bar{v}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^r} v^r$$

gilt. In diesem Falle ist $\hat{p}^i_j = p^i_j = \delta^i_j$. Da im allgemeinen $\mathfrak{M}_n$-Raum die p^i_j und q^i_j voneinander unabhängig sind, bekommt man für die Bestimmung der allgemeinen kovarianten Ableitungen stärkere Bedingungen als im gewöhnlichen — d.h. durch (1. 9) charakterisierten — Linienelementraum. Das kommt besonders in der Formel der zweiten kovarianten Ableitung ${}_{(2)}\nabla_k X^i$ zum Ausdruck (vgl. [3], § 4).

§ 2. Die allgemeine erste kovariante Ableitung

Vor allem geben wir die Definition der allgemeinen ersten kovarianten Ableitung.

Definition 1. Die allgemeine erste kovariante Ableitung eines kontra- bzw. kovarianten erweiterten Vektors $\vec{Z}$ ist ein erweiterter Tensor zweiter Stufe: ${}_{(1)}\nabla\vec{Z}$, der aus $\partial_{v^i}\vec{Z}, \vec{Z}$ und aus einem Hilfsobjekt M mit dem Transformationsgesetz (1. 6) gebildet ist, und dessen kovariante Stufenzahl um eins größer als die von $\vec{Z}$ ist (vgl. [3], § 2).

Im folgenden werden wir immer annehmen, daß die vorhandenen Funktionen in ihren Veränderlichen stetig sind. Unter dieser Annahme gilt der folgende

Satz 1. *Wenn* $M^i{}_{[jk]}=0$, *so ist die allgemeine erste kovariante Ableitung eines erweiterten kontravarianten Vektors* X^i *vom Transformationsgesetz* (1. 2a) *eine Funktion von* $\overset{*}{\nabla}_k X^i$.

Beweis. Bezeichnen wir die allgemeine erste kovariante Ableitung des erweiterten Vektors X^i mit ${}_{(1)}\nabla_k X^i$, so gilt:

$$(2.1)\qquad {}_{(1)}\nabla_k \bar{X}^i = \bar{p}^i_r \bar{q}^r_s q^m_t p^t_k\, {}_{(1)}\nabla_m X^s,$$

da die allgemeine erste kovariante Ableitung von X^i ein gemischter erweiterter Tensor ist. Nach der Definition 1. ist ${}_{(1)}\nabla_k X^i$ eine Funktion von $\partial_{v^l} X^j$, X^j und $M_j{}^i{}_k$, d.h.:

$${}_{(1)}\nabla_k X^i = F^i_k\left(\frac{\partial X^j}{\partial v^l}, X^j, M_j{}^l{}_m\right).$$

Auf Grund von (2. 1) bekommt man für die Funktion F^i_k das Funktionalgleichungssystem:

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} &F^i_k\left(\bar{p}^j_a \bar{q}^a_r p^b_l q^s_b \frac{\partial X^r}{\partial v^s} + \bar{p}^j_{ab} p^b_l \bar{q}^a_c X^c,\quad \bar{p}^j_a \bar{q}^a_r X^r,\quad M_a{}^b{}_c p^t_j q^a_t \bar{p}^l_r \bar{q}^r_b p^s_m q^c_s - \bar{p}^l_{ab} p^a_j p^b_m\right) = \\ &= \bar{p}^i_r \bar{q}^r_s q^m_t p^t_k F^s_m\left(\frac{\partial X^j}{\partial v^l},\ X^j,\ M_l{}^j{}_h\right), \quad \text{wo} \quad \bar{p}^j_{ab} = \frac{\partial^2 \bar{v}^j}{\partial \bar{v}^a \partial \bar{v}^b}. \end{aligned}$$

Bestimmen wir jetzt die Koordinatentransformation (1. 1) in der Form:

$$(2.3)\qquad \bar{p}^i_j = \varrho \delta^i_j,\quad \bar{q}^i_j = \delta^i_j,\quad \bar{p}_a{}^l{}_b = \varrho M_a{}^l{}_b,\quad \varrho = konst.$$

so wird nach (1. 3) und (1. 4)

$$p^i_j = \frac{1}{\varrho}\delta^i_j, \quad q^i_j = \delta^i_j$$

und aus (2. 2) bekommt man:

$$F^i_k\left(\frac{\partial X^j}{\partial v^l},\ X^j,\ M_l{}^j{}_h\right) = F^i_k(\overset{*}{\nabla}_l X^j,\ \varrho X^j,\ 0).$$

F^i_k ist also von $M_l{}^j{}_k$ nur durch $\overset{*}{\nabla}_l X^j$ abhängig; wenn jetzt ϱ nach Null strebt, so folgt auf Grund der Stetigkeit, daß F^i_k nur von $\overset{*}{\nabla}_l X^j$ abhängig ist, w.z.b.w.

Jetzt gehen wir zur Bestimmung der allgemeinen ersten kovarianten Ableitung der erweiterten kovarianten Vektoren über. Es gilt der folgende

Satz 2. *Wenn* $M_{[j}{}^i{}_{k]}=0$, *so ist die allgemeine erste kovariante Ableitung eines erweiterten kovarianten Vektors* Y_i *der dem Transformationsgesetz* (1. 2b) *genügt, von* Y_i *und* $\overset{*}{\nabla}_k Y_i$ *abhängig.*

Beweis. ${}_{(1)}\nabla_k Y_i$ sei die allgemeine erste kovariante Ableitung von Y_i; die Transformationsformel dieser Größe ist nach unserer Definition 1:

$$(2.4)\qquad {}_{(1)}\nabla_k \hat{Y}_i = q^s_i p^t_i q^r_m p^m_k {}_{(1)}\nabla_r Y_s .$$

${}_{(1)}\nabla_k Y_i$ hat ferner die Form:

$${}_{(1)}\nabla_k Y_i = F_{ik}\left(\frac{\partial Y_j}{\partial v^l},\ Y_j,\ M_j{}^l{}_h\right).$$

Auf Grund von (2.4) bekommt man für die Funktionen F_{ik} die Formeln:

$$(2.5)\qquad \begin{aligned} &F_{ik}\left(q^s_i p^t_j q^r_m p^m_l \frac{\partial Y_s}{\partial v^r} + q^s_i p^t_{jl} Y_s,\quad q^s_i p^t_j Y_s,\quad M_a{}^b{}_c p^t_j q^a_b \hat{p}^l_r \hat{q}^r_b p^s_m q^c_s - p^l_{ab} p^a_j p^b_m\right) = \\ &= q^s_i p^t_i q^r_h p^h_k F_{sr}\left(\frac{\partial Y_j}{\partial v^m},\ Y_j,\ M_j{}^l{}_m\right), \quad \text{wo} \quad p^t_{jl} = \frac{\partial^2 \bar{v}^t}{\partial \hat{v}^j \partial \hat{v}^l}. \end{aligned}$$

Nach (1.4) ist aber

$$p^r_j \hat{p}^i_{rk} = -\hat{p}^i_r p^r_{jt} \hat{p}^t_k ,$$

wie man das nach einer partiellen Ableitung beider Seiten von (1.4) nach $\bar{v}^k$ unmittelbar verifizieren kann, und somit wird aus (2.5) nach der Substitution (2.3) wenn noch in (2.3) $\varrho = 1$ gesetzt wird:

$$F_{ik}\left(\frac{\partial Y_j}{\partial v^l},\ Y_j,\ M_j{}^l{}_m\right) = F_{ik}(\overset{*}{\nabla}_l Y_j,\ Y_j,\ 0)$$

und das beweist den Satz 2.

An zwei Beispielen, die unten angegeben sind, sieht man, daß außer $\overset{*}{\nabla}_k Y^i$ bzw. $\overset{*}{\nabla}_k Y_i$ auch andere Formen von ${}_{(1)}\nabla_k X^i$ bzw. ${}_{(1)}\nabla_k Y_i$ möglich sind:

$$\text{I.}\qquad {}_{(1)}\nabla_k X^i = \overset{*}{\nabla}_s X^i \overset{*}{\nabla}_k X^s ,$$

$$\text{II.}\qquad {}_{(1)}\nabla_k Y_i = \overset{*}{\nabla}_k Y_i - Y_i Y_k .$$

Diese genügen der Transformationsformel (2.1) bzw. (2.4), da $\overset{*}{\nabla}_k$ eine tensorielle Operation ist. (Vgl. Satz 3 von [3].)

In den gewöhnlichen Linienelementräumen ist immer $\hat{p}^i_{jk} = 0$ und $\hat{p}^i_j = \delta^i_j$, somit ist ∂_{v^k} eine tensorielle Operation, die der Operation $\overset{*}{\nabla}_k$ entspricht. Auch $M_j{}^i{}_k$ ist in diesen Räumen ein Tensor, und somit bestimmt $M_j{}^i{}_k$ in den gewöhnlichen Linienelementräumen kein Hilfsobjekt.

Zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir noch bemerken, daß zwar $\partial_{v[j} Y_{i]}$ selbst als eine erste kovariante Ableitung betrachtet werden kann, doch wegen der vorausgesetzten Symmetrie von $M_j{}^i{}_k$ in j, k ist

$$\partial_{v[j} Y_{i]} = \overset{*}{\nabla}_{[j} Y_{i]}$$

und somit gibt $\partial_{v[j} Y_{i]}$ keine neue Möglichkeiten für ${}_{(1)}\nabla_k Y_i$.

§ 3. Die allgemeine zweite kovariante Ableitung

In diesem Paragraphen werden wir annehmen, daß in dem Raum die folgende Forderung erfüllt ist:

Forderung 1. Es soll ein Koordinatensystem für die Elemente (x^i, v^i) existieren, in dem $L^{*i}_{j\ k}$ in j, k symmetrisch ist. [1])

Mit der Forderung 1 ist unser Raum eine unmittelbare Verallgemeinerung der Finslerräume, da in diesen die entsprechenden Übertragungsparemeter $\Gamma^{*i}_{j\ k}$ in j, k immer symmetrisch sind und für die gewöhnlichen Linienelementtransformationen, d.h. $\hat{v}^i = \bar{v}^i$ ist diese Relation invariant. In den $\mathfrak{M}_n$-Räumen gilt aber die Forderung 1 nur in einem System (x^i, v^i).

Definition 2. Die allgemeine zweite kovariante Ableitung ${}_{(2)}\nabla_k$ eines erweiterten kontra- bzw. kovarianten Vektors X^i bzw. Y_i ist ein Pseudotensor mit dem Transformationsgesetz

(3.1a) ${}_{(2)}\nabla_k \hat{X}^i = \hat{p}^i_r \hat{q}^r_s q^t_{k\,(2)}\nabla_t X^s$ bzw. (3.1b) ${}_{(2)}\nabla_k \hat{Y}_i = q^s_i p^t_i q^r_{k\,(2)}\nabla_r Y_s$

und ${}_{(2)}\nabla_k X^i$ bzw. ${}_{(2)}\nabla_k Y_i$ ist eine Funktion des Vektors selbst, die partiellen Ableitungen des Vektors und eines Hilfsobjekts $L^{*j}_{l\ k}$ mit dem Transformationsgesetz (1.6*).

Jetzt gehen wir zur Bestimmung der Form der zweiten kovarianten Ableitung über. Es gilt der folgende

Satz 3. *Die zweite kovariante Ableitung eines erweiterten kontravarianten Vektors X^i ist bis auf einen skalaren Faktor mit $\nabla_k X^i$ identisch.*

Beweis. Die zweite kovariante Ableitung von X^i ist nach der Definition 2 von der Form

$$ {}_{(2)}\nabla_k X^i = F^i_k \left(X^j, \frac{\partial X^j}{\partial x^l}, \frac{\partial X^j}{\partial v^l}, L^{*j}_{l\ m} \right), $$

wo F^i_k noch der Gleichung (3.1a) genügt. Setzen wir in (3.1a) $\hat{p}^i_r = \delta^i_r$, so bekommen wir den Fall des Linienelementraumes zurück, und nach Satz 3 von [2] (vgl. [2], Seite 49) folgt nach unserer Schreibweise

$$ {}_{(2)}\nabla_k X^i_k = F^i_k \left(\nabla_l X^j, \frac{\partial X^j}{\partial v^l} \right), $$

d.h. die zweite kovariante Ableitung ist eine Funktion von $\nabla_l X^j$ und $\partial_{v^l} X^j$. Im $\mathfrak{M}_n$-Raum muß aber (3.1a) erfüllt sein, und das gibt für F^i_k das Funktionalgleichungssystem

$$ (3.2) \qquad F^i_k \left(\hat{p}^j_a \hat{q}^a_b q^c_l \nabla_c X^b,\ \hat{p}^j_a \hat{q}^a_r p^b_l q^s_b \frac{\partial X^r}{\partial v^s} + \hat{p}^j_{ab} p^b_l \hat{q}^a_c X^c \right) = \hat{p}^i_r \hat{q}^r_s q^t_k F^s_t \left(\nabla_l X^j, \frac{\partial X^j}{\partial v^l} \right). $$

[1]) Diese Voraussetzung wird im Satz 3 [2] ausgenützt.

Wählen wir jetzt $\hat{p}^j_{ab}$ so, daß

$$\hat{p}^j_{ab} X^a = -\frac{\partial X^j}{\partial v^b}, \quad \text{ferner} \quad \hat{p}^j_a = \hat{q}^j_a = p^j_a = q^j_a = \delta^j_a,$$

so folgt aus (3. 2):

$$F^i_k\left(\nabla_l X^j, \frac{\partial X^j}{\partial v^l}\right) = F^i_k(\nabla_l X^j, 0).$$

${}_{(2)}\nabla_k X^i$ ist also nur von $\nabla_k X^i$ abhängig:

(3. 3) $${}_{(2)}\nabla_k X^i = f^i_k(\nabla_l X^j), \quad f^i_k(\nabla_l X^j) \stackrel{\text{def}}{=} F^i_k(\nabla_l X^j, 0).$$

Das Funktionalgleichungssystem (3. 2) geht somit in

(3. 4) $$f^i_k(\hat{p}^j_a \hat{q}^a_b q^c_l \nabla_c X^b) = \hat{p}^i_r \hat{q}^r_s q^t_k f^s_t(\nabla_l X^j)$$

über. Wählen wir jetzt:

$$\hat{q}^r_s = \delta^r_s, \quad q^r_s = \delta^r_s,$$

so folgt aus (3. 4)

(3. 5) $$f^i_k(\hat{p}^j_b \nabla_l X^b) = \hat{p}^i_r f^r_k(\nabla_l X^j).$$

Wenn wir jetzt $\nabla_l X^j$ fix halten, während $\hat{p}^j_m$ veränderlich ist, z.B. $\nabla_l X^j = \delta^j_l$, so folgt aus (3. 5):

(3. 6) $$f^i_k(\hat{p}^j_l) = \hat{p}^i_r a^r_k, \quad a^r_k \stackrel{\text{def}}{=} f^r_k(\delta^j_l) = konst.$$

f^i_k ist also eine homogen-lineare Funktion. Aus (3. 4) wird nach (3. 6), wo die Veränderlichen jetzt die $\hat{p}^i_r$ sind:

$$a^r_k \hat{p}^i_s \hat{q}^s_t q^m_r \nabla_m X^t = \hat{p}^i_r \hat{q}^r_s q^t_k a^m_t \nabla_m X^s.$$

Für $\hat{p}^i_h = \delta^i_h$ und nach einer Kontraktion mit q^j_i wird nach den Formeln (1. 3):

$$q^m_r(a^r_k \nabla_m X^j - \delta^r_k a^s_m \nabla_s X^j) \equiv 0.$$

Das gilt aber dann nur dann für jedes zulässige q^m_r [det $q^m_r \neq 0$], falls

$$a^r_k \nabla_m X^j = \delta^r_k a^s_m \nabla_s X^j$$

besteht. Eine Verjüngung bezüglich r und k gibt unmittelbar

(3. 7) $$\nabla_m X^j = \text{Skalar } a^s_m \nabla_s X^j.$$

Im allgemeinen ist aber

$$\text{Det}(\nabla_s X^j) \neq 0,$$

somit existiert die Lösung des Gleichungssystems

$$(\nabla_k X^j)\Phi^l_j = \delta^l_k.$$

Aus (3. 7) folgt dann nach einer Überschiebung mit Φ^l_j, daß a^s_m bis auf einen Skalaren Faktor eben δ^s_m ist. Es folgt aber daraus auf Grund von (3. 6) und (3. 3):

$$_{(2)}\nabla_k X^i = \text{Skalar } \nabla_k X^i,$$

w.z.b.w.

Bemerkung. Der Skalar in (3. 7) braucht nicht eine Konstante zu sein, da bei der Herleitung von (3. 6) im allgemeinen kann $\nabla_l X^i_{\|}$ einen festen, aber von (x^i, v^i) abhängigen Wert haben.

Die Form der zweiten kovarianten Ableitung der erweiterten kovarianten Vektoren mit dem Transformationsgesetz (1. 2b) ist durch den folgenden Satz festgelegt:

Satz 4. *Die zweite kovariante Ableitung eines erweiterten kovarianten Vektors Y_i ist eine Funktion von Y_i selbst, ferner ist sie von $\nabla_k Y_i$ und $\partial_{v[j} Y_{i]}$ abhängig.*

Beweis. Nehmen wir in den Grundtransformationen (1. 1) $\hat{v}^i = \bar{v}^i$, so reduziert sich unser Raum auf einen gewöhnlichen Linienelementraum. Nach Satz 4 von [2] ist dann die zweite kovariante Ableitung von Y_i, $\nabla_k Y_i$ und $\partial_{\dot{v}^k} Y_i$ abhängig. — Im Satz 4 von [2] ist noch die explizite Abhängigkeit von v^i ausgedrückt; wir haben aber in unseren jetzigen Definitionen 1 und 2 die explizite Abhängigkeit von v^i nicht betont, da v^i schießlich Grundelement ist. — Beachten wir noch, daß

$$\partial_v Y_i \equiv \partial_{v(k} Y_{i)} + \partial_{v[k} Y_{i]},$$

so können wir annehmen, daß die zweite kovariante Ableitung von Y_i die Form

$$_{(2)}\nabla_k Y_i = F_{ik}(Y_j, \nabla_l Y_j, \partial_{v(j} Y_{l)}, \partial_{v[j} Y_{l]}) \tag{3. 8}$$

hat.

In der Formel (3. 8) sind Y_j, $\nabla_l Y_j$ und $\partial_{v[j} Y_{l]}$ der Reihe nach erweiterter Vektor, Pseudotensor und erweiterter rein kovarianter Tensor, wie das aus (1. 5b) und (1. 6*) leicht bewiesen werden kann. Hingegen hat $\partial_{v(k} Y_{l)}$ die Transformationsformel:

$$\partial_{v(l} \hat{Y}_{j)} = q^s_t p^t_j q^r_m p^m_l \partial_{v(r} Y_{s)} + q^s_t p^t_{jl} Y_s. \tag{3. 9}$$

Setzen wir nun $_{(2)}\nabla_k Y_i$ aus (3. 8) in (3. 1b) ein, so bekommt man für F_{ik} ein Funktionalgleichungssystem. Wählt man jetzt:

$$q^s_t = p^s_t = \delta^s_t, \quad p^s_{jl} Y_s = -\partial_{v(j} Y_{l)},$$

so erhält man:

$$F_{ik}(Y_j, \nabla_l Y_j, \partial_{v(j} Y_{l)}, \partial_{v[j} Y_{l]}) = F_{ik}(Y_j, \nabla_l Y_j, 0, \partial_{v[j} Y_{l]}).$$

Nach (3. 8) drückt das eben den Satz 4 aus.

Weitere Elimination der im Satz 4 angegebenen Größen aus der Formel der allgemeinen zweiten kovarianten Ableitung der erweiterten kovarianten Vektoren ist nicht möglich, wie das aus dem folgenden Beispiel folgt: Es sei $H^{rt}_{\cdot\cdot}$ die Lösung des Gleichungssystems

$$\partial_{v[s}Y_{r]}H^{rt}_{\cdot} = \delta^t_s.$$

Offenbar ist H^{rt} ein allgemeiner schiefsymmetrischer Tensor zweiter Stufe mit dem Transformationsformel:

$$\hat{H}^{rt} = \hat{p}^r_a \hat{q}^a_s \hat{p}^t_b \hat{q}^b_m H^{sm}.$$

Es ist nun

$$_{(2)}\nabla_k Y_i = \nabla_k Y_t H^{ts} Y_s Y_i$$

eine entsprechende Formel für $_{(2)}\nabla_k Y_i$, die der Gleichung (3. 1b) genügt.

§ 4. Schlußbemerkungen

Unsere Sätze 1—4 drücken aus, daß die erste und zweite kovariante Ableitungen aus gewissen fundamentalen Größen gebildet sind. Diese fundamentalen Größen sind die fundamentalen kovarianten Ableitungen $\overset{*}{\nabla}_k$ und ∇_k ferner $\partial_{v[j} Y_{i]}$. Selbstverständlich sind die allgemeinen kovarianten Ableitungen $_{(1)}\nabla_k$ und $_{(2)}\nabla_k$ nicht beliebige Funktionen der genannten Größen, sondern sie müssen den Relationen (2. 1), (2. 4), (3. 1a) und (3. 1b) genügen.

Wenn wir in den Grundtransformationen (1. 1) für $\hat{v}^i(\bar{v})$ nur in $\bar{v}^j$ lineare Funktionen zulassen, dann ist nach (1. 2) $M_j{}^i{}_k$ ein erweiterter Tensor und nach (1. 2) ist ∂_{v^k} eine tensorielle Operation. Statt $\overset{*}{\nabla}_k$ kann jetzt ∂_{v^k} als fundamentale erste kovariante Ableitung genommen werden und falls $M_j{}^i{}_k \neq 0$ ist, können sehr verschiedenartige Funktionen für $_{(1)}\nabla_k X^i$ bestimmt werden. Z.B.:

$$_{(1)}\nabla_k X^i = \frac{\partial X^i}{\partial v^r} M_s{}^r{}_k X^s.$$

Ist $M_j{}^i{}_k \equiv 0$, so übernimmt $\partial_{v^k} X^i$ die Rolle von $\overset{*}{\nabla}_k X^i$.

Die kovariante Ableitung $_{(1)}\nabla_k$ ist sehr ähnlich zur allgemeinen kovarianten Ableitung in den Punkträumen, wie das durch die Vergleichung der Sätze 1 und 2 mit den Sätzen 3 und 4 der Arbeit [4] unmittelbar verifiziert werden kann. Die zweite kovariante Ableitung zeigt hingegen wesentliche Unterschiede im Vergleich zu der kovarianten Ableitung der gewöhnlichen Linienelementräume. Das kommt besonders im Satz 3 zum Ausdruck, wenn wir diesen Satz mit dem Satz 3 von [2] vergleichen. Besonders in diesem Satz zeigt sich die einschränkende Wirkung der allgemeinen Transformationen (1. 1).

Zuletzt wollen wir noch darauf hinweisen, daß die Symmetrie von $M_j{}^i{}_k$ in j, k nicht eine wesentliche Bedingung ist. Hätten wir diese Bedingung nicht gestellt, so hätten wir etwas allgemeinere Type für die erste kovariante Ableitung bekommen.

Literatur

[1] J. Aczél und S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte* (Warszawa, 1960).

[2] A. Moór, Untersuchungen über die kovariante Ableitung in Linienelementräumen, *Publ. Math. Debrecen*, 7 (1960), 41—53.

[3] A. Moór, Übertragungstheorie bezüglich der allgemeinen Linienelementtransformationen, *Publ. Math. Debrecen*, **13** (1966), 263—287.

[4] A. Moór, Über die kovariante Ableitung der Vektoren, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 237—246.

(Eingegangen am 5. September 1967)