Über die Reflexivität gewisser Banachräume

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

1. Wir bezeichnen mit M die Klasse der Folgen $A=\{a_n\}_1^\infty$, für die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

bei jedem im Grundintervall (0, 1) orthonormierten System $\varphi=\{\varphi_n(x)\}$ fast überall konvergiert. Offensichtlich ist M mit den gewöhnlichen vektoriellen Operationen ein linearer Raum. Wir setzen

$$\|A\| = \lim_{N\to\infty} \left\{\sup_{\varphi} \int_0^1 \max_{1\leq i\leq j\leq N} (a_i\varphi_i(x)+\cdots+a_j\varphi_j(x))^2\,dx\right\}^{1/2},$$

wobei das Supremum für jedes in (0, 1) orthonormierte System φ gebildet ist.

In einer vorigen Arbeit [1] haben wir gezeigt, daß $A\in M$ mit $\|A\|<\infty$ äquivalent ist und daß M mit der Norm $\|A\|$ ein Banachraum ist.

In dieser Note werden wir Folgendes beweisen:

Satz. *Der Banachraum M ist reflexiv.*

2. Für eine Folge A bezeichne $A(i,j)$ $(1\leq i\leq j\leq\infty)$ die Folge $\underbrace{0,\cdots,0}_{i-1}, a_i, \cdots$ $\cdots, a_j, 0, \cdots$. Nach der Definition von $\|A\|$ gilt

$$\|A\| = \lim_{N\to\infty} \|A(1,N)\|. \tag{2}$$

Durch einfache Rechnung erhalten wir

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right\}^{1/2} \leq \|A\|, \tag{3}$$

$$\|A(i,j)\|\leq\|A\| \qquad (1\leq i\leq j\leq\infty). \tag{4}$$

Weiterhin gilt

$$\|A(N,\infty)\|\to 0 \qquad (N\to\infty;\ A\in M). \tag{5}$$

(Siehe [1], Satz IV.)

Wir bezeichnen mit E_n die Folge $\overbrace{0, \cdots, 0}^{n-1}, 1, 0, \cdots$ $(n=1, 2, \cdots)$. Es sei M^* der konjugierte Raum von M. Für $F \in M^*$ folgt aus (5)

$$\sum_{n=1}^{N} a_n F(E_n) = F(A(1, N)) \to F(A) \qquad (A \in M),$$

also gilt

$$F(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n \qquad (A \in M) \tag{6}$$

mit $f_n = F(E_n)$. Für $F \in M^*$ und für eine natürliche Zahl N setzen wir

$$F_N(A) = \sum_{n=1}^{N} a_n f_n \qquad (A \in M).$$

Offensichtlich ist $F_N \in M^*$ $N=1, 2, \cdots)$.

3. Wir benötigen den folgenden

Hilfssatz. *Für $F \in M^*$ gilt* $\|F - F_N\| \to 0$ $(N \to \infty)$.

Beweis. Es sei N eine natürliche Zahl und ε eine beliebige positive Zahl. Auf Grund von (6) gibt es zu ε eine Folge $A \in M$ mit $\|A\| \leqq 1$ und

$$\sum_{n=N+2}^{\infty} a_n f_n = (F - F_{N+1})(A) \geqq \|F - F_{N+1}\| - \varepsilon. \tag{7}$$

Auf Grund von (4) können wir $a_n = 0$ $(n = 1, \ldots, N+1)$ annehmen. So ist

$$\|F - F_N\| = \sup_{\|C\| \leqq 1} \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n f_n \geqq \sum_{n=N+2}^{\infty} a_n f_n. \tag{8}$$

Aus (7) und (8) ergibt sich

$$\|F - F_N\| \geqq \|F - F_{N+1}\| \qquad (N = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Weiterhin gilt offensichtlich

$$\|F_N\| \to \|F\| \qquad (N \to \infty; \quad F \in M^*). \tag{10}$$

Wir nehmen an, daß $\|F - F_N\| \nrightarrow 0$. Auf Grund von (9) und (10) gibt es eine positive Zahl ϱ und eine Indexfolge $(0=)N(0) < \cdots < N(k) < \cdots$ mit $\|F_{N(k+1)} - F_{N(k)}\| > \varrho$ $(k=0, 1, \cdots)$. (Hier ist $F_0 = O$; d.h. es gilt $F_0(A) = 0$ überall in M.) So existieren Folgen $C(k) (\in M) (k=0, 1, \cdots)$ mit $\|C(k)\| \leqq 1$ und

$$(F_{N(k+1)} - F_{N(k)})(C(k)) = \sum_{n=N(k)+1}^{N(k+1)} c_n(k) f_n > \varrho; \tag{11}$$

auf Grund von (4) können wir $c_n(k) = 0$ $(n = 1, \cdots, N(k), N(k+1)+1, \cdots)$ annehmen.

Wir setzen $a_n = c_n(k)/(k+1) \log (k+2)$ $(N(k) < n \leqq N(k+1);\ k=0, 1, \cdots)$. Für ein beliebiges, in $(0, 1)$ orthonormiertes System φ bezeichnen wir die n-te

Partialsumme der Reihe (1) mit $s_n(x)$. Aus (3) folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \|C(k)\|^2/(k+1)^2 \log^2 (k+2) < \infty. \tag{12}$$

Nach dem Riesz—Fischerschen Satz gibt es eine Funktion $f(x) \in L^2(0, 1)$ mit

$$\int_0^1 (s_n(x) - f(x))^2\, dx \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{13}$$

Für eine natürliche Zahl n sei k_0 derjenige Index, für welchen $N(k_0) < n \leqq N(k_0+1)$ gilt. Dann besteht offensichtlich

$$s_n^2(x) \leqq 3\big((s_n(x) - s_{N(k_0)}(x))^2 + (s_{N(k_0)}(x) - f(x))^2 + f^2(x)\big) \leqq$$

$$\leqq 3\left(\sum_{k=0}^{\infty} \max_{N(k)<n\leqq N(k+1)} (s_n(x) - s_{N(k)}(x))^2 + \sum_{k=0}^{\infty} (s_{N(k)}(x) - f(x))^2 + f^2(x)\right),$$

und so ist

$$\max_{1\leqq i\leqq j\leqq N} (s_j(x) - s_{i-1}(x))^2 \leqq$$

$$\leqq 12\left(\sum_{k=0}^{\infty} \max_{N(k)<n\leqq N(k+1)} (s_n(x) - s_{N(k)}(x))^2 + \sum_{k=0}^{\infty} (s_{N(k)}(x) - f(x))^2 + f^2(x)\right).$$

Auf Grund von (12) und (13) ergibt sich daraus

$$\|A\| \leqq 12\left(\sum_{k=0}^{\infty} \|A(N(k)+1, N(k+1))\|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=N(k)+1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right) \leqq$$

$$12\left(\sum_{k=0}^{\infty} \|C(k)\|^2/(k+1)^2 \log^2 (k+2) + \sum_{k=0}^{\infty} \|C(k)\|^2/(k+1) \log^2 (k+2) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right) < \infty.$$

Also gilt $A \in M$. Aus (11) folgt aber

$$F_{N(k)}(A) = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} \sum_{n=N(\varkappa)+1}^{N(\varkappa+1)} a_n f_n > \varrho \sum_{\varkappa=0}^{k-1} ((\varkappa+1) \log(\varkappa+2))^{-1} \to \infty \qquad (k \to \infty).$$

Damit haben wir den Hilfssatz bewiesen.

4. Beweis des Satzes. Aus der Definition von M, weiterhin aus (3) und (5) folgt, daß die Folge $\{E_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ eine Basis von M bildet. Auf Grund der Definition von M und (5) ist die folgende Bedingung erfüllt:

a) gilt für eine Folge A $\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k E_k\right\| \leqq K (< \infty)$ $(n = 1, 2, \cdots)$, dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k E_k$ in M konvergent. (Die Basis $\{E_n\}$ ist „boundedly complete".)

Weiterhin folgt aus dem Hilfssatz

b) $\lim\limits_{N\to\infty} \sup\limits_{\substack{\|A\|\leqq 1 \\ A \in B_{N+1}}} |F(A)| = 0$

für jedes lineare Funktional $F \in M^*$, wobei B_{N+1} den von den Elementen E_n $(n=N+1, \cdots)$ aufgespannten linearen Unterraum bezeichnet. (Die Basis $\{E_n\}$ ist „shrinking".) Aus a) und b), durch Anwendung eines Satzes von R. C. JAMES ([1], Satz I) ergibt sich die Reflexivität von M.

5. Es sei $\Lambda=\{\lambda_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ eine Folge von Zahlen mit $\lambda_n \geqq 1$, $\lambda_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Wir bezeichnen mit $M(\Lambda)$ die Klasse der Folgen A, für die die Reihe (1) bei jedem im Grundintervall (0, 1) orthonormierten System φ mit

$$\sup_{\nu} \int_0^1 \frac{1}{\lambda_{\nu(x)}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\nu(x)} \varphi_k(x)\varphi_k(t) \right| dt \right) dx \leqq 1 \tag{15}$$

fast überall konvergiert, wobei das Supremum für jede meßbare Funktion $\nu(x)$ mit natürlichen Zahlen als Werten gebildet wird. $M(\Lambda)$ ist mit den gewöhnlichen vektoriellen Operationen ein linearer Raum. Für eine Folge A setzen wir

$$\|A; \Lambda\| = \lim_{N\to\infty} \left(\sup_{\varphi} \int_0^1 \max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |a_i \varphi_i(x) + \cdots + a_j \varphi_j(x)| \, dx \right),$$

wobei das Supremum für jedes in (0, 1) orthonormierte System φ mit (15) gebildet ist.

In den Arbeiten [2], [3] haben wir gezeigt, daß $A \in M(\Lambda)$ mit $\|A; \Lambda\| < \infty$ äquivalent ist und daß $M(\Lambda)$ mit der Norm $\|A; \Lambda\|$ ein Banachraum ist.

Ähnlicherweise kann man beweisen, daß $M(\Lambda)$ *reflexiv ist.* (2) und (4) gelten nämlich auch für die Norm $\|A; \Lambda\|$; das Analogon von (5) haben wir in der Arbeit [3] bewiesen. Weiterhin, mit einer in [4] angewandten Methode kann man zeigen, daß

$$\|A; \Lambda\| \geqq c \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{1/2}$$

mit einer Konstante $c > 0$ besteht.

Schriftenverzeichnis

R. C. JAMES

[1] Bases and reflexivity of Banach spaces, *Annals of Math.*, **52** (1950), 518—527.

K. TANDORI

[1] Über die Konvergenz der Orthogonalreihen. II, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 219—232.

[2] Über die Konvergenz der Orthogonalreihen. III, *Publicationes Math. Debrecen*, **12** (1965), 127—157.

[3] Beitrag zu der Arbeit „Über die Konvergenz der Orthogonalreihen. III", *Publicationes Math. Debrecen*, **13** (1966), 307—311.

[4] Ergänzung zu einem Satz von S. Kaczmarz, *Acta Sci. Math.*, **28** (1964), 117—153.

(Eingegangen am 28. März 1968)