Ein Divergenzsatz für Fourierreihen

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

Herrn Profesor Georg Alexits zum 70. Geburtstag gewidmet

1. Für ein ε, $0 \leqq \varepsilon < 1$, ist $\Phi_\varepsilon(x) = x(\log\log(x+e^e))^\varepsilon$ eine in $[0, \infty)$ streng wachsende, nach unten konvexe Funktion, $\Phi_\varepsilon(0)=0$. Mit L_{Φ_ε} bezeichnen wir die Klasse der 2π-periodischen, meßbaren Funktionen f mit endlichem $\|f\|_{\Phi_\varepsilon} = \int_0^{2\pi} \Phi_\varepsilon(|f(x)|)dx$; $\tilde{f}$ bedeutet die zu f trigonometrisch-konjugierte Funktion.

V. I. PROCHORENKO [2] hat bewiesen, daß es eine Funktion f derart gibt, daß $f \in L_{\Phi_\varepsilon}$ für jedes ε, $0 \leqq \varepsilon < 1$, gilt, und die Fourierreihe von f fast überall divergiert.

Durch einfache Modifizierung eines Beispieles von KOLMOGOROFF [1] und mit Anwendung gewisser Ideen von STEIN [3], TAĬKOV [4] und YUNG-MING CHEN [5], werden wir die folgende, ziemlich schärfere Behauptung beweisen.

Satz. *Es gibt eine Funktion f derart, daß $f, \tilde{f} \in L_{\Phi_\varepsilon}$ für jedes ε gilt* $(0 \leqq \varepsilon < 1)$, *weiterhin die Fourierreihen von f und $\tilde{f}$ überall divergieren.*

Es seien $D_n(x)$ die n-te Dirichletsche und $K_n(x)$ die n-te Fejérsche Kernfunktion, ferner seien $D_n^*(x) = D_n(x) - \cos nx/2$. Bekanntlich hat man $D_n^*(x) = \sin nx \Big/ \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = \pi, \qquad 0 \leqq K_n(x) \leqq 2n \,(-\infty < x < \infty), \qquad K_n(x) \geqq c_1 n \quad \left(|x| \leqq \frac{\pi}{4n}\right).$$

($c_1, c_2, \cdots$ bezeichnen positive Konstanten.) Weiterhin sei

$$V_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx + \sum_{k=n+1}^{2n} \left(1 - \frac{k-n}{n+1}\right) \cos kx.$$

Durch eine Abelsche Umformung ergibt sich:

$$V_n(x) = \frac{2n+1}{n+1} K_{2n}(x) - K_n(x),$$

folglich gilt:

$$|V_n(x)| \leqq c_2 n \quad (-\infty < x < \infty), \qquad \int_0^{2\pi} |V_n(x)|\, dx \leqq c_3.$$

3. Es sei $\{\lambda_n\}$ eine monoton ins Unendliche strebende Folge von positiven Zahlen, für die

(1) $$\lambda_n = O((\log n)^\varepsilon)$$

bei jedem ε, $0 < \varepsilon \leqq 1$, besteht. Für $n \geqq 8$ setzen wir

$$f_n(x) = \frac{\lambda_n}{n \log n} \cdot$$

$$\left\{ \sum_{k=0}^{[n/2]} K_{[n/2]^2}\left(x - \frac{\pi}{n} k\right) + (\cos 8 \cdot 2nx + \cos 2 \cdot 8 \cdot 2nx) \sum_{k=n+1}^{n+[n/2]} V_{8^k n}\left(x - \frac{2\pi}{n}(k-n)\right)\right\}.$$

($[n/2]$ bezeichnet den ganzen Teil von $n/2$.) Nach den obigen gilt

(2) $$|f_n(x)| \leqq c_4 8^{2n},$$

(3) $$\int_0^{2\pi} |f_n(x)|\, dx \leqq c_5 \lambda_n / \log n.$$

Die m-te Partialsumme der Fourierreihe einer Funktion g bezeichnen wir mit $s_m(g; x)$. Es sei

$$G_n = \bigcup_{k=0}^{[n/2]} \left[\frac{\pi}{n} k - \frac{\pi}{n^2}, \frac{\pi}{n} k + \frac{\pi}{n^2}\right].$$

Offensichtlich ist

(4) $$s_{[n/2]^2}(f_n; x) \geqq c_6 \lambda_n \qquad (x \in G_n).$$

Wir setzen

$$g_n(x) = \frac{\lambda_n}{n \log n} \sum_{k=n+1}^{n+[n/2]} V_{8^k n}\left(x - \frac{2\pi}{n}(k-n)\right).$$

Es sei $1 \leqq k_0 \leqq [n/4]$ eine ganze Zahl und $\frac{2\pi}{n}(k_0 - 1) < x < \frac{2\pi}{2} k_0$. Für positive ganze Zahlen a und m mit

(5) $$2 \cdot 8^{k_0+n-1} n < mn - an < mn + an < 8^{k_0+n} n$$

erhalten wir durch eine einfache Rechnung

(6) $$s_{mn+an}(g; x) - s_{mn-an-1}(g; x) =$$

$$= \frac{\lambda_n}{n \log n} \sum_{k=n+k_0}^{n+[n/2]} \sum_{l=mn-an}^{mn+an} \cos l\left(x - \frac{2\pi}{n}(k-n)\right) =$$

$$= \frac{\lambda_n}{2n \log n} \sum_{k=n+k_0}^{n+[n/2]} \cos mn\left(x - \frac{2\pi}{n}(k-n)\right) D_{an}\left(x - \frac{2\pi}{n}(k-n)\right) =$$

$$= \frac{\lambda_n \cos mnx}{2n \log n} \sum_{k=n+k_0}^{n+[n/2]} D_{an}^* \left(x - \frac{2\pi}{n}(k-n)\right) +$$

$$+ \frac{\lambda_n \cos mnx}{4n \log n} \sum_{k=n+k_0}^{n+[n/2]} \cos an \left(x - \frac{2\pi}{n}(k-n)\right) =$$

$$= \frac{\lambda_n \cos mnx \sin anx}{2n \log n} \sum_{k=n+k_0}^{n+[n/2]} \left(\operatorname{tg} \frac{x-2\pi(k-n)/n}{2}\right)^{-1} +$$

$$+ \frac{\lambda_n \cos mnx}{4n \log n} \sum_{k=n+k_0}^{n+[n/2]} \cos anx = S_1(x) + S_2(x).$$

Offensichtlich gilt

(7) $$|S_2(x)| \leqq c_7 \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Für $n+k_0 \leqq k \leqq n+[n/2]$ ist $-\pi < x - 2\pi(n-k)/n < 0$, und so, auf Grund der Ungleichung $|\operatorname{tg} x| \leqq \sqrt{2}|x|$ $(|x| \leqq \pi/4)$, ergibt sich

(8) $$|S_1(x)| \geqq \frac{\lambda_n |\cos mnx \cdot \sin anx|}{2n \log n} \sum_{k=n+k_0}^{n+[n/4]}{}' \left|\operatorname{tg} \frac{x-2\pi(n-k)/n}{2}\right|^{-1} \geqq$$

$$\geqq c_8 \lambda_n |\cos mnx \cdot \sin anx|.$$

Wir beweisen, daß

(9) $$\max |\cos m\, nx \sin anx| \geqq c_9$$

für $x \in \left[\frac{2\pi}{n}(k_0-1), \frac{2\pi}{n}k_0\right] - G_n$ besteht, wobei das Maximum für positive Zahlen a, m mit (5) gebildet ist. Um (9) zu beweisen, nehmen wir $\frac{2\pi}{n}(k_0-1) + \frac{\pi}{n^2} < x < \frac{2\pi}{n}(k_0-1) + \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n^2}$ an. Ist

(10) $$\frac{2\pi}{n}(k_0-1) + s\frac{\pi}{n^2} \leqq x < \frac{2\pi}{n}(k_0-1) + (s+1)\frac{\pi}{n^2}$$

mit $\frac{n}{4} \leqq s \leqq \frac{3n}{4} - 1$, dann gilt $\sin\frac{\pi}{4} \leqq \sin nx$. Es sei $m_0 = (2.\ 8^{k_0+n-1}n + 2n)/n$. Für $m = m_0$, $a = 1$, bzw. für $m = 2m_0$, $a = 1$ ist (5) offensichtlich erfüllt; weiterhin gilt $\max(|\cos mnx|, |\cos 2mnx|) \geqq c_{10}$ überall. So ist $\max(|\cos m_0\, nx \cdot \sin anx|, \cos 2m_0 nx \cdot \sin anx|) \geqq c_{11}$, woraus (9) im Falle (10) mit $n/4 \leqq s \leqq 3n/4 - 1$ folgt. Gilt aber (10) mit $1 \leqq s < n/4$, so gibt es eine positive ganze Zahl c mit $n/4 \leqq 2cs \leqq \frac{3n}{4} - 1$ und $2c \leqq n$. Dann ist $\sin\frac{4}{\pi} \leqq \sin 2cnx$. Es sei nun $m_0 = (2.8^{k_0+n-1}n + 4cn)/n$.

Für $m=m_0, a=2c$, bzw. für $m=2m_0$, $a=2c$ ist (5) offensichtlich erfüllt, woraus (9) im Falle (10) mit $1\leqq s<n/4$ folgt. Da

$$\left|\sin an\left(\frac{2\pi}{n}(k_0-1)+\frac{\pi}{2n}-x\right)\right| = \left|\sin an\left(\frac{2\pi}{n}(k_0-1)+\frac{\pi}{2n}+x\right)\right| \qquad (a=1, a=2c)$$

besteht, gilt also (9) überall in dem Intervall

$$\left[\frac{2\pi}{n}(k_0-1)+\frac{\pi}{n^2}, \frac{2\pi}{n}(k_0-1)+\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n^2}\right].$$

Im Falle $\frac{2\pi}{n}(k_0-1)+\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{n^2}<x<\frac{2\pi}{n}k_0-\frac{\pi}{n^2}$ folgt (9) aus

$$\left|\sin an\left(\frac{2\pi}{n}(k_0-1)+\frac{\pi}{n}-x\right)\right| = \left|\sin an\left(\frac{2\pi}{n}(k_0-1)+\frac{\pi}{n}+x\right)\right|.$$

Aus der Definition von $f_n(x)$ und aus (2), (6), (7), (8), (9) folgt

(11) $$\max_m |s_m(f_n; x)| \geqq c_{12}\lambda_n \qquad (x\in[0, \pi/4]).$$

Wir setzen

$$P_n(x) = (\cos 8^{3^n}x+\cos 2\cdot 8^{3^n}x+\sin 3\cdot 8^{3^n}x+\sin 6\cdot 8^{3^n}x)f_n(x).$$

$P_n(x)$ ist ein trigonometrisches Polynom:

(12) $$P_n(x) = \sum_{k=8^{3^n}-4\cdot 8^{2^n}}^{6\cdot 8^{3^n}+4\cdot 8^{2^n}} (a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Offensichtlich gilt

$$\tilde{P}_n(x) = (\sin 8^{3^n}x+\sin 2\cdot 8^{3^n}x-\cos 3\cdot 8^{3^n}x-\cos 6\cdot 8^{3^n}x)f_n(x).$$

Für ein ε $(0\leqq\varepsilon<1)$ aus (1), (2), (3) und (11) folgt also

(13) $$\|P_n\|_{\Phi_\varepsilon}\leqq c_{13}, \quad \|\tilde{P}_n\|_{\Phi_\varepsilon}\leqq c_{13} \qquad (n=8, 9, \ldots),$$

(14) $$\max_m |s_m(P_n; x)|\geqq c_{14}\lambda_n, \quad \max_m |s_m(\tilde{P}_n; x)|\geqq c_{14}\lambda_n \qquad (x\in[0, \pi/4]).$$

4. Es sei $(8\leqq)n_1<\cdots<n_k<\cdots$ eine Indexfolge mit $\lambda_{n_k}\geqq k^3$ $(k=1, 2, \cdots)$. Mit Rademacherschen Funktionen $r_k(t)=\operatorname{sign}\sin 2^n\pi x$ bilden wir die Reihen

(15) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}r_k(t)P_{n_k}\left(x+\frac{\pi}{4}k\right),$$

(16) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}r_k(t)\tilde{P}_{n_k}\left(x+\frac{\pi}{4}k\right),$$

die ν-ten Partialsummen dieser Reihen bezeichnen wir mit $R_\nu(x, t)$, bzw. mit $\tilde{R}_\nu(x, t)$.

Aus (13) ergeben sich

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \Phi_\varepsilon\left(\frac{1}{k^3}\left|r_k(t)P_{n_k}\left(x+\frac{\pi}{4}k\right)\right|\right)dx\,dt \leqq c_{13}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}<\infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \Phi_\varepsilon\left(\frac{1}{k^3}\left|r_k(t)\tilde{P}_{n_k}\left(x+\frac{\pi}{4}k\right)\right|\right)dx\,dt \leqq c_{13}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}<\infty,$$

woraus, wegen $\Phi_\varepsilon(x)\geqq x$, erhalten wir, daß die Reihen (15), (16) bei fast jedem t fast überall zu einer Funktion $f_t(x)$, bzw. $\tilde{f}_t(x)$ konvergieren. Da $\psi_\varepsilon(x)=\Phi_\varepsilon(\sqrt{x})$ eine nach unten konkave Funktion ist, ergibt sich durch Anwendung der Jensenschen Ungleichung

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \Phi_\varepsilon(|R_\mu(x,t)-R_\nu(x,t)|)\,dx\,dt = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \Phi_\varepsilon(|R_\mu(x,t)-R_\nu(x,t)|)\,dt\right)dx =$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \psi_\varepsilon(|R_\mu(x,t)-R_\nu(x,t)|^2)\,dt\right)dx \leqq \int_0^{2\pi}\psi_\varepsilon\left(\int_0^1 (R_\mu(x,t)-R_\nu(x,t))^2\,dt\right)dx=$$

$$=\int_0^{2\pi}\psi_\varepsilon\left(\sum_{k=\nu+1}^{\mu}\frac{1}{k^6}P_{n_k}^2\left(x+\frac{\pi}{4}k\right)\right)dx \leqq \sum_{k=\nu+1}^{\mu}\int_0^{2\pi}\psi_\varepsilon\left(\frac{1}{k^6}P_{n_k}^2\left(x+\frac{\pi}{4}k\right)\right)dx =$$

$$=\sum_{k=\nu+1}^{\mu}\int_0^{2\pi}\Phi_\varepsilon\left(\frac{1}{k^3}\left|P_{n_k}\left(x+\frac{\pi}{4}k\right)\right|\right)dx \leqq c_{13}\sum_{k=\nu+1}^{\mu}\frac{1}{k^3}\leqq c_{15}\frac{1}{\nu^2}\quad(\nu<\mu).$$

Für $\mu\to\infty$ erhalten wir

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \Phi_\varepsilon(|f_t(x)-R_\nu(x,t)|)\,dx\,dt \leqq c_{15}\frac{1}{\nu^2}\quad(\nu=1,2,\ldots).$$

Daraus folgt

$$\int_0^{2\pi}\Phi_\varepsilon(|f_t(x)-R_\nu(x,t)|)\,dx\to 0\qquad(\nu\to\infty)$$

bei fast jedem t. Wegen $\Phi_\varepsilon(2x)\leqq c_{16}\Phi_\varepsilon(x)$ ist $R_\nu(x,t)\in L_{\Phi_\varepsilon}$, und so gilt $f_t(x)\in L_{\Phi_\varepsilon}$ bei fast jedem t. Da $\Phi_\varepsilon(x)\geqq x$ ist, gilt auch

$$\int_0^{2\pi}|f_t(x)-R_\nu(x,t)|\,dx\to 0\qquad(\nu\to\infty)$$

bei fast jedem t. Ähnliche Behauptungen können wir auch für die Reihe (16) beweisen.

Es gibt also eine Zahl t_0 derart, daß die Reihen (15) und (16) in der Norm von $L(0,2\pi)$ gegen den Funktionen $f_{t_0}(x)$ bzw. $\tilde{f}_{t_0}(x)$ konvergieren; weiterhin gelten $f_{t_0}(x),\tilde{f}_{t_0}(x)\in L_{\Phi_\varepsilon}$; wir können auch $r_k(t_0)\neq 0$ $(k=1,2,\cdots)$ annehmen. Aus (12) folgt, daß die Reihen (15) und (16) im Falle $t=t_0$ die Fourierreihen von

$f_{t_0}(x)$, bzw. von $\tilde{f}_{t_0}(x)$ sind, und $\tilde{f}_{t_0}(x)$ die konjugierte Funktion von $f_{t_0}(x)$ ist. Aus (14) erhalten wir weiterhin, daß für die Funktion $f(x)=f_{t_0}(x)$ auch die übrigen Forderungen des Satzes erfüllt sind.

5. Mit einer kleinen Modifizierung des obigen Beweises können wir auch die folgenden Behauptungen beweisen.

Es sei $0 \leqq \varepsilon < 1$ *und* $\{\mu_n\}$ *eine Folge von positiven Zahlen mit* $\mu_n = O((\log\log n)^{1-\varepsilon})$. *Dann gibt es eine Funktion* $f \in L_{\Phi_\varepsilon}$ *mit* $\tilde{f} \in L_{\Phi_\varepsilon}$ *derart, daß überall gilt:*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |s_n(f; x)|/\mu_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} |s_n(\tilde{f}; x)|/\mu_n = \infty.$$

(Verschärfung eines Satzes von Yung-Ming Chen [5].)

Es sei $0 \leqq \varepsilon < 1$ *und* $\{\mu_n\}$ *eine Folge von positiven Zahlen mit* $\mu_n = O((\log n)^{1-\varepsilon})$. *Dann gibt es eine Funktion* $f \in L_{\Phi_\varepsilon}$ *mit* $\tilde{f} \in L_{\Phi_\varepsilon}$ *derart, daß überall gilt:*

$$\overline{\lim_{m,n\to\infty}} |s_m(f; x) - s_n(f; x)|/\mu_{|m-n|} = \overline{\lim_{m,n\to\infty}} |s_m(\tilde{f}; x) - s_n(\tilde{f}; x)|/\mu_{|m-n|} = \infty.$$

(Verschärfung eines Satzes von Stein [3].)

Schriftenverzeichnis

[1] A. N. Kolmogoroff, Une série de Fourier—Lebesgue divergente partout, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **183** (1926), 1327—1328.

[2] В. И. Прохоренко, О расходящихся рядах Фурье, *Матем. Сборник*, **75 (117)** (1968), 185—195.

[3] E. M. Stein, On limits of sequences of operators, *Annals of Math*,. **74** (1961), 140—170.

[4] Л. В. Тайков, О расходимости рядов Фурье, *Доклады АН СССР*, **137** (1961), 782—785.

[5] Yung-Ming Chen, On Kolmogoroff's divergent Fourier series, *Archiv der Math.*, **14** (1963), 116—119.

(Eingegangen am 28. Mai 1968)