Über die Struktur der Hauptidealhalbgruppen. I

Von L. MEGYESI und G. POLLÁK in Szeged

§ 1. Einleitung. Vorbereitungen

Unter einer Hauptidealhalbgruppe verstehen wir eine Halbgruppe H, deren sämtliche Rechts- und Linksideale durch ein Element erzeugt sind. Die Untersuchung solcher Halbgruppen wird in drei Stufen durchgeführt: zuerst beschäftigen wir uns mit der Struktur „im Grossen", d.h., wir zeigen, daß die Green'sche Relation $\mathscr{I}$ (bei GREEN $\mathscr{F}$, s. [3]) in einer Hauptidealhalbgruppe eine Kongruenz ist, und beschreiben dann die Faktorhalbgruppe $H/\mathscr{I}$; im zweiten Schritt wird dasselbe bezüglich der Relation $\mathscr{Q}$ (bei GREEN $\mathscr{H}$) gemacht; endlich wird die Operation zwischen Elementen der $\mathscr{Q}$-Klassen untersucht. In diesem ersten Teil werden die ersten zwei Fragen erledigt.

Die Terminologie stimmt meistens mit der von [2] überein. Eine Abweichung findet nur im Falle der Green'schen $\mathscr{H}$-Klassen statt, die wir $\mathscr{Q}$-Klassen nennen wollen, da sie in derselben Beziehung mit den Quasiidealen stehen, wie die $\mathscr{L}$-, $\mathscr{R}$- und $\mathscr{I}$-Klassen mit den Links-, Rechts-, bzw. zweiseitigen Idealen. Die Green'schen Klassen werden wir durch L, R, I, Q usw. bezeichnen, die ein- und zweiseitigen Ideale durch $\mathbf{L}, \mathbf{R}, \mathbf{I}$ usw. In einer beliebigen Halbgruppe H wird für $a \in H$ die a enthaltende $\mathscr{I}$-Klasse durch $I(a)$, das von a erzeugte Ideal durch $\mathbf{I}(a)$ bezeichnet. $I(a) > I(b)$ bedeutet $\mathbf{I}(a) \supset \mathbf{I}(b)$. Für die verwandten Begriffe werden analoge Bezeichnungen gebraucht.

Die ein- und zweiseitigen Idealverbände einer Hauptidealhalbgruppe ist sehr einfach zu beschreiben:

1. 1. (LYAPIN [4]). *Dann und nur dann sind sämtliche Ideale (Linksideale, Rechtsideale) einer Halbgruppe durch ein Element erzeugt, wenn die Relation* $\mathbf{I} \subset \mathbf{I}'$ ($\mathbf{L} \subset \mathbf{L}'$, $\mathbf{R} \subset \mathbf{R}'$) *eine duale Wohlordnung ist.*

In [4] ist diese Tatsache nur für zweiseitige Ideale formuliert, der Beweis ist aber natürlich allgemeingültig.

Aus 1. 1 folgt, daß man die Ideale und auch die Rechts- und Linksideale mit Ordnungszahlen so numerieren kann, daß $\mathbf{I}_\alpha \supset \mathbf{I}_\beta$ ($\mathbf{L}_\alpha \supset \mathbf{L}_\beta$, $\mathbf{R}_\alpha \supset \mathbf{R}_\beta$) äquivalent mit $\alpha<\beta$ ist. Die zugehörigen Green'schen Klassen werden ebenso numeriert, also $I_\alpha > I_\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$ usw. Dabei laufen die Indizes der Ideale, der Links- und der Rechtsideale im allgemeinen verschiedene Mengen durch, nämlich die Menge der Ordnungszahlen, die kleiner als γ, γ_l bzw. γ_r sind. Es ist klar, daß $\gamma \leqq \gamma_l$, $\gamma \leqq \gamma_r$.

Da aus $\mathbf{L}(b) \supseteqq \mathbf{L}(a)$ in jeder Hauptidealhalbgruppe $\mathbf{I}(b) \supseteqq \mathbf{I}(a)$ folgt, so gilt in Hauptidealhalbgruppen wegen 1. 1 auch

1. 2. *In einer Hauptidealhalbgruppe folgt aus* $\mathbf{I}(a) \supset \mathbf{I}(b)$ *stets auch* $\mathbf{L}(a) \supset \mathbf{L}(b)$.

Die duale Aussage besteht natürlich auch. Von jetzt an werden wir aus dualen Aussagen immer nur eine formulieren.

§ 2. Die Faktorhalbgruppe $H/\mathcal{I}$

Unser Zweck ist die Existenz der im Titel des Paragraphen genannten Halbgruppe zu beweisen. Dazu brauchen wir aber noch weitere Vorbereitungen.

Eine $\mathcal{I}$-Klasse I der Hauptidealhalbgruppe H nennen wir *geschichtet*, falls I aus mehr als einer $\mathcal{L}$-Klasse besteht. Später werden wir sehen, daß dieser Begriff selbstdual ist. Zunächst möchten wir zeigen:

Satz 1. *Eine geschichtete $\mathcal{I}$-Klasse der Hauptidealhalbgruppe H ist eine Unterhalbgruppe der letzteren.*

Dem Beweis schicken wir einige Hilfssätze voraus.

2. 1. *In einer beliebigen Halbgruppe H ist die Abbildung* $\mathbf{L} \to \mathbf{L}a\ (a \in H)$ *des Linksidealverbandes in sich monoton und aus*

$$(1) \qquad \mathbf{L} \subset \mathbf{L}', \quad \mathbf{L}a \subset \bar{\mathbf{L}} \subset \mathbf{L}'a$$

folgt die Existenz eines $\mathbf{L}''$ *mit*

$$\mathbf{L} \subset \mathbf{L}'' \subset \mathbf{L}', \quad \mathbf{L}''a = \bar{\mathbf{L}}.$$

(Diese Tatsache ist ein Spezialfall einer viel allgemeineren mengentheoretischen Tatsache.) Die erste Behauptung ist trivial und wohlbekannt. Gilt ferner (1), so bezeichnen wir den Rechtsquotienten $\bar{\mathbf{L}} \cdot a = \{x \mid xa \in \bar{\mathbf{L}}\}$ durch $\mathbf{L}_0$ und es sei $\mathbf{L}'' = \mathbf{L}_0 \cap \mathbf{L}'$. Offenbar gilt $\mathbf{L}''a \subseteqq \bar{\mathbf{L}}$. Andererseits gibt es wegen $\bar{\mathbf{L}} \subset \mathbf{L}'a$ für jedes $\bar{b} \in \bar{\mathbf{L}}$ ein $b \in \mathbf{L}'$ mit $ba = \bar{b}$; da somit auch $b \in \mathbf{L}_0$ gilt, ist $b \in \mathbf{L}''$, also $\bar{\mathbf{L}} \subseteqq \mathbf{L}''a$, was zu beweisen war.

Für unseren Fall ergibt 2. 1 den Spezialfall

2. 2. *Gelten in der Hauptidealhalbgruppe H die Gleichungen* $\mathbf{L}_\mu a = \mathbf{L}_\alpha$, $\mathbf{L}_{\mu+\nu} a = \mathbf{L}_{\alpha+\beta}$, *so ist* $\beta \leqq \nu$. *Aus* $\mathbf{L}_\alpha b = \mathbf{L}_\alpha$, $\mathbf{L}_\alpha \supseteqq \mathbf{L}_\mu$ *folgt im speziellen* $\mathbf{L}_\mu b \supseteqq \mathbf{L}_\mu$.

In der Tat, nach 2. 1 wird die Menge $\{\mathbf{L}_{\mu+\xi}\}_{0 \leqq \xi \leqq \nu}$ auf die Menge $\{\mathbf{L}_{\alpha+\eta}\}_{0 \leqq \eta \leqq \beta}$ abgebildet.

2. 3. *Gibt es unter den $\mathscr{L}$-Klassen, die in der $\mathscr{I}$-Klasse I einer Halbgruppe H enthalten sind, eine maximale, sei denn L_0, so gibt es für jedes $L \subseteqq I$ ein $a \in H^1$ mit $La \subseteqq L_0$* (d.h. $\mathbf{L}a = \mathbf{I}$).

Ist nämlich $L \subseteqq I$, $x \in L$, $y \in L_0$, so gibt es Elemente $b, a \in H^1$ derart, daß $y = bxa$. Offensichtlich ist $L(xa) \geqq L(bxa) = L_0$, aber wegen $xa \in I$ und der Maximalität von L_0 muß hier die Gleichheit statthaben. Es gilt also $xa \in L_0$, dann aber auch $La \subseteqq L_0$.

Im Falle einer Hauptidealhalbgruppe H bedeutet dies, daß für eine geschichtete $\mathscr{I}$-Klasse I_σ mit $\mathbf{I}_\sigma = \mathbf{L}_\alpha$ und für $L_\mu \subset I_\sigma$ stets ein $a \in H$ existiert, so daß $L_\mu a \subseteqq L_\alpha$ (d.h. $\mathbf{L}_\mu a = \mathbf{I}_\sigma$). Ein solches Element werden wir ein *Vergrößerungselement für* L_μ oder *für* $\mathbf{L}_\mu$ nennen.

2. 4. *Sei I_σ eine $\mathscr{I}$-Klasse der Hauptidealhalbgruppe H. Gilt $xy \in \mathbf{I}_{\sigma+1}$ für ein $x \in I_\sigma$ und ein $y \in H$, so gilt auch $\mathbf{I}_\sigma y \subseteqq \mathbf{I}_{\sigma+1}$.*

Wäre nämlich $\mathbf{I}_\sigma y \supset \mathbf{I}_{\sigma+1}$, dann hätten wir $\mathbf{I}_\sigma \subseteqq \mathbf{I}_{\sigma+1} \cdot{}^{\cdot} y$, folglich $\mathbf{I}_\sigma \supset \mathbf{I}_{\sigma+1} \cdot{}^{\cdot} y \supset$ $\supset \mathbf{I}_{\sigma+1}$, d.h.

$$\mathbf{I}_\sigma = \mathbf{L}_\alpha, \quad \mathbf{I}_{\sigma+1} \cdot{}^{\cdot} y = \mathbf{L}_{\alpha+\nu}, \quad \mathbf{I}_{\sigma+1} = \mathbf{L}_{\alpha+\xi}, \qquad 0 < \nu < \xi \tag{2}$$

(hier ist $\mathbf{I}_{\sigma+1} \cdot{}^{\cdot} y = \{x | xy \in \mathbf{I}_{\sigma+1}, x \in H\}$). Dann könnte man aber nach 2. 3 ein $b \in H$ derart finden, daß $\mathbf{I}_\sigma yb = \mathbf{L}_\alpha yb = \mathbf{L}_\alpha$ gilt. Andererseits wäre

$$\mathbf{L}_{\alpha+\nu} yb \subseteqq \mathbf{I}_{\sigma+1} b \subseteqq \mathbf{I}_{\sigma+1} = \mathbf{L}_{\alpha+\xi},$$

was aber wegen 2. 2 und (2) unmöglich ist. Somit muß tatsächlich $\mathbf{I}_\sigma y \subseteqq \mathbf{I}_{\sigma+1}$ bestehen.

Es gilt endlich

2. 5. *Ist in der Hauptidealhalbgruppe H*

$$\mathbf{I}_\sigma = \mathbf{L}_\alpha, \quad \mathbf{I}_{\sigma+1} = \mathbf{L}_{\alpha+\xi}, \qquad \xi \neq 1,$$

so ist ξ ein Limeszahl.

Dies folgt aus dem folgenden bekannten Satz:

2. 6 (Lyapin [4], S. 233—234.). *Sei* $\mathbf{I}$ *das durch die $\mathscr{I}$-Klasse I erzeugte Ideal. Ist $L \cup (\mathbf{I} \setminus I)$ ein Linksideal für eine $\mathscr{L}$-Klasse $L \subseteqq I$, so ist es ein Linksideal für alle $\mathscr{L}$-Klassen mit $L \subseteqq I$.*

Wäre nun $\xi = \eta + 1$, so wäre

$$\mathbf{L}_{\alpha+\eta} = L_{\alpha+\eta} \cup \mathbf{I}_{\sigma+1} = L_{\alpha+\eta} \cup (\mathbf{I}_\sigma \setminus I_\sigma)$$

ein Linksideal, also z.B. auch $\mathbf{L} = L_\alpha \cup \mathbf{I}_{\sigma+1}$ wäre ein solches; dann hätte aber das Linksideal $\mathbf{L} \cup \mathbf{L}_{\alpha+\eta}$ kein erzeugendes Element.

Jetzt können wir zum Beweis des Satzes übergehen.

Nehmen wir an, daß die geschichtete $\mathscr{I}$-Klasse I_σ keine Halbgruppe ist. Dann gibt es Elemente $x, y \in I_\sigma$ derart, daß $xy \in \mathbf{I}_{\sigma+1}$ ist. Nach 2. 4 ist dann $\mathbf{I}_\sigma y \subseteqq \mathbf{I}_{\sigma+1}$ und jetzt nach dem Dualen desselben Hilfssatzes $z\mathbf{I}_\sigma \subseteqq \mathbf{I}_{\sigma+1}$ für jedes $z \in \mathbf{I}_\sigma$, d.h.

(3) $$\mathbf{I}_\sigma^2 \subseteqq \mathbf{I}_{\sigma+1}.$$

Betrachten wir das Linksideal

$$\mathbf{L} = \{x \mid \mathbf{I}_\sigma x \subset \mathbf{I}_\sigma\},$$

(es ist sogar ein Ideal) und es sei $\mathbf{L} = \mathbf{L}(a)$. Wir zeigen zunächst, daß $\mathbf{I}_\sigma a \subseteqq \mathbf{I}_{\sigma+1}$ ist (also auch $\mathbf{I}_\sigma \mathbf{L} \subseteqq \mathbf{I}_{\sigma+1}$). Im Falle $\mathbf{L} = \mathbf{I}_\sigma$ ist das trivial. Ist dagegen $\mathbf{L} \supset \mathbf{I}_\sigma$, so gibt es für jedes $y \in \mathbf{I}_\sigma$ ein $x \in H$ mit $xa = y$, d.h.

(4) $$(\mathbf{I}_\sigma . \cdot a) a = \mathbf{I}_\sigma.$$

Wegen der Definition von a besteht auch

(5) $$\mathbf{I}_\sigma a \subset \mathbf{I}_\sigma,$$

also für $\mathbf{L}_{\varrho_1} = \mathbf{I}_\sigma . \cdot a$ muß wegen (4) und (5) $\mathbf{L}_{\varrho_1} \supset \mathbf{I}_\sigma$ gelten. Ist noch $\mathbf{L}(a) \supset \mathbf{L}_{\varrho_1}$, so gilt wieder $(\mathbf{L}_{\varrho_1} . \cdot a) a = \mathbf{L}_{\varrho_1}$ und $\mathbf{L}_{\varrho_2} = \mathbf{L}_{\varrho_1} . \cdot a \supset \mathbf{L}_{\varrho_1}$. Setzt man diesen Prozess fort, so erhält man eine Linksidealkette

$$\mathbf{L}_{\varrho_1} \subset \mathbf{L}_{\varrho_2} \subset \dots,$$

die in endlich vielen Schritten abbrechen muß. Dies geschieht, sobald $\mathbf{L}_{\varrho_n} \supseteqq \mathbf{L}(a)$ ist. Dann haben wir

$$\mathbf{I}_\sigma = \mathbf{L}_{\varrho_1} a = \mathbf{L}_{\varrho_2} a^2 = \dots = \mathbf{L}_{\varrho_n} a^n,$$

also wegen $a \in \mathbf{L}_{\varrho_n}$ auch $a^{n+1} \in \mathbf{I}_\sigma$. Folglich gilt nach (3) $\mathbf{I}_\sigma a^{n+1} \subseteqq \mathbf{I}_{\sigma+1}$ und das ergibt, daß es eine kleinste k $(0 \leqq k \leqq n)$ existiert, so daß $\mathbf{I}_\sigma a^{k+1} \subseteqq \mathbf{I}_{\sigma+1}$. Wäre dabei $k > 0$, so hätten wir

$$\mathbf{I}_\sigma \supset \mathbf{I}_\sigma a^k \supset \mathbf{I}_{\sigma+1}, \quad \mathbf{I}_\sigma a^{k+1} \subseteqq \mathbf{I}_{\sigma+1}.$$

Dann wäre aber $xa \in \mathbf{I}_{\sigma+1}$ für $x \in \mathbf{I}_\sigma a^k \setminus \mathbf{I}_{\sigma+1}$, und $xa \notin \mathbf{I}_{\sigma+1}$ für $x \in \mathbf{I}_\sigma \setminus \mathbf{I}_\sigma a^k$, im Widerspruch mit 2. 4. Somit muß $\mathbf{I}_\sigma a \subseteqq \mathbf{I}_{\sigma+1}$ gelten.

Nehmen wir nun ein beliebiges Element $b \notin \mathbf{L}$ und es sei wieder $\mathbf{I}_\sigma = \mathbf{L}_\alpha$. Wegen $\mathbf{I}_\sigma b = \mathbf{I}_\sigma$ und 2. 2 müßen für die Linksideale

$$\mathbf{L}_{\alpha_0} = \mathbf{L}_\alpha b, \quad \mathbf{L}_{\alpha_1} = \mathbf{L}_{\alpha+1} b, \dots, \quad \mathbf{L}_{\alpha_m} = \mathbf{L}_{\alpha+m} b, \dots$$

die Ungleichungen $\alpha_i \leqq \alpha + i$ gelten. Da $\mathbf{L}_\xi x = \mathbf{L}_\eta$ offensichtlich gleichbedeutend mit $L_\xi x \subseteqq L_\eta$ ist, folgt aus dem Gesagten, daß $\left(\bigcup_{i=0}^{m} L_i\right) b \subseteqq \bigcup_{i=0}^{m} L_i$ für $m = 0, 1, 2, \dots$.

Dann sind aber die Mengen $M_m = \bigcup_{i=0}^{m} L_i \cup \mathbf{I}_{\sigma+1}$ Rechtsideale, da

$$M_m b = \left(\bigcup_{i=0}^{m} L_i\right) b \cup \mathbf{I}_{\sigma+1} b \subseteqq \bigcup_{i=0}^{m} L_i \cup \mathbf{I}_{\sigma+1} = M_m$$

für $b \notin \mathbf{L}$ und $M_m b \subseteqq \mathbf{I}_{\sigma+1}$ für $b \in \mathbf{L}$ besteht. Dabei ist $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ wegen 2. 5 eine unendliche wachsende Rechtsidealkette, im Widerspruch mit 1. 1. Dies vollendet den Beweis von Satz 1.

Nehmen wir zwei Elemente $a, b \notin \mathbf{I}_{\sigma+1}$. Ist $ab \in \mathbf{I}_{\sigma+1}$ d.h. $\mathbf{L}(a)\mathbf{R}(b) \subseteqq \mathbf{I}_{\sigma+1}$, so gibt es wegen $I_\sigma \cap \mathbf{L}(a) \neq \emptyset$, $I_\sigma \cap \mathbf{R}(b) \neq \emptyset$ auch Elemente $a', b' \in I_\sigma$ mit $a'b' \in \mathbf{I}_{\sigma+1}$. Dies ergibt

2. 7. *Ist I_σ geschichtet, so ist $H \setminus \mathbf{I}_{\sigma+1}$ eine Halbgruppe* (d.h. $\mathbf{I}_{\sigma+1}$ ein Primideal).

Wir brauchen noch weitere Hilfssätze.

2. 8. *Für jede $\mathscr{L}$-Klasse L_μ einer geschichteten $\mathscr{I}$-Klasse I_σ gibt es ein Vergrößerungselement in I_σ.*

Nach Satz 1 ist für ein beliebiges $x \in I_\sigma$ noch $\mathbf{L}_\mu x \supset \mathbf{I}_{\sigma+1}$. Nach 2. 3 existiert dann ein $a \in H^1$ mit $\mathbf{L}_\mu xa = \mathbf{I}_\sigma$. Somit ist xa ein Vergrösserungselement und $xa \in I_\sigma$.

2. 9. *Für jedes $a \in H$ gibt es in I_σ ein L_μ, so daß $\mathbf{L}_\mu a \neq \mathbf{I}_\sigma$.*

Im entgegengesetzten Falle wäre nämlich $\mathbf{L}_\mu a = \mathbf{I}_\sigma$ für $\mathbf{L}_\mu \supset \mathbf{I}_{\sigma+1}$, $\mathbf{I}_{\sigma+1} a \subseteqq \mathbf{I}_{\sigma+1}$ im Widerspruch mit 2. 2.

2. 10. *Ist*

$$\mathbf{I}_\sigma = \mathbf{L}_\alpha, \quad \mathbf{L}_{\alpha+1} \supset \mathbf{I}_{\sigma+1},$$

so sind $H \setminus \mathbf{L}_{\alpha+1}$ und L_α Teilhalbgruppen.

Es genügt das erste zu zeigen, da $L_\alpha = \mathbf{I}_\sigma \cap (H \setminus \mathbf{L}_{\alpha+1})$ ist. Sind aber $a, a' \in H \setminus \mathbf{L}_{\alpha+1}$, $aa' \in \mathbf{L}_{\alpha+1}$, so hat man

$$\mathbf{I}_\sigma a' \subseteqq \mathbf{L}(a)\, a' \subset \mathbf{L}_{\alpha+1}. \tag{6}$$

Andererseits gibt es nach 2. 8 in I_σ ein b mit $\mathbf{I}_\sigma b = \mathbf{I}_\sigma$. Da dann $b \in L(a')$, d.h. $b = xa'$ ist, so besteht

$$\mathbf{I}_\sigma = \mathbf{I}_\sigma b = \mathbf{I}_\sigma xa' \subseteqq \mathbf{I}_\sigma a',$$

im Widerspruch mit (6).

2. 11. $\mathbf{I}_\sigma a = \mathbf{I}_\sigma$ *für jedes* $a \in H \setminus \mathbf{L}_{\alpha+1}$.

Für $b \in \mathbf{I}_\alpha$ hat man nämlich $ba \in L_{\bar{\alpha}}$, also $\mathbf{I}_\sigma a = \mathbf{L}(b)a = \mathbf{L}(ba) = \mathbf{I}_\sigma$.

Satz 2. *Eine geschichtete $\mathscr{I}$-Klasse I_σ kann keine $\mathscr{R}$-Klasse sein.*

Es sei wieder $\mathbf{I}_\sigma = \mathbf{L}_\alpha$ und nehmen wir ein $a \in L_\alpha$. Nach 2. 9 gibt es ein $L_\mu \subset I_\sigma$, so daß $\mathbf{L}_\mu a \neq \mathbf{I}_\sigma$ und nach 2. 8 gibt es ein $b \in I_\sigma$ mit $\mathbf{L}_\mu b = \mathbf{I}_\sigma$. Wäre nun $R(a) = R(b)$, so gälte $a = bx$, also $L(x) \geqq L_\alpha$, d.h. $x \in H \setminus \mathbf{L}_{\alpha+1}$. Hieraus folgt aber wegen 2. 11

$$\mathbf{L}_\mu a = \mathbf{L}_\mu bx = \mathbf{I}_\sigma x = \mathbf{I}_\sigma,$$

im Widerspruch mit dem Wahl von $\mathbf{L}_\mu$.

Dieser Satz besagt, daß der Begriff der geschichteten $\mathscr{I}$-Klasse selbstdual ist.

Somit sind die dualen Aussagen von 2. 5, 2. 8, 2. 9, 2. 10 und 2. 11 auch gültig. Die duale Definition der geschichteten $\mathcal{I}$-Klassen werden wir im folgenden als gleichberechtigte mit der früher angegebenen anschauen.

Jetzt ist schon alles bereit für den Beweis des ersten Hauptresultats:

Satz 3. *In einer Hauptidealhalbgruppe H ist die Green'sche Relation $\mathcal{I}$ eine Kongruenz.*

Wir haben $I_\varrho I_\sigma \subseteqq I_\tau$ für beliebige ϱ, σ und passendes τ zu zeigen. Wir unterscheiden zwei Fälle.

a) Weder I_ϱ, noch I_σ sind geschichtet. Dann ist $I_\varrho = L_\mu$, $I_\sigma = R_\nu$, also nach [5], Lemma 1 ist $I_\varrho I_\sigma$ sogar in einer einzigen $\mathcal{D}$-Klasse enthalten.

b) I_σ ist geschichtet. Wir behaupten, daß dann immer

(7) $$I_\varrho I_\sigma \subseteqq \min(I_\varrho, I_\sigma)$$

besteht. Sei nämlich I_ϱ daß größte unter den $\mathcal{I}$-Klassen, für welche (7) nicht erfüllt ist. Es kann nicht $I_\varrho \geqq I_\sigma$ sein, da dann $I_\varrho I_\sigma \subseteqq I_\sigma$ besteht und (7) aus 2. 7 folgt. Es ist also $I_\varrho < I_\sigma$. Dabei ist I_ϱ nicht geschichtet, sonst konnte man ϱ und σ vertauschen und das vorige Argument träte wieder in Kraft. Wir haben also $I_\varrho = L_\alpha$, und wegen $I_\varrho a \nsubseteqq I_\varrho$ für $a \in I_\sigma$

$$\mathbf{I}_\varrho a \subseteqq \mathbf{L}_{\alpha+1} = \mathbf{I}_{\varrho+1},$$

d. h.

(8) $$I_\varrho a \cap I_\varrho = \emptyset.$$

Andererseits gibt es wegen $L(a) > L_\alpha$ für jedes $b \in I_\varrho$ ein $x \in H$ mit $xa = b$. Dabei kann x wegen (8) nicht in I_ϱ liegen, aber auch $x \in I_\xi$, $I_\sigma > I_\xi > I_\varrho$ ist unmöglich, da für diese I_ξ nach der Annahme

$$I_\xi a \subseteqq I_\xi I_\sigma \subseteqq I_\xi,$$

gilt und trivialerweise auch $I_\xi \geqq I_\sigma$ ausgeschloßen ist. Dieser Widerspruch vollendet den Beweis, da der Fall, wo I_ϱ geschichtet ist, durch Dualisieren des betrachteten Falles entsteht.

Es ist klar, daß ein homomorphes Bild einer Hauptidealhalbgruppe wieder eine solche ist. $H/\mathcal{I}$ ist also eine Hauptidealhalbgruppe, in welcher jede $\mathcal{I}$-Klasse aus einem Element besteht. Die so beschaffene Halbgruppen sind leicht zu beschreiben:

Nehmen wir eine transfinite Folge $\mathfrak{f} = (n_0, \ldots, n_\sigma, \ldots)_{\sigma<\tau}$, deren Glieder natürliche Zahlen und Symbole ∞ sind und $\tau \geqq 1$ ist. Jedem $\sigma < \tau$ ordnen wir eine zyklische Halbgruppe H_σ der Ordnung n_σ zu, welche im Falle eines endlichen n_σ auch den Index n_σ hat, und es sei $H_\varrho \cap H_\sigma = \emptyset$ für $\varrho \neq \sigma$. Für Elemente verschiedener H_σ definieren wir die Multiplikation durch

(9) $$(h_\sigma h_\varrho =)\, h_\varrho h_\sigma = h_{\max(\varrho,\sigma)} \qquad (h_\varrho \in H_\varrho,\, h_\sigma \in H_\sigma).$$

Dann ist $H_\mathfrak{f} = \bigcup_{\sigma<\tau} H_\sigma$ offensichtlich eine kommutative Halbgruppe.

Satz 4. *$H_{\mathfrak{f}}$ ist eine Hauptidealhalbgruppe, in der jede $\mathscr{I}$-Klasse ein Element hat, und jede Hauptidealhalbgruppe mit dieser Eigenschaft ist einer $H_{\mathfrak{f}}$ isomorph.*

In der Tat, betrachten wir ein Ideal $\mathbf{I}$ von $H_{\mathfrak{f}}$ und sei σ der kleinste Index, für welchen $\mathbf{I} \cap H_\sigma \neq \emptyset$, a das erzeugende Element von $H_\sigma(=\langle a\rangle)$, und k der kleinste Exponent für welchen $a^k \in \mathbf{I}$. Da die höheren Potenzen von a Mehrfachen von a^k sind und nach (9) dasselbe für sämtliche Elemente der H_ϱ mit $\varrho > \sigma$ gilt, so ist

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}(a^k) = \Big(\bigcup_{\sigma<\varrho<\tau} H_\varrho\Big) \cup H_\sigma a^k \cup a^k.$$

Umgekehrt, sei H eine Hauptidealhalbgruppe, in welcher jede $\mathscr{I}$-Klasse aus einem Element besteht. Der Ordnungstypus der Idealkette von H soll γ sein und $h_\sigma(\sigma<\gamma)$ soll das einzige Element der $\mathscr{I}$-Klasse I_σ bedeuten. Ferner, definiere man die folgenden Ordnungszahlmengen: Λ sei die Menge der Ordnungszahlen $\lambda(<\gamma)$ vom zweiten Typus und

$$\Gamma = \{\sigma \mid \sigma = \xi+1, h_\xi^2 = h_\xi\}, \quad \Delta = \Lambda \cup \Gamma.$$

Endlich, für beliebiges $\sigma<\gamma$ bezeichne σ' das Maximum von Δ unter σ:

$$\sigma' \leqq \sigma, \quad \sigma' \in \Delta,$$
$$\sigma' < \tau \in \Delta \Rightarrow \sigma < \tau.$$

Ein solches σ' gibt es offensichtlich. Auch ist es klar, daß dann σ in der Form

$$\sigma = \sigma' + k - 1$$

darstellbar ist, wo k eine natürliche Zahl bedeutet. Wir zeigen, daß dann

$$h_\sigma = h_{\sigma'}^k,$$

gilt und auch (9) für $\varrho<\sigma'$ besteht.

Nehmen wir an, daß dies für jedes $\tau<\sigma$ schon bewiesen ist. Ist dabei $\sigma \notin \Delta$ (also $\sigma=\xi+1$ und $k>1$), so gibt es ein $h_\eta \in H$ mit $h_\eta h_\xi = h_\sigma$, η minimal. Wegen der Induktionsannahme gilt (9) für h_ξ statt h_σ und für $\varrho<\sigma'$, also muß $\eta \geqq \sigma'$ sein. Wäre aber $\eta>\sigma'$, so hätten wir $h_{\sigma'}^k = h_{\sigma'} h_\xi = h_\xi = h_{\sigma'}^{k+1}$, also auch $h_\xi^2 = h_\xi$, d.h. $\sigma=\xi+$ $+1 \in \Delta$, entgegen unserer Annahme. Somit ist $\eta=\sigma'$ und $h_\sigma = h_{\sigma'} h_\xi = h_{\sigma'}^k$. Ist ferner $\varrho<\sigma'$ so gilt

$$h_\varrho h_\sigma = h_\varrho h_{\sigma'} h_\xi = h_{\sigma'} h_\xi = h_\sigma$$

und ebenso die duale Gleichung.

Es sei nun $\sigma \in \Delta$, $\varrho<\sigma$. Wieder gibt es ein h_η mit $h_\varrho h_\eta = h_\sigma$. Wir wollen zeigen, daß $\eta=\sigma$ ist. Dazu genügt es einzusehen, daß $h_\varrho h_\tau \neq h_\sigma$ für $\varrho, \tau<\sigma$. Ist dies falsch und z.B. $\varrho \leqq \tau$, so ist jedenfalls $\tau' \leqq \varrho$, da sonst $h_\varrho h_\tau = h_\tau$ besteht. Dann ist aber $h_{\varrho'} = h_{\tau'}$ und

$$h_\varrho h_\tau = h_{\tau'}^l = h_{\tau'+l-1}$$

für ein $l<\omega$. Ist dabei $\sigma \in \Lambda$, so ist wegen $\tau' \leqq \tau < \sigma$ auch $\tau'+l-1<\sigma$. Ist dagegen

$\sigma \in \Gamma$, $\sigma = \xi + 1$, dann ist $h_\xi^2 = h_\xi$ und $h_\xi h_\sigma = h_\xi \cdot h_\xi x = h_\xi x = h_\sigma$ und auch

$$I(h_\sigma) \geqq I(h_\varrho h_\sigma) \geqq I(h_\xi h_\sigma) = I(h_\sigma),$$

also $h_\varrho h_\sigma = h_\sigma$. Somit ist unsere Behauptung bewiesen.

Sind nun $\sigma_0(=0), \sigma_1, \ldots, \sigma_\alpha, \ldots$ die Elemente der Menge Δ, der Größe nach geordnet, so besteht die zyklische Halbgruppe $H_\alpha = \langle h_{\sigma_\alpha} \rangle$ nach den Obigen aus den Elementen h_σ mit $\sigma_\alpha \leqq \sigma < \sigma_{\alpha+1}$. Dabei besteht nach dem Gezeigten auch (9). Ist also $n_\alpha = o(H_\alpha)$ endlich, so ist $h_{\sigma_\alpha}^{n_\alpha+1} \neq h_{\sigma_\alpha}^l$ mit $l < n_\alpha$, da sonst die verschiedenen Elemente $h_{\sigma_\alpha}^l$ und $h_{\sigma_\alpha}^{n_\alpha}$ $\mathscr{I}$-äquivalent wären, im Widerspruch mit der Voraussetzung über H. Der Index von H_α ist hiermit n_α. Dies bedeutet aber $H \cong H_{\mathfrak{f}}$, wo $\mathfrak{f} = (n_0, \ldots, n_\alpha, \ldots)_{\sigma_\alpha \in \Delta}$ ist.

§ 3. Die Kongruenzrelation $\mathscr{Q}$

Wir erinnern den Leser, daß die Relation $\mathscr{Q}$ durch $\mathscr{Q} = \mathscr{R} \cap \mathscr{L}$ definiert ist. Wir zeigen sogleich:

Satz 5. *In einer Hauptidealhalbgruppe H ist $\mathscr{Q}$ eine Kongruenz.*

Es sei $a\mathscr{Q}a'$, $b\mathscr{Q}b'$; wir wollen $ab\mathscr{Q}a'b'$ zeigen. Betrachten wir das Element ab'. Trivialerweise gilt

$$ab\mathscr{R}ab' \tag{10}$$

Ferner gibt es Elemente x, y mit $b' = bx$, $b = b'y$. Wegen $\mathbf{L}(b) = \mathbf{L}(b')$ ist $\mathbf{L}(b)x = \mathbf{L}(b')$. Für $L_\alpha \leqq L(b)$ gilt also $L_\alpha x \subseteqq L_{\alpha'}$ mit $L_{\alpha'} \leqq L(b)$. Andererseits haben wir $cxy = c$ für $c \in \mathbf{L}(b)$, also $L_\alpha xy = L_\alpha$ und somit $L_{\alpha'} y \cap L_\alpha \neq \emptyset$, also $L_{\alpha'} y \subseteqq L_\alpha$ (eigentlich sogar $L_{\alpha'} y = L_\alpha$). Dies bedeutet aber, daß die Abbildung $L_\alpha \to L_{\alpha'}$ eine ein-eindeutige Abbildung der Menge der $\mathscr{L}$-Klassen von $\mathbf{L}(b)$ in sich ist. Da dabei diese Abbildung nach 2. 1 monoton und „stetig" (im Sinne von (1)) ist, ferner überführt sie $L(b)$ (die maximale $\mathscr{L}$-Klasse von $\mathbf{L}(b)$) in sich, muß sie die identische Abbildung sein. U.a. gilt $L(ab)x \subseteqq L(ab)$, also $ab'\mathscr{L}ab$. Mit (10) zusammen ergibt dies $ab\mathscr{Q}ab'$.

Ein dualer Gedankengang führt zu $ab'\mathscr{Q}a'b'$, also

$$ab \, \mathscr{Q} \, ab' \, \mathscr{Q} \, a'b',$$

was zu beweisen war.

Im § 2 haben wir erhalten, daß jede geschichtete $\mathscr{I}$-Klasse I_σ der Hauptidealhalbgruppe H selber eine Halbgruppe ist. Nach einem Satz von Clifford [1], den man auf die Rees'sche Faktorhalbgruppe $H/\mathbf{I}_{\sigma+1}$ anwendet, ist I_σ sogar einfach. Es kann aber vorkommen, daß sie schon keine Hauptidealhalbgruppe ist. Nimmt man doch statt H die Halbgruppe $H/\mathscr{Q}$, d.h. eine Hauptidealhalbgruppe, in welcher die $\mathscr{Q}$-Klassen je ein Element haben, so sind in dieser sie geschichteten $\mathscr{I}$-Klassen schon einfache Hauptidealhalbgruppen. Die folgenden Überlegungen dienen zur Begründung dieser Behauptung.

Im folgenden, wie vorher, sei I_σ eine geschichtete $\mathscr{I}$-Klasse und $\mathbf{I}_\sigma=\mathbf{R}_\beta=\mathbf{L}_\alpha$. Wir bemerken zuerst, daß es nach dem Dualen von 2. 11 für $a\in R_\beta$ ein $e\in\mathbf{I}_\sigma$ (also $e\in I_\sigma$) mit $ae=a$ gibt. Dann gilt natürlich $xe=x$ für alle $x\in\mathbf{L}(a)$. Ein solches e nennen wir ein *äußeres Rechtseinselement* für $\mathbf{L}(a)$. Bezeichnen wir durch $\mathbf{L}_\varepsilon$ das maximale Linksideal, für welches ein äußeres Rechtseinselement e in $\mathbf{I}_\sigma$ gibt; nach dem gesagten gilt $\mathbf{I}_\sigma\supseteqq\mathbf{L}_\varepsilon\supset\mathbf{I}_{\sigma+1}$. Wegen $He\supseteqq\mathbf{L}_\varepsilon$ ist $e\in H\setminus\mathbf{L}_{\varepsilon+1}$ klar.

3. 1. *Hat die $\mathscr{R}$-Klasse R_ϱ einen nichtleeren Durchschnitt mit $\mathbf{I}_\sigma\setminus\mathbf{L}_\varepsilon$, so besteht R_ϱ aus einer einzigen $\mathscr{Q}$-Klasse.*

In der Tat, es sei $a,b\in I_\sigma$, $a\mathscr{R}b$, aber nicht $a\mathscr{L}b$. Bestimmtheitshalber sei $L(a)>L(b)$; dann genügt es $a\in\mathbf{L}_\varepsilon$ zu zeigen. Nach $a\mathscr{R}b$ gibt es Elemente x, y mit $ax=b$, $by=a$, d.h. $axy=a$. Dabei muß $x\in\mathbf{I}_\sigma$ sein, da sonst nach 2. 11 $\mathbf{I}_\sigma x=\mathbf{L}_\alpha x=\mathbf{L}_\alpha$ und nach 2. 2 $L(ax)\geqq L(a)$ wäre, was der Annahme widerspricht. Dann ist aber $xy\in\mathbf{I}_\sigma$ ein äußeres Rechtseinselement für $\mathbf{L}(a)$, also $\mathbf{L}(a)\subseteqq\mathbf{L}_\varepsilon$, was zu beweisen war.

Aus 3. 1 folgt unmittelbar

3. 2. *Für $\alpha\leqq\mu<\varepsilon$ ist L_μ die Vereinigungsmenge von $\mathscr{R}$-Klassen.*

Jetzt können wir beweisen

3. 3. *H sei eine Hauptidealhalbgruppe, I_σ eine geschichtete $\mathscr{I}$-Klasse in H. Für $a\in I_\sigma$, $b\notin\mathbf{I}_\sigma$ gilt $ab\mathscr{Q}a$.*

Zuerst zeigen wir $ab\mathscr{R}a$, oder, was dasselbe ist, $R_\varrho b\subseteqq R_\varrho$ für $R_\varrho\subset I_\sigma$. Für $\varrho=\beta$ (d.h. $\mathbf{R}_\varrho=\mathbf{I}_\sigma$) folgt dies aus dem Dualen von 2. 10. Nehmen wir an, daß R_ϱ die maximale $\mathscr{R}$-Klasse ist, für welche $R_\varrho b\subseteqq\!\!\!\!/\, R_\varrho$ ist. Da dann

$$\mathbf{I}_\varrho b=\mathbf{I}_\sigma,\quad \bigcup_{\xi<\varrho}R_\xi b\subseteqq\bigcup_{\xi<\varrho}R_\xi,\quad \mathbf{R}_{\varrho+1}b\subseteqq\mathbf{R}_{\varrho+1}$$

ist, muß $R_\varrho b\supset R_\varrho$ gelten, also es gibt ein $a\in R_\varrho$ mit $ab\in R_\varrho$. Wäre nun $R_\varrho\subseteqq\!\!\!\!/\,\mathbf{L}_\varepsilon$, so wäre R_ϱ nach 3. 1 eine $\mathscr{Q}$-Klasse und dann folgt aus $a\in R_\varrho$, $ab\in R_\varrho$ wegen des bekannten Lemma von Green (S. [3]), daß $R_\varrho b=R_\varrho$ ist. Deshalb muß $R_\varrho\subseteqq L_\varepsilon$ sein. Dann ist aber $ae=a$ für ein beliebiges $a\in R_\varrho$ und wegen $e\in R(b)$ gibt es ein x mit $bx=e$, $abx=a$, also $ab\mathscr{R}a$, und damit $R_\varrho b\subseteqq R_\varrho$.

Um $ab\mathscr{L}a$ zu zeigen, bemerken wir, daß dies für $L(a)>L_\varepsilon$ schon aus dem gezeigten folgt, da für solche a nach 3. 2 $ab\mathscr{R}a\Rightarrow ab\mathscr{L}a$. Für $a\in L_\varepsilon$ haben wir wie oben $a=ae=abx$. Es sei $L_\alpha b\subseteqq L_{\alpha'}$ für $\alpha\geqq\varepsilon$. Wie beim Beweis von Satz 5, erhalten wir dann, daß $L_\alpha\to L_{\alpha'}$ die identische Abbildung für die $L_\alpha\leqq L_\varepsilon$ ist, also auch $ab\in L(a)$ besteht. Dies vollendet den Beweis.

Aus dem bewiesenen folgt unmittelbar

Satz 6. *Besteht in der geschichteten $\mathscr{I}$-Klasse I_σ jede $\mathscr{Q}$-Klasse aus einem Element, so ist I_σ eine Hauptidealhalbgruppe.*

In der Tat, nach 2. 10 und Satz 1 ist $H \setminus \mathbf{I}_{\sigma+1}$ eine Halbgruppe. Es ist leicht zu sehen, daß es sogar eine Hauptidealhalbgruppe ist und ihre einseitigen Ideale genau die Untermengen der Form $\mathbf{L} \setminus \mathbf{L}_{\sigma+1}$ bzw. $\mathbf{R} \setminus \mathbf{I}_{\sigma+1}$ sind, wo $\mathbf{L}$ ($\mathbf{R}$) ein beliebiges Links- (Rechts-) ideal mit $\mathbf{L} \supset \mathbf{I}_{\sigma+1}$ ($\mathbf{R} \supset \mathbf{I}_{\sigma+1}$) ist. Nach 3. 3 müßen die durch $a \in I_\sigma$ erzeugten rechtsseitigen Hauptideale in $H \setminus \mathbf{I}_{\sigma+1}$ und in I_σ zusammenfallen, da die von a verschiedenen rechtsseitigen Vielfachen von a nur durch Multiplikation mit einem $x \in I_\sigma$ entstehen können. Da aber jedes Rechtsideal die Vereinigung rechtsseitiger Hauptideale ist, sind die Rechtsideale in $H \setminus \mathbf{I}_{\sigma+1}$ und I_σ die gleiche, d.h. nur die Hauptideale. Das Duale folgt aus dem Dualen von 3. 3.

Betrachten wir jetzt eine Hauptidealhalbgruppe H, in der jede $\mathcal{Q}$-Klasse aus einem Element besteht und nehmen wir ein $b \in H$, welches in einer nichtgeschichteten $\mathcal{I}$-Klasse enthalten ist (und somit das einzige Element der letzteren ist). Liegt eine Potenz b^n von b in einer geschichteten $\mathcal{I}$-Klasse I_σ, so gilt nach 3. 3 $b^n a = ab^n = a$ für jedes $a \in I_\sigma$, also b^n ist das Einselement von I_σ.

Nehmen wir eine einfache Hauptidealhalbgruppe E mit Einselement, deren jede $\mathcal{Q}$-Klasse aus einem Element besteht, und eine zyklische Halbgruppe Z, die eine Periode der Länge 1 hat, d.h., für deren erzeugendes Element z die Gleichung $z^{n+1} = z^n$ $(n = o(Z))$ gilt. Eine Idealerweiterung von Z durch E nennen wir eine Halbgruppe vom Typ $Z \circ E$, falls z^n gleich dem Einselement von E ist und folglich $zx = xz = x$ für $x \in E$ gilt. Aus den oben gesagten erhielt man leicht:

Satz 7. *Jede Hauptidealhalbgruppe H, in der sämtliche $\mathcal{Q}$-Klassen aus je einem Element bestehen, läßt sich als die Vereinigung $\bigcup_{\alpha<\tau} H_\alpha$ einer wohlgeordneten Menge ihrer Unterhalbgruppen H_α darstellen, wo jede H_α zu einem der folgenden Typen gehört:*

a) *unendliche zyklische Halbgruppen,*

b) *endliche zyklische Halbgruppen mit einer Periode der Länge* 1,

c) *einfache Hauptidealhalbgruppen, in denen die $\mathcal{Q}$-Klassen aus einem Element bestehen,*

d) *Halbgruppen vom Typ $Z \circ E$,*

und das Produkt von Elementen aus verschiedenen H_α durch (9) *definiert ist. Umgekehrt, jede so beschaffene Halbgruppe ist eine Hauptidealhalbgruppe mit $\mathcal{Q}$-Klassen aus je einem Element.*

Literaturverzeichnis

[1] A. H. Clifford, Semigroups without nilpotent ideals, *Amer. J. Math.*, **71** (1949), 834—844.

[2] A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*. Vol. I (Providence, 1961).

[3] J. A. Green, On the structure of semigroups, *Annals of Math.*, **54** (1951), 163—172.

[4] Е. С. Ляпин, *Полугруппы* (Москва, 1960).

[5] D. D. Miller and A. H. Clifford, Regular D-classes in semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **82** (1956), 270—280.

(Eingegangen am 6. Juni 1967)