Bibliographie

N. I. Achieser—I. M. Glasmann, Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum (Mathematische Lehrbücher und Monographien, I. Abteilung. Mathematische Lehrbücher, Bd. 4), vierte, unveränderte Auflage, XIV+369 Seiten, Berlin, Akademie-Verlag, 1965.

This book, the German translation of the Russian original (1950), contains a complete presentation of the classical theory of self-adjoint operators in Hilbert space, and a summary of progress (prior to 1950) achieved in this field by Soviet mathematicians.

There are seven chapters and two appendices.

The first four chapters show no essential methodical difference from the corresponding parts of other well-known books in functional analysis. They give a survey of standard definitions and theorems in the theory of Hilbert space (geometry of Hilbert space, linear functionals and operators, special operators: projections, isometric and unitary operators, the notion of the spectrum and resolvent).

Chapter V deals with the elementary form of the spectral theory of completely continuous operators. The spectral theorem, stated in terms of reduction to diagonal form, is proved for a normal completely continuous operator by elementary means.

Chapter VI contains the spectral analysis of self-adjoint and unitary operators (the spectral theorem for normal operators is not mentioned). The chapter begins with a discussion of the moment problems, including BOCHNER's theorem on positive definite functions. The spectral theorem for unitary operators is proved by one of these moment theorems. STONE's theorem on integral representation for groups of unitary operators is proved by BOCHNER's theorem. For the spectral theorem of self-adjoint operators two proofs are given; the first of them uses the integral representation for the resolvent operators of a self-adjoint operator, while the second one is based on the spectral theorem for unitary operators and on Cayley transform. Other topics treated are: operators with simple spectrum; spectral types; functions of a self-adjoint operator; spectral resolution of the Schrödinger operators.

Chapter VII contains the theories of J. VON NEUMANN and M. G. KREIN on the extension of symmetric operators.

Appendix 1 deals with self-adjoint extensions of symmetric operators in a larger Hilbert space. The main result is that any symmetric operator in a Hilbert space H can be extended to a self-adjoint operator defined on a Hilbert space K, which is usually larger than H. This theorem is used to define a generalized resolvent of a symmetric operator, and an integral representation for this resolvent is obtained with respect to a generalized resolution of the identity.

Appendix 2 contains a detailed description of the foregoing theory as applied to ordinary linear differential operators of the n-th order.

L. Gehér (Szeged)

Н. И. Ахиезер — И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве [N. I. Achieser — I. M. Glasmann, Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum], Zweite, umgearbeitete und ergänzte Ausgabe, 544 Seiten, Verlag „Nauka", Moskau, 1966.

Das in seiner ersten Ausgabe 1950 erschienene und seitdem auch in fremdsprachigen Übersetzungen verbreitete, ausgezeichnete Lehrbuch der Verf. wurde in dieser neuen Ausgabe wesentlich umgearbeitet und ergänzt.

Die wesentlichsten Veränderungen sind die folgenden: Das Kapitel über vollstetige Operatoren betrachtet jetzt auch die Theorie von F. RIESZ über diese Operatoren, den Satz über die Existenz nichttrivialer invarianter Unterärume für vollstetige Operatoren, sowie Ausführugen über nukleare Operatoren. Ein ganz neues Kapitel wurde den Störungsproblemen selbstadjungierter Operatoren gewidmet, insbesondere betrachtet man hier die Sätze von M. ROSENBLUM und T. KATO über die Invarianz (bis auf unitäre Äquivalenz) des absolut stetigen Teiles eines selbstadjungierten Operators bei Störung durch einen nuklearen Operator. Ein neuer umfangreicher Anhang wird den Integraloperatoren gewidmet (Theorien von CARLEMAN und VON NEUMANN). Auch in den anderen Kapiteln findet man manches neue Material, entsprechend der Weiterentwicklung der Theorie seit der ersten Ausgabe. Natürlich wollten (und konnten) die Verf. nicht *alles* einarbeiten, was man heute über Hilbertraumoperatoren weiß, dazu wäre ein einziges Lehrbuch viel zu wenig.

Doch haben die Verf. erreicht, ihr Buch noch lehrreicher zu gestalten. Gewiß wird es vielen Erfolg bei den Lesern haben.

B. Sz.-Nagy (Szeged)

Ralph P. Boas, Jr., Integrability theorems for trigonometric transforms (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 38), VIII+65 pages, Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1967.

This monograph offers a survey of the present stage of a special but important collection of problems concerning trigonometric series about which a sizeable literature has grown up in recent years.

The typical problems of this subject are raised as follows. Suppose that a periodic function $f(x)$ is associated with a trigonometric cosine series $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ (e. g. $f(x)$ is integrable in some sense and a_n are its Fourier coefficients). We ask two questions: a) if $\varphi(x)$ is a given function, and $f(x)$ belongs to a specified class of functions, what hypotheses on $\{a_n\}$ are equivalent to the fact that $f(x)\varphi(x)$ belongs to a certain class of functions (e. g. $f(x)\varphi(x) \in L^p(0, \pi)$); b) if $\{\alpha_n\}$ is a given sequence of numbers, and $\{a_n\}$ belongs to a given class of sequences, what conditions on $f(x)$ are necessary and sufficient in order that $\{\alpha_n a_n\}$ should belong to a certain class of sequences (e. g. $\{\alpha_n a_n\} \in l^p$). Similar questions cas be asked about sine series as well.

The author has not aimed at encyclopedic completeness; he presents only the more general and more characteristic theorems from the large number of results. Good arrangement helps the reader to get a picture on the material of the book.

This monograph was written at the suggestion of BÉLA SZ.-NAGY whose paper, "Séries et intégrales de Fourier des fonctions monotones non bornées", published in these *Acta*, **13** (1949), inspired the greater part of the material that is presented in this book. Correspondingly, one considers in particular the cases $\varphi(x) = x^{-\gamma}$ and $\alpha_n = n^{-\gamma}$.

§ 3 and § 4 treat the case $0<\gamma<1, p=1$, provided that the functions $f(x)$ and the coefficients a_n are positive or decreasing, respectively. In § 5 we can find a more detailed analysis of the cases $\gamma=0$ and $\gamma=1$, § 6 is devoted to L^p problems, $1<p<\infty$, and § 7 deals with the case $p=\infty$. In § 8 a number of various generalizations is considered, e.g. the author uses a more general class of multipliers instead of $x^{-\gamma}$ and $n^{-\gamma}$, or, e.g., he shows that conditional convergence of the series $\Sigma a_n \alpha_n$ or of the integral $f(x)\varphi(x)dx$ implies conditional convergence of the other. § 9 touches the question of trigonometric integrals, selecting a few theorems particularly relevant to the theme of the monograph.

The theorems in the book — apart from § 9 — are proved in a detailed, concise form; thus the reader receives an overall picture of the methods of proof. To show the sharpness of some theorems, the author presents striking examples. The author mentions a number of unsolved problems which will certainly inspire further research. Some unpublished recent results, communicated to the author, are also included. A comprehensive bibliography gives a survey of the former literature on the subject.

K. Tandori—F. Móricz (Szeged)

N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Fascicule XV, **Espaces vectoriels topologiques,** Chapitres 1 et 2: **Espaces vectoriels topologiques sur un corps valué, Ensembles convexes et espaces localement convexes,** deuxième édition revue et corrigée, VI+178 pages, Paris, Hermann, 1966.

The first edition appeared in 1953.

This book contains the first two chapters of an exposition of the theory of linear topological spaces. One difference between the first and second editions is that a paragraph on weak duality, which was contained in chapter 4 of the first edition, was included now into chapter 2. A more essential difference is that a more detailed development is given for the notions of the inductive limit for locally compact convex topologies and of the extremal generators of convex cones.

The book is a careful, extremely well-organized account of the foundations of the subject, covering essentially all the elementary topological and geometric prerequisites for the duality theory. The exposition is very well documented with examples and problems.

The first chapter treats linear topological spaces over a valued field and gives, in the usual way, the notion of topology, continuity and equicontinuity, and uniform structure. Product spaces, subspaces, and complementary subspaces are discussed briefly. The open mapping theorem and the closed graph theorem are proved for metrisable complete spaces over a valued field.

Chapter 2 is devoted to convex sets and to the elementary theory of locally convex spaces. The scalar field is supposed to be the reals, except in the last section where the scalars are supposed to be the complex numbers. The chapter begins with the study of topologies defined by semi-norms. After geometric preliminaries, the connection between cones and partial orders is studied. Two sections deal with the different forms (analytic and geometric) of the Hahn—Banach theorem; they are proved under the most general conditions (the classical form of the Hahn—Banach theorem is given as an example). In connection with the geometric form of the Hahn—Banach theorem, separation theorems are proved. Theorems concerning inductive limits of sequences of locally convex spaces, extremal generators of convex cones and weak topologies are also given. KREIN—MILMAN's theorem on the existence of extreme points for convex sets is proved, too. Finally a number of results are extended to complex spaces. In an appendix, the Markov—Kakutani fixed point theorem for a commuting family of affine maps on convex compact subsets of a linear topological space is proved, and, as an application, the existence of Haar measure on a compact Abelian group is derived.

L. Gehér (Szeged)

Hans Grauert und Ingo Lieb, Differential- und Integralrechnung. I (Heidelberger Taschen bücher, Band 26) X+200 Seiten, Berlin—Heidelberg—New York, Springer Verlag, 1967.

Dies Buch ist der erste Teil einer dreibändigen Darstellung der Differential- und Integralrechnung; in den folgenden Bänden werden Funktionen mehrerer Veränderlichen, gewöhnliche Differentialgleichungen und Integrationstheorie behandelt.

Die einzelnen Kapiteln sind der Reihe nach: Die reellen Zahlen, Mengen und Folgen, Unendliche Reihen, Funktionen, Differentiation, Spezielle Funktionen und Taylorscher Satz, Integration.

In dem ersten, auch vom didaktischen Standpunkt aus gut geschriebenen Kapitel werden die Axiome des reellen Zahlkörpers mit ihren einfachsten Folgerungen, die Grundbegriffe der Zahlenmengen und die logischen Gesetze besprochen.

Der weitere Aufbau der Theorie zeigt gewisse Besonderheiten. Die Konvergenz einer Reihe wird z. B. damit definiert, daß der limes superior und der limes inferior der Folge gleich sind. Statt Stetigkeit wird zuerst die Halbstetigkeit von Funktionen definiert; die Differenzierbarkeit wird als totale Differenzierbarkeit eingeführt. Die speziellen Funktionen (Exponentialfunktion, Logarithmus, trigonometrische Funktionen) werden durch Potenzreihen eingeführt. Das Buch gibt einen elementaren Aufbau des Lebesgueschen Integralbegriffes mit Hilfe von Treppenfunktionen; bei diesem Aufbau spielen die halbstetigen Funktionen eine wichtige Rolle. Diese Definition des Integrals kann man direkt auf Funktionen mit Werten in lokalkonvexen Vektorräumen übertragen. Die tieferen Sätze der Lebesgueschen Theorie werden in diesem Band noch nicht behandelt; die wichtigsten Sätze über das Riemansche Integral sind aber bewiesen. Fragen der Interpolationstheorie und der numerischen Integration werden ausführlich diskutiert.

Alle Beweise sind bis in die Einzelheiten hinein ausgeführt. Im Text gibt es aber nur wenige Beispiele, und wegen ihrer Besonderheiten ist die Betrachtungsweise nicht als einfach zu bezeichnen. Das interessant aufgebaute Buch ist also für eine erste Einführung weniger geeignet.

K. Tandori (Szeged)

Paul R. Halmos, A Hilbert space problem book, XVII+365 pages, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton—Toronto—London, 1967.

Until about twenty years ago it seemed that the theory of Hilbert space operators is essentially confined to *normal* (in particular selfadjoint and unitary) operators or to selfadjoint operator algebras. For the study of *non-normal* operators the inner product structure of Hilbert space seemed to be of little effect, so that, for these operators, one did not hope to obtain much more information in the Hilbert space than in the general Banach space situation.

This view had to be revised later in many respects. More and more special results were obtained which hold on Hilbert space operators without holding for operators in general Banach spaces. One of the first and most striking of these results was that of J. von Neumann (1950) asserting that, for any (linear bounded) operator T in Hilbert space, and for any polynomial p, the norm of the opeartor $p(T)$ is bounded from above by the maximum of the function $|p(\lambda)|$ on the disc $|\lambda|\leqq\|T\|$. One has discovered interesting properties of a particular non-normal operator in Hilbert space, the "unilateral shift", simple or multiple; one has solved for it the invariant subspace problem by essential use of the theory of Hardy class analytic functions in the unit disc (Beurling, Lax, Halmos). New ways were devised to relate non-normal operators to normal ones, in particular the *dilation* of the operator (Naĭmark, Halmos, Sz.-Nagy, etc.). New classes of operators in Hilbert space were studied, which share some properties with the normal operators (*subnormal, hyponormal* operators, etc.). The *numerical range* $W(T)=\{(Th, h):\|h\|=1\}$ of operators was extensively studied. The problem of determining the commutators of Hilbert space operators, raised by the commutation relations of quantum mechanics, was solved. An operator valued analytic function $\Theta_T(\lambda)$ has been attached to operators T, in particular to contractions $T(\|T\|\leqq 1)$; by this "characteristic function" (rather than by the classical resolvent function) it was possible to obtain functional models for these operators, study their invariant subspaces, etc.

This sample taken from the variety of directions in which research work has been done recently concerning Hilbert space operators might suffice to show that we have to do already with a many-faced new theory.

The present "problem book" of Professor Halmos gives an excellent introduction to a large part of this new theory, to which he and the group of his collaborators have contributed many basic results. The first part of the book ("Problems") lists 199 problems, each introduced in a very instructive manner by an outline of the pertinent chapter of the theory. There follows a part ("Hints") where some short indications are given how to try to find a solution, pointing to what the author regards as the heart of the matter. The last and largest part of the book are the "Solutions", with many interesting further remarks and comments added.

This structure of the book appeals to the reader who is willing to learn in the active way thus achieving more lasting result and ability to further work on the subject. But also the reader whose concern is only to get a short, but authentic orientation on these topics, will find this structure of the book of advantage: reading the "Problems" and occasionally having a glimpse into the "Solutions", he is given a masterly presentation of a large part of recent development in the theory of Hilbert space operators.

The "Problems" — and accordingly the two other parts — are grouped into 20 chapters. Here are the titles (with some samples from the contents): 1. *Vectors and Spaces.* (If $\{e_n\}$ is an orthonormal basis for a Hilbert space H and if $\{f_n\}$ is an orthonormal set in H such that $\Sigma\|e_n-f_n\|^2<\infty$, then $\{f_n\}$ is also a basis for H.) — 2. *Weak topology.* (The closed unit ball in Hilbert space is compact with respect to weak topology. The weak topology of an infinite dimensional Hilbert space is not metrizable.) — 3. *Analytic functions.* (Analytic Hilbert spaces; Hardy classes; kernel functions, etc.) — 4. *Infinite matrices.* (Schur test; Hilbert matrix.) — 5. *Boundedness and invertibility.* (Very simple proofs are given for the uniform boundedness and the closed graph theorems.) — 6. *Multiplication operators.* (Diagonal operators; multipliers of functional Hilbert spaces.) — 7. *Operator matrices.* (If C and D commute, and if D is invertible, then $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ is invertible iff $AD-BC$ is invertible.) — 8. *Properties of spectra.* (The boundary of the spectrum is included in the approximate point spectrum.) — 9. *Examples of spectra.* (Point spectrum, approximate point spectrum, and compression spectrum of diagonal operators, of multiplication operators, and of shifts.) — 10. *Spectral radius.* (In particular for "weighted shifts".) — 11. *Norm topology.* (The spectral radius $r(A)$ is a discontinuous function of A in the norm tolpogy.) — 12. *Strong and weak topologies* (for operators. Multiplication is discontinuous in the strong and weak topologies of operators. Is a bounded increasing sequence of Hermitian operators necessarily strongly convergent? uniformly convergent?) — 13. *Partial isometries.* (Existence, for every contraction A in H, of a dilation to a partial isometry $M(A)$ in $H \oplus H$, such that if A, A' are unitarily equivalent then so are $M(A)$, $M(A')$; if A and A' are invertible, then the converse also holds.) — 14. *Unilateral shift.* (Does it have a square root? Commutants of shifts. Every contraction A such that $A^n \to O$ strongly, is unitarily equivalent to a part of the adjoint of a unilateral shift. Invariant subspaces of a simple unilateral shift. If U is a unilateral shift of countable multiplicity then U has a cyclic vector.) — 15. *Compact operators.* (If C is compact and if $Ch=h$ implies $h=0$, then $I-C$ is invertible. Volterra operators are quasi-nilpotent.) — 16. *Subnormal operators.* (Is a contraction similar to a unitary operator necessarily unitary?) — 17. *Numerical range.* (Convexity. Questions concerning closure. The inequality $w(A^n) \leqq w(A)^n$ for the numerical radius.) — 18. *Unitary dilations.* (Every contraction has a unitary power dilation.) — 19. *Commutators of operators* (i. e. operators of the form $PQ-QP$ where P, Q are operators. If an operator A on a separable Hilbert space is not a scalar, then $A \oplus A \oplus \ldots$ is a commutator.) — 20. *Toeplitz operators* (i. e. operators on the Hardy space H^2, of the form $T_\varphi f = P(\varphi f)$ where φ is a bounded measurable function and P is the orthogonal projection from L^2 onto H^2. The only compact T_φ is O. The spectrum of T_φ if φ is real-valued.)

Thus the topics dealt with range from fairly text-book material to the boundary of what is known. As it should be, the choice of the problems reflects to some extent the interests of the author ("every problem in the book puzzled me once") and this lends an intriguing personal flavor to the book.

In any respect, this new book by Professor HALMOS is a very valuable and useful contribution to the literature on functional analysis, and certainly will be welcomed by a large circle of readers.

Béla Sz.-Nagy (Szeged)

Béla Kerékjártó, Les fondements de la géométrie, Tome deux, **Géométrie projective,** 528 pages, 168 figures, Budapest, Akadémiai Kiadó, et Paris, Gauthier-Villars, 1966.

Cet ouvrage est une traduction de l'édition parue en langue hongroise en 1944 (A geometria alapjairól, Második kötet, Projektív geometria). Le texte était revisé par le rédacteur de cette édition, G. HAJÓS et par l'auteur de ce compte rendu; de plus, il était complété par quelques remarques du rédacteur. Ici nous ne voulons pas nous occuper du sommaire du livre (cf. *Acta Sci. Math.*, **11** (1946/48), 254), mais nous devons souligner que, jusqu'aujourd'hui, cet ouvrage donne le développement le plus complet de la géométrie projective. Ainsi, outre des théorèmes classiques, on y trouve un large exposé de la théorie des groupes de transformations projectives, l'introduction de la measure projective dans les géométries non-euclidiennes et l'examen critique des divers systèmes d'axiomes de la géométrie projective. C'est pourquoi le livre de KERÉKJÁRTÓ sera très profitable pour tous ceux qui veulent étudier ce discipline mathématique d'une façon approfondie.

G. Szász (Nyíregyháza)

E. Hewitt and K. Stromberg, Real and Abstract Analysis, VIII+476 pages, Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1965.

Measure and integration theory has been restricted to R^n for a long time. However, in the frame of the development of mathematics as a whole this theory also arrived at higher levels of abstraction. DANIELL's work concerning integration on an arbitrary abstract space is already classical. The abstract forms of measure and integration theory have proved to be very useful also for several other branches of modern mathematics. Thus, it is no wonder that many monographs and textbooks have been devoted to the subject. The book under review is one of the most sympathetic books written in this field.

The authors' standpoint is that modern analysis draws on at least five disciplines. First, in dealing with measure theory, and even in studying the structure of real numbers, one must often use powerful machinery from the abstract theory of sets. Second, algebraic ideas and techniques prove to be sometimes essential in studying problems in analysis. Third, set-theoretic topology is an important tool in constructing and studying measures. Fourth, the method of functional analysis can often be used with much success to obtain fundamental results in analysis with relatively little effort. Fifth, analysis really is *analysis*. Handling inequalities, computing with actual functions, and obtaining actual numbers, is indispensable for the training of every mathematician. The spirit in which the book has been written was certainly suggested by this conception. In fact, though measures and integrals constitute the primary objects of study, all five of these subjects find a place in the book, each of them developed just to the extent which assures the book to be self-contained as much as possible. Another virtue of the book is that the authors always point out that the abstract forms of measure and integration theory came into being as a very generalization of that on R^n. Thus they do not let the reader get lost in the jungle of abstract concepts and acquire only a formal knowledge of the subject.

The book consists of six chapters.

Chapter 1: Set theory and algebra. It begins with elementary facts on sets and functions. Then there are sections discussing the axiom of choice and its equivalents, cardinals, ordinals, transfinite induction.

Chapter 2: Topology and continuous functions. It begins with a self-contained treatment of those parts of set-theoretic topology that have proved important for analysis. There follows a study of continuous functions, and functions closely related to the continuous ones. In this study, the methods of Banach algebras evidently play a role, thus Banach algebras are also defined and illustrated. A detailed and careful treatment is given of various versions of the Stone-Weierstrass theorem.

Chapter 3: The Lebesgue integral. After a rapid discussion of the Riemann and Riemann—Stieltjes integral, the authors proceed as follows. They start with a positive linear functional I defined on continuous functions with compact support on a locally compact Hausdorff space X. They extend I to an "upper integral" $\bar{\bar{I}}$ and define outer measure ι by means of $\bar{\bar{I}}$ à la BOURBAKI. Measurable sets and functions, and the measures are then defined à la CARATHÉODORY. Now if (X, A, μ) is an arbitrary abstract measure space and f is an arbitrary nonnegative extended real-valued function on X, then the "integral" of f is defined as

$$L_\mu(f) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} \inf\{f(x): x \in A_k\}\, \mu(A_k)\right\}$$

where the supremum is taken over all possible measurable dissections $A_1, \dots, A_n$ of X. In particular. if X is locally compact and the measure space (X, A, ι) derives from the functional I then $L_\iota(f) = I(f)$ for every nonnegative measurable function f on X (a generalized form of the Riesz representation theorem). In this way, a connection between the Daniell and Carathéodory approaches to integration theory is established.

Chapter 4: Function spaces and Banach spaces. One begins with L^p spaces. This leads to a study of abstract Banach spaces, centered around the three basic principles: the principle of uniform boundedness, the interior mapping principle, and the Hahn—Banach theorem. The conjugate of L^p is computed by means of uniform convexity and CLARKSON's inequalities. Then again abstract spaces, in particular Hilbert spaces are studied; the orthogonal expansions discussed in an abstract form lead to non-trivial facts about Fourier series.

Chapter 5: Differentiation. First a brief but reasonably complete treatment of the usual pointwise theory is persente d. The main result proved re is LEBESGUE's theore m that a function of finite variation has a finite derivative almost everywhere. The main tool here is VITALI's covering theorem. Then the conditions under which the classical equality $f(b)-f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$ is valid are explored. This leads to interesting measure-theoretic ideas which have little to do with differentiation but have applications in diverse fields. The main result here is the Lebesgue-Nikodým theorem which is thoroughly examined and several applications of it to problems in absctract analysis, such as integration by substitution, computation of the conjugate of L^1 and L^∞, the Riesz representation theorem, are given.

Chapter 6: Integration on product spaces. First comes a discussion of the Fubini theorem with applications to convolution, Fourier transform and to the proof of the Hardy—Littlewood maximal theorem on the line. The final topic of this chapter is that of infinite products of measure spaces with probabilistic interpretations including the zero-one law and the strong law of large numbers.

A number of excellent exercises is added which cover a very wide range of difficulty; the more difficult ones are provided with hints.

The authors did a very nice job in writing this book. Every analyst, student or researcher, will find in it much of interest and value.

I. Kovács (Szeged)

O. Haupt—H. Künneth, Geometrische Ordnungen (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 133), VIII+429 Seiten, Berlin—Heidelbeg—New York, Springer-Verlag, 1967.

Das Buch ist Problemen der geometrischen Ordnungen gewidmet, d.h. Problemen der folgenden Art: In einem kompakten metrischen Raum G ist ein System $\mathfrak{k}$ von gewissen (voll-) kompakten Teilmengen $K \subset G$, — die sog. Ordnungscharakteristiken — gegeben. Ein Bogen, eine Kurve, allgemein ein Kontinuum $C \subset G$ heißt vom Punktordnungswert m bezüglich $\mathfrak{k}$, wenn C mit jedem $K \in \mathfrak{k}$ maximal m Punkte gemeinsam hat. Man fragt nun nach der „Gestalt" von C bezüglich $\mathfrak{k}$, also nach den ordnungshomogenen Teilkontinuen von C, d.h. nach Teilkontinuen, deren sämtliche Teilkontinuen die gleiche Ordnung haben, sowie nach den ordnungssingulären Punkten von C, d.h. nach Punkten, die nur solche Umgebungen auf C haben, deren Ordnung verschieden von dem der ordnungshomogenen Teilkontinuen ist, und evtl. nach infinitesimalgeometrischen Eigenschaften von C. Daneben ergeben sich auch Fragen hinsichtlich der Komponentenordnungswerte von C, worunter die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $C \cap K$ zu verstehen ist. Ist weiterhin m die kleinste unter den ganzen Zahlen $m' \geqq 0$, für welche die Menge der $K \in \mathfrak{k}$, die mit C mehr als m' Punkte gemeinsam haben, nirgends dicht in $\mathfrak{k}$ ist, bezüglich der in $\mathfrak{k}$ in üblicher Weise erklärten Metrik, so wird m als der schwache Punktordnungswert von C bezüglich $\mathfrak{k}$ bezeichnet.

Im I. Teil ist der Grundbereich G zumeist eine abgeschlossene Kreisscheibe, evtl. ein topologisches Bild derselben. Die Ordnungscharakteristiken K sind Bögen und Kurven, welche den folgenden Axiomen genügen:

I. Ist K ein Bogen, so hat K mit der Begrenzung G_g von G genau seine beiden Endpunkte gemeinsam. Ist K eine Kurve, so hat K mit G_g höchtens einen Punkt gemeinsam.

II. Es existiert eine natürliche Zahl $k \geqq 1$, die sog. Grundzahl, sodaß durch irgendwelche k verschiedene Punkte x_i $(i=1, \ldots, k)$ einer $K(\in \mathfrak{k})$ und alle zu solchen x_i' hinreichend benachbarten x_i' (wobei $x_i' = x_i$ sein kann) ein $K' \in \mathfrak{k}$ eindeutig bestimmt ist, der sich mit den x_i' stetig ändert.

Dazu kommt in einigen Betrachtungen folgende zusätzliche Voraussetzung hinzu:

Es sei $B \subset G$ ein Bogen und x_i $(i=1, \ldots, k)$ irgend k verschiedene Punkte von B. Ferner gebe es $K_n \in \mathfrak{k}$ $(n=1, 2, \ldots)$ und $x_{ni} \in K_n$ mit $x_i = \lim x_{ni}$ $(i=1, \ldots, k)$. Dann existiert $K \in \mathfrak{k}$ mit $x_i \in K$ $(i=1, \ldots, k)$.

Es werden zunächst im Abschnitt 1 einige Folgerungen aus den obigen Axiomen abgeleitet und dann die allgemeinen Eigenschaften der Kontinuen von höchstens endlichen Komponentenordnungswerten zusammengestellt, sowie für den Fall der Grundzahl $k=1$, alle ordnungshomogenen Kontinuen bestimmt.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen werden im Abschnitt 2 die Änderungen untersucht, welche von den evtl. gemeinsamen Punkten aller Ordnungscharakteristiken verschiedener Punkte einer Ordnungschrakarteristik, die sie mit einem Bogen B gemeinsam hat, erleidet, wenn man k—1 Punkte unter ihnen festhält.

Im Abschnitt 3 werden die früher für Systeme von Ordnungscharakteristiken in der euklidischen Ebene für eine beliebige Grundzahl $k \geqq 2$ dargelegte Methode für den Fall der sog. topologisch projektiven Ebene, d.h. für den Fall der reellen projektiven Ebene (oder eines topologischen Bildes von ihr) als Grundgebiet und für $k=2$, angewendet. Nach Verallgemeinerung gewisser Sätze über konvexe Mengen, wird die Gestalt der Bögen und Kurven vom Punktordnungswert 3 bestimmt, insbesondere bei Bogen die Maximalzahl und bei Kurven die genaue Anzahl der singulären Punkten, und es wird bewiesen, daß sich diese Bögen und Kurven als Vereinigungen einer beschränkten Anzahl von Bogen, die den schwachen Punktordnungswert zwei besitzen ($\mathfrak{k}$-konvexe Bogen) darstellen laßen. Damit ist die Juelsche Theorie der Kurven 3. Ordnung verallgemeinert worden. Dann kommen Bemerkungen über Kurven höherer Ordnung, sowie der Satz über die Existenz ordnungsgomogener Bögen. Zum Schluß wird gezeigt, daß auch die Theorie von J. v. Sz. Nagy über Kurven vom Maximalklassenindex, d.h. üver Kurven, bei denen das Minimum der Anzahl der Tangenten von den Punkten der Ebene an die Kurve um zwei kleiner ist als das Maximum der Anzahl derselben, sowie auch Sätze von Möbius, A. Kneser und Kivikoski gültig bleiben.

Im Abschnitt 4 werden Systeme von Ordnungscharakteristiken mit beliebiger Grundzahl $k \geqq 2$ betrachtet und zunächst die untere und obere Schranken für die Anzahl der singulären Punkte von Bögen und Kurven untersucht. Dann wird die bekannte Eigenschaft der Viertelellipse, daß von je zweien der Schmiegkreise derselben immer einer den anderen umfaßt, auf ein System $\mathfrak{k}$ von Kurven, deren jede durch k ihrer Punkte bestimmt ist, wobei $k \geqq 3$ ungerade ist, und auf einen Bogen, der bezüglich $\mathfrak{k}$ den Punktordnungswert k besitzt, verallgemeinert. (Für gerades $k \geqq 4$ ergibt sich analog eine Verallgemeinerung des Verhaltens der Konvexbogen bzw. ihrer Stützgeraden.) Dann wird eine Kennzeichnung der Kurven von der zyklischen Ordnung vier (die also den Punktordnungswert 4 besitzen bezüglich des Systems der in G liegenden Kreise und Kreisbogen) und ihre Verallgemeinerung angegeben. Endlich wird der Satz von BÖHMER, nach welchem der durch fünf beliebige Punkte eines Ovals bestimmte Kegelschnitt eine Ellipse ist, falls der Schmiegkegelschnitt in jedem Punkte des Ovals eine Ellipse ist, und die damit zusammenhängenden Sätze von MOHRMANN, CARLEMANN und MUKHOPADHYAYA verallgemeinert. Es ergibt sich noch ein 2-Scheitelsatz für (ebene) Jordankurven, sowie die topologische Verallgemeinerung des Kneserschen 4-Scheitelsatzes.

Der II. Teil, der die Abschnitte 5—7 umfaßt, ist Problemen in n-dimensionalen und noch allgemeineren Räumen gewidmet. Im Abschnitt 5 werden die Kontinua höchstens endlichen Ordnungswertes bezüglich der Hyperebenen im n-dimensionalen projektiven Raum P_n behandelt, und dann werden zunächst Parameterbogen und ihre k-dimensionale Schmieg-, insbesondere Tangential- (halb-) ebenen in P_n untersucht. Unter Benutzung dieser Entwicklungen werden die Bogen in P_n vom Punktordnungswert n und n—1 näher untersucht, und die Monotonie der Halbtangenten eines Bogens vom Punktordnungswert n mit stetiger Tangente im E_n bewiesen. Nunmehr werden in projektiven P_n ($n \geqq 2$) einige Eigenschaften der schwach ordnungsminimalen Kontinua, d. h. der Kontinuen $C \subset P_n$, die nicht in einer Hyperebene von P_n liegen, mit schwachem Punktordnungswert n bezüglich des Systems der Hyperebenen von P_n, wie die Besehränktheit der Anzahl ihrer Verzweigungspunkte, sowie ihre Darstellbarkeit als Vereinigung von endlich vielen einfachen Bögen u. s. w., bewiesen. Es werden im euklidischen Raum $E_n (n \geqq 2)$ die Kontinua behandelt, die für keine Hyprebene mehr als $n-1$ zu ihnen parallele Tangenten besitzen, sowie die Bögen vom schwachen Punktordnungswert m. Endlich wird eine Klassifikation der regulären und singulären Punkte eines offenen Bogens in $P_n (n \geqq 2)$ gegeben.

Im Abschnitt 6 werden die t-dimensionalen Kompakta von endlichem Punktordnungswert in E_n behandelt, wobei über einen Satz von G. NÖBELING berichtet wird, der eine Verallgemeinerung des Satzes auf (voll-) kompakte metrische Räume ist, nach welchem alle Kontinua der Ebene, die von höchstens endlichem Punktordnungswert bezüglich eines Systems $\mathfrak{k}$ von Ordnungscharakteristiken mit der Grundzahl $k=1$ sind, sich als abgeschlossene Hülle der Vereinigung von abzählbar vielen Bogen mit Punktordnungswert 1 darstellen lassen, und es werden Bemerkungen zu diesem Satz betreffs der Darstellbarkeit durch Lipschitz-Flächenstücke (d.h. durch t-Flächenstücke von beschränkter Dehnung) hinzugefügt.

Im Abschnitt 7 werden ordnungsgeometrische Probleme in kompakten metrischen Räumen behandelt. Es wird gezeigt, daß einige grundlegende Sätze, die im Abschnitt 1 lediglich für Systeme $\mathfrak{k}$ von Ordnungschrakteristiken in der Ebene bewiesen wurden, unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen gelten.

Wie es sich auch aus dieser kurzen Inhaltsübersicht herausstellt, ist das vorliegende Buch in erster Linie eine weitgehende Verallgemeinerung von früher unter engeren Voraussetzungen bewiesenen klassischen Sätzen, die die toplogische Natur derselben deutlich hervortreten läßt. Um aber einen Überlick über neuere Untersuchungen zu geben, werden im letzten Teil des Buches neben verschiedenen Ergänzungen auch Berichte über Arbeiten u. a. von D. DERRY, F. FABRICIUS-BJERRE, A. MARCHAUD und P. SCHERK gebracht.

Ein reichhaltiges Literaturverzeichnis ergänzt dieses schön ausgestattete, wertvolle Buch.

J. Strommer (Budapest)

Andor Kertész, Vorlesungen über Artinsche Ringe, 282 Seiten, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1968.

Im Studium von beliebigen Gruppen spielen die sogenannten Endlichkeitsbedingungen eine wichtige Rolle, denn die allgemeine Gruppentheorie ist historisch aus der Theorie der endlichen Gruppen ausgewachsen. Eine Endlichkeitsbedingung für eine Gruppe ist eine solche Bedingung, die für jede endliche Gruppe, nicht aber für alle unendlichen Gruppen erfüllt ist. In der Ringtheorie spielen die Algebren endlichen Ranges über einem Körper eine gewissermaßen ähnliche Rolle, wie die endlichen Gruppen in der Gruppentheorie. Weiterhin sind in der Ringtheorie die Minimalbedingungen bzw. Maximalbedingungen für Ideale bzw. Rechtsideale die wichtigsten Endlichkeitsbedingungen, und die Algebren endlichen Ranges über einem Körper genügen diesen beiden Kettenbedingungen. Auf die Bedeutung der Kettenbedingungen in Ringen machte schon EMMY NOETHER aufmerksam. Ein Ring erfüllt bekanntlich dann die Minimalbedingung (bzw. Maximalbedingung) für Rechtsideale, wenn jede echt absteigende (bzw. aufsteigende) Kette von Rechtsidealen des Ringes endlich ist.

Die Artinschen Ringe sind die Ringe mit Minimalbedingung für Rechtsideale. Von EMIL ARTIN stammt nämlich die wichtige Entdeckung, daß die Struktursätze der Algebren endlichen Ranges über einem Körper sich auf die größere Klasse der Ringe mit Minimalbedingung für Rechtsiadeale übertragen lassen.

Abgesehen von einem Kapitel des Buches „The Theory of Rings" von N. JACOBSON (1943), ist die erste monographische Darstellung über Artinsche Ringe das Buch „Rings with minimum condition" von E. ARTIN, C. NESBITT und R. THRALL (1944). Die seitdem verflossenen Jahre haben eine Fülle weiterer Ergebnisse auf diesem Gebiet erbracht, die eine neue monographische Bearbeitung notwendig machten. Obwohl einige diesbezügliche wichtige Resultate in einem Kapitel des Buches „Structure of Rings" von N. JACOBSON (1956) bzw. in einem Kapitel des Buches „Éléments de mathématique, Algèbre" von N. BOURBAKI (1958) betrachtet sind, streben aber diese Kapitel nach keiner vollständigen Darstellung des Stoffes.

Das vorliegende, neue Buch über Artinsche Ringe entstand aus einem gemeinsamen Plane von T. SZELE und A. KERTÉSZ, an dessen Verwirklichung T. SZELE aber wegen seines frühzeitigen Tod (1955) leider nicht mitwirken konnte. Prof. A. KERTÉSZ widmet sein Buch dem Andenken von T. SZELE, und bringt seine Dankbarkeit an seinen Lehrer und Mitarbeiter auch hiermit zum Ausdruck.

Das Buch enthält 10 Kapitel und einen Anhang über diejenigen Aspekten der Theorie der Abelschen Gruppen, die für die Untersuchung der Artinschen Ringe nötig sind. Die Kapitel sind die folgenden:

I. Mengen, Relationen;
II. Der Ringbegriff;
III. Ringkonstruktionen;
IV. Moduln und Algebren;
V. Das Radikal;
VI. Allgemeines über Artinsche Ringe;
VII. Ringe linearer Transformationen;
VIII. Halbeinfache Ringe und vollständig primäre Ringe;
IX. Moduln über halbeinfachen Ringen;
X. Die additive Struktur der Artinschen Ringe.

Das Buch gründet sich auf Vorlesungen, die Verf. 1962/63 an der Universität zu Halle gehalten hat. Dementsprechend verfolgt der Verf. ein zweifaches Ziel: einerseits wünscht er eine Einführung in die allgemeine Ringtheorie zu bieten (wobei im Kapitel V unter dem Radikal stets das Jacobsonsche Radikal verstanden wird), andererseits will er die wichtigsten Resultate der Theorie der Artinschen Ringe darstellen. Dabei strebt Verf. nicht nach Vollständigkeit, jedoch werden einige Arbeiten bezüglich der im Buch nicht betrachteten Theorie der einreihigen Ringe, der Quasi-Frobeniusschen Ringe, der distributiv darstellbaren Ringe, des Basisunterringes, der linear kompakten Ringe, der Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale und bezüglich der im Buch nicht betrachteten Galoisschen Theorie für Artinsche Ringe im Literaturverzeichnis angeführt. Fast zweidrittel Teil des Buches diskutiert Resultate über Mengen, algebraische Strukturen und beliebige (assoziative) Ringe, und umgefähr eindrittel Teil des Textes enthält Ergebnisse über Artinsche Ringe. Hiernach kann dieses vorzügliche, gut lesbare und nützbare Buch auch als ein Einführungsbuch in die Algebra bzw. in die Ringtheorie angesehen werden. Das Buch ist also keine Monographie. Bei der Ausbearbeitung des Stoffes sind einige Resultate ungarischer Algebraiker, insbesondere mehrere Resultate des Verfassers betrachtet.

Im allgemeinen wird ein großes Gewicht auf den streng systematischen Aufbau des Gegenstandes gelegt. Die Definitionen und Sätze sind klar formuliert, die Beweise sind poliert und möglichst kurz ausgeführt. Das Studium des interessanten Buches erfordert keine Vorkenntnisse. Nach jedem Kapitel gibt es zahlreiche Übungsaufgaben; am Ende des Buches sind die Anleitungen zur Lösung der schwierigeren Aufgaben angegeben. Weiterhin enthält das Buch eine Zusammenfassung der ständigen Bezeichnungen, einen Namen- und Sachregister, ein Literaturverzeichnis und es werden sechs offene Probleme formuliert. Aus diesen Problemen hat der Referent inzwischen das Problem 3 vollständig gelöst (vgl. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **18** (1967), 261—272) und gewisse Resultate auch im Zusammenhang mit dem Problem 1 erhalten (vgl. *Acta Sci. Math.*, **28** (1967), 31—37).

F. Szász (Budapest)

G. Pólya, Vom Lösen mathematischer Aufgaben, Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren, Bd. 1—2 (Sammlung „Wissenschaft und Kultur", Bd. 20—21), 315+286 Seiten, Basel—Stuttgart, Birkhäuser Verlag, 1966—67. Ins deutsche übersetzt von Lulu Bechtolsheim.

„Jede Aufgabe, die ich löste, wurde zu einer Regel, die später zur Lösung anderer Aufgaben diente." Dieses Zitat von DESCARTES gibt das wesentliche Ziel des Buches. Das vorliegende Werk ist die Fortsetzung von zwei früheren („Schule des Denkens" und „Mathematik und plausibles Schliessen").

Die in diesem Buch vorgelegten Aufgaben verlangen kaum über das Mittelschulniveau hinausgehende Kenntnisse, aber sie verlangen einen gewissen und zuweilen einen hohen Grad der Konzentration und Einsicht. Die Themen des ersten Teils (Lösungsschemata) sind die folgenden: das Schema zweier, geometrischer Örter, das Descartessche Schema („man reduziere jede Art von Problem auf ein mathematisches Problem, zweitens auf ein algebraisches Problem und drittens man reduziere jedes algebraische Problem auf die Lösung einer einzigen Gleichung"), das Rekursionsverfahren und das Superpositionsverfahren.

Der zweite Teil hat mehr einen theoretischen Charakter. Hier finden wir solche Abschnitte: Aufgaben („was ist eine Aufgabe?"), Geometrische Darstellung des Werdegangs der Lösung, Pläne und Programme, Aufgaben in Aufgaben, Die Geburt der Idee, So sollten wir denken, Lernen lehren und lehren lernen, Erraten und wissenschaftliche Methode. Verf. formuliert die folgenden drei Prinzipien des Lehrens: (1) Man lasse die Schüler selbst so viel wie unter den gegebenen Umständen irgend tunlich ist, entdecken; (2) Das Lehren der Mathematik sei interessant. (3) Wir sollen in aufeinanderfolgenden Phasen lehren.

Die Ausstattung des Buches ist vorzüglich.

J. Berkes (Szeged)

A. I. Markushevich, Series (Fundamental concepts with historical exposition), 175 pages, Delhi, Hindustan Publishing Corporation (India), 1967.

The aim of the book is to acquaint the reader, possessing mathematical background up to an undergraduate level, in an easy and independent manner, with the concept of series, the fundamental properties of series, and the representation of elementary functions by series, without using TAYLOR's formula. It is not intended to serve as a text book, but is suitable to assist the young readers in getting interested in mathematical analysis in its early period. In fact, the book follows the path laid down by NEWTON, LEIBNIZ, EULER, CAUCHY, ABEL, D'ALEMBERT, and contains many historical comments which may be of interest to the adult mathematician readers too.

J. Németh (Szeged)

Raphaël Salem, Oeuvres mathématiques, 645 pages, Paris, Hermann, 1967.

Les travaux de RAPHAËL SALEM ont influencé d'une manière considérable le développement modernedes théories des séries de Fourier et des séries trigonométriques. Son oeuvre comprend, outre ses articles apparus dans divers périodiques, trois livres: „*Essais sur les séries trigonométriques*" (Paris, 1940), „*Algebraic numbers and Fourier series*" (Boston, Mass., 1963), „*Ensembles parfaits et séries trigonométriques*" (avec J. P. KAHANE, Paris, 1963).

Dans ce volume on a reproduit ses articles et son premier livre et cela dans le groupement suivant:

A. théorie générale des séries trigonométriques,
B. séries trigonométriques lacunaires et aléatoires,
C. ensembles parfaits et entiers algébriques,
D. ensembles parfaits et mesures singulières,
E. résultats isolés.

Une préface, par A. ZYGMUND, expose les données biographiques principales et l'activité en directions diverses de R. SALEM. Puis, dans une introduction de 21 pages, J. P. KAHANE et A. ZYGMUND donnent une revue sur ses résultats mathématiques.

Cette collection bien rédigée et de belle présentation contribuera beaucoup de faire connaître toute l'oeuvre de ce savant remarquable que fût le regretté RAPHAËL SALEM.

K. Tandori (Szeged)

Béla Sz.-Nagy—Ciprian Foiaş, Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert, XI+373 pages, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1967.

After the basic general concepts of the dilation theory of operators in Hilbert space have been brought to light there appeared the question how useful the methods of this theory are in the study of the nature of general bounded operators. Most of the attention has been paid to the study of contraction operators by using their unitary dilations. The book presents what has been done up till now in this domain, mostly for a single contraction. The authors develop the method which can be called the Fourier operator analysis. The leading role in the inner contents and applications of this analysis is played by the theory of unitary dilations. It has been much influenced by the abstract prediction theory of weakly stationary stochastic processes on the one hand, and by the theory related to the concept of characteristic functions of operators, originated by Livšic (and enclosing thereby investigations of M. G. Krein's school), on the other hand. The theory of the authors gives an ingenious synthesis and simplification of both theories mentioned above, as well as a huge variety of other results, by presenting the true reasons why they succeed and work on. The point is however that Fourier operator analysis when combined with unitary dilation methods goes considerably further and creates methods which made possible the discovery and the characterization of intrinsic and essentially new geometrical and functional features of quite general contraction operators. Special attention should be paid here to the completely general functional models of contractions (Chapter VI) and the analysis of analytic contraction valued functions (Chapters V and VII), both in separable spaces, which is not an essential restriction. These achievements of the authors stand for an essentially new step forward in the general operator theory and certainly are one of the most powerful and fruitful means we get to work with.

The subtle methods developed by the authors will be certainly used with success in the future for penetrating into new domains of operator theory. One should point out the unified and elegant manner of developing the theory in the book, in contrary to some often observable tendencies of treating modern operator theory in Hilbert space as a collection of separated tricks or artificially arranged computations.

The main part of the book is a unified exposition (with many simplified proofs and new details) of original results of the authors published before in a series of papers in these *Acta* since 1953. The book contains also some entirely new results of the authors not published elsewhere or only announced in a short form. Each chapter is concluded by "Notices" in which there are included detailed references, historical remarks and short comments, and some other problems concerning the contents of the corresponding chapter. The writing of the book is precise and the exposition is clear and careful. The geometrical methods are developed in a nice harmony with the analytical means.

The first four chapters of the book deal with unitary dilations of contraction operators (mostly of a single contraction or of a one-parameter contraction semi-group) and with some of their direct applications. After giving the basic existence results (Chapter I) the authors study the geometry of the dilation space, the basic function theoretic properties of the harmonic-spectral measure of a single contraction and the interplay between the properties of a contraction and its unitary dilation (Chapter II). All this is used to build up a functional calculus for a single contraction: bounded functions are investigated in Chapter III and the unbounded ones in Chapter IV. Several applications are given concerning one-parameter contraction semigroups, fractional powers of dissipative operators and related topics. A nice part of Chapter III is devoted to a detailed study of an interesting class of contractions, called class C_0.

The most important part of the book starts with Chapter V. After giving there some basic definitions and preliminary properties of operator valued analytic bounded functions on the unit disc the authors prove two crucial lemmas about the Fourier representation of contractions which behave in a prescribed way with respect to some shift operators. The rest of Chapter V is devoted to some almost direct applications of these lemmas. Herewith are included the general Beurling invariance theorem, the Szegő type factoring of positive operator valued functions, and the factoring of contraction valued analytic functions. There is introduced a very important class of analytic contraction valued functions, the functions which admit a scalar multiple. All the above includes among others an extremely nice and general exposition of abstract prediction theory not to be found elsewhere in such a compact and elegant form.

Chapters VI and VII form the central part of the book. The first one begins with the description of the characteristic function of a contraction. Then, using the previous theorems the authors construct for an arbitrary (completely non-unitary) contraction its functional model. The true and explicit characterization of this model is performed with the help of the isometric and unitary dilations of the contraction in question. It becomes clear that the use of these dilations is in the essence of the matter. There is discussed in detail the interplay between the given contraction, its functional model and its characteristic function. The chapter finishes with a complete description of unitary dilations in terms of spectral multiplicities. In Chapter VII the authors introduce the concept of the regular factoring of contraction valued analytic functions in the unit disc. Then there are established the subtle relations between such factorings of the characteristic function of the contraction T and the invariant subspaces for T. The results are in some sense definitive and close the question how far the generalizations of Beurling type invariance theorems may be continued within the frames of the developed theory. The functional models are essentially involved and the general results are illustrated by investigations of contractions T of class C_{11} (i.e. such that $T^n h$ and $T^{*n} h$ do not tend to 0 as $n \to \infty$, for $h \neq 0$).

The two last chapters, VIII and IX, are of a more special character. Among others, they illustrate some applications of the whole theory developed before. Chapter VIII deals with the so called weak contractions, and establishes a general spectral decomposition theorem for them. Chapter IX concerns criteria for the similarity of a contraction to a unitary operator, and problems of „quasi-similarity" and unicellularity for contraction operators.

The book concludes with a long list of references*) and with indexes of authors quoted and of the more important terms and symbols.

The reading of the book requires merely the knowledge of the operator theory as presented in the „Leçons d'analyse fonctionnelle" of F. RIESZ and SZ.-NAGY and some knowledge about special Hardy classes of functions analytic in the unit disc. This together with a clear and direct exposition makes the book accessible for a wide variety of mathematicians who would like to become acquainted with modern operator theory in Hilbert space. The book is an excellent help for specialists in the field and certainly will be a rich source of inspiration in further research.

W. Mlak (Kraków)

A. Rényi, Calcul des probabilités avec un appendice sur la théorie de l'information. XIII+620 pages, Paris, Dunod, 1966.

Ce livre de belle présentation est la traduction autorisée du même ouvrage publié en langue allemande en 1962. Au cours de la traduction on a corrigé quelques fautes d'impression et quelques imprécisions.

K. Tandori (Szeged)

*) This opportunity should be used to mention that the following two papers (although cited on pp. 54 and 224) are missing from the list of references: NAKANO, H. [1] On unitary dilations of bounded operators, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 286—288, LOWDENSLAGER, D. B. [1] On factoring matrix valued functions, *Annals of Math.*, **78** (2) (1963), 450—454. Also, the exact title of FOIAŞ, C.—MLAK, W. [1] is: "The extended spectrum of completely non-unitary contractions and the spectral mapping theorem".