Über die starke Summation von Walsh—Fourierreihen

Von FERENC SCHIPP in Budapest

Einleitung

Wir bezeichnen mit $x=0, x_0 x_1 \cdots x_n \cdots$ die dyadische Entwicklung der Zahl $x \in [0, 1)$, wobei wir festsetzen, daß für $x = p2^{-q}$ alle x_i $(i \geqq q)$ gleich 0 sind.

Das Rademachersche System $\{r_n(x)\}$ ist folgenderweise definiert:

(1) $$r_n(x) = (-1)^{x_n} \qquad (x \in [0, 1);\ n = 0, 1, 2, \cdots).$$

Wir bezeichnen mit $\{\psi_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ das Walshsche Orthogonalsystem, d.h. es ist $\psi_0(x) \equiv 1$, und

(2) $$\psi_n(x) = \prod_{n_i = 1} r_i(x) \quad \text{für} \quad n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i \quad (n_i = 0, 1).$$

Auf Grund von (1) und (2) folgt

(3) $$\psi_n(x) = (-1)^{\sum_{i=0}^{\infty} n_i x_i}.$$

N. J. FINE [1] hatte die folgende Operation eingeführt: es sei

(4) $$x \dotplus y = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^{i+1}}$$

$$\text{für } x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}}, \qquad y = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y_i}{2^{i+1}} \ (x_i, y_i = 0, 1).$$

Es ist leicht zu verifizieren, daß die Gleichung

(5) $$\psi_n(x \dotplus y) = \psi_n(x)\psi_n(y)$$

mit Ausnahme einer abzählbaren Teilmenge von $[0, 1)$ überall besteht.

Für $n = 1, 2, \ldots$ bezeichne $D_n(x)$ die n-te Walsh—Dirichletsche Kernfunktion:

(6) $$D_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \psi_\nu(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

und für $n=0$ sei $D_0(x)\equiv 0$. Es ist leicht zu zeigen, daß für $n=2^k+n'$ $(0<n'\leqq 2^k)$

$$D_n(x) = D_{2^k}(x)+r_k(x)D_{n'}(x) \tag{7}$$

gilt, woraus sich für $n'=2^k$ die Gleichung

$$D_{2^{k+1}}(x) = \prod_{\nu=0}^{k}(1+r_\nu(x)) = \begin{cases} 2^{k+1} & \left(x\in\left[0,\frac{1}{2^{k+1}}\right)\right) \\ 0 & \left(x\in\left[\frac{1}{2^{k+1}},1\right)\right) \end{cases} \tag{8}$$

ergibt.

Wir bezeichnen mit $S_n(f;x)$ die n-te Partialsumme der Walsh—Fourier-Entwicklung von $f(x)$, d.h.

$$S_n(f;x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu(f)\psi_\nu(x) = \int_0^1 f(x\dotplus u)D_n(u)\,du, \quad c_\nu(f) = \int_0^1 f(u)\psi_\nu(u)\,du. \tag{9}$$

In dieser Arbeit werden wir den folgenden Satz beweisen.

Satz. *Für* $f(x)\in L[0,1]$ *gilt fast überall*

$$h_n(f,x;2) = \left\{\frac{1}{n}\sum_{\mu=0}^{n-1}|S_\mu(f;x)-f(x)|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

Ähnlicherweise kann man zeigen, daß $h_n(f,x;2m)\to 0$ $(n\to\infty)$ *für jede positive, ganze Zahl m fast überall besteht.* Daraus folgt $h_n(f,x;r)\to 0$ $(n\to\infty)$ *fast überall für jedes* $r>0$.

A. Zygmund [2] hat einen analogen Satz für trigonometrische Fourierreihen bewiesen.

§1. Hilfssätze

Hilfssatz I. *Es sei*

$$D_n^*(u;l,k) = \sum_{i=l}^{k-1}\psi_n\left(u\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\right)r_i\left(u\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\right)D_{2^i}\left(u\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\right) \tag{1.1}$$

$(0\leqq l<k,\ n=0,1,2,\ldots)$. *Dann besteht fast überall:*

$$D_n(u) = \tfrac{1}{2}\big(D_{2^k}(u)-\psi_n(u)\big)+\tfrac{1}{2}D_n^*(u;0,k) \qquad (n=0,1,\ldots). \tag{1.2}$$

Beweis von Hilfssatz I. In der Arbeit [3] haben wir bewiesen, daß für

$$n=\sum_{i=0}^{k-1}n_i 2^i \qquad (n_i=0,1)$$

die Gleichung

$$D_n(u) = \psi_n(u)\sum_{i=0}^{k-1}n_i r_i(u)D_{2^i}(u) \qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{1.3}$$

besteht. Aus (3) folgt

$$\tfrac{1}{2}\left(1-\psi_n\left(\frac{1}{2^{i+1}}\right)\right) = \tfrac{1}{2}(1-(-1)^{n_i}) = n_i,$$

woraus sich, auf Grund von (1), (5) und (1. 3) die Gleichung

$$(1.4) \qquad D_n(u) = \tfrac{1}{2}\psi_n(u)\sum_{i=0}^{k-1} r_i(u)D_{2^i}(u)+\tfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1}\psi_n\left(u\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\right)r_i\left(u\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\right)D_{2^i}(u)$$

fast überall ergibt. Da nach (8) $D_{2^i}(u)=D_{2^i}\left(u\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\right)$ ist, weiterhin aus (8) und (1.3) folgt

$$\sum_{i=0}^{k-1} r_i(u)D_{2^i}(u) = \psi_{2^k-1}(u)D_{2^k-1}(u) = \psi_{2^k-1}(u)\left(D_{2^k}(u)-\psi_{2^k-1}(u)\right) = D_{2^k}(u)-1,$$

so erhalten wir auf Grund von (8) und (1. 1) aus (1. 4) die zu beweisende Gleichung:

$$D_n(u) = \tfrac{1}{2}\psi_n(u)\left(D_{2^k}(u)-1\right)+\tfrac{1}{2}D_n^*(u;0,k) = \tfrac{1}{2}\left(D_{2^k}(u)-\psi_n(u)\right)+\tfrac{1}{2}D_n^*(u;0,k).$$

Hilfssatz II. *Es sei*

$$K_{2^k}(u,v;l) = 2^{-k}\sum_{n=0}^{2^k-1} D_n^*(u;l,k)D_n^*(v;l,k) \qquad (0\leqq l<k, \quad k=0,1,2,\ldots).$$

Dann besteht

$$(1.5) \quad K_{2^k}(u,v;l) = 2^{-k}\sum_{i,j=l}^{k-1} r_i(u)D_{2^i}(u)r_j(v)D_{2^j}(v)D_{2^k}\left(u\dotplus v\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\dotplus\frac{1}{2^{j+1}}\right)$$

fast überall in $E_2=\{(u,v)\colon 0\leqq u<1,\ 0\leqq v<1\}$.

Beweis von Hilfssatz II. Aus (5) und (1. 1) folgt, daß

$$2^kK_{2^k}(u,v;l) = \sum_{n=0}^{2^k-1}\left(\sum_{i=l}^{k-1}\psi_n\left(u\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\right)r_i(u)D_{2^i}(u)\right)\left(\sum_{j=l}^{k-1}\psi_n\left(v\dotplus\frac{1}{2^{j+1}}\right)r_j(v)D_{2^j}(v)\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{2^k-1}\sum_{i,j=l}^{k-1}\psi_n\left(u\dotplus v\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\dotplus\frac{1}{2^{j+1}}\right)r_i(u)D_{2^i}(u)r_j(v)D_{2^j}(v) =$$

$$=\sum_{i,j=l}^{k-1} r_i(u)D_{2^i}(u)r_j(v)D_{2^j}(v)\sum_{n=0}^{2^k-1}\psi_n\left(u\dotplus v\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\dotplus\frac{1}{2^{j+1}}\right) =$$

$$=\sum_{i,j=l}^{k-1} r_i(u)D_{2^i}(u)r_j(v)D_{2^j}(v)D_{2^k}\left(u\dotplus v\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\dotplus\frac{1}{2^{j+1}}\right)$$

fast überall in E_2 besteht, womit die Behauptung (1. 5) bewiesen ist.

Zum Beweis unseres Satzes haben wir ein Hilfssatz von S. IGARI [4], [5] nötig, den wir in der folgenden modifizierten Form anwenden.

Hilfssatz III. *Es sei $f(u) \in L[0, 1]$. Dann gibt es für jede Zahl $M > \int_0^1 |f(u)|\,du$ ein System $\{I_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ von dyadischen Intervallen und zwei Funktionen $f_1(u)$ und $w(u)$ derart, daß die folgenden Relationen gelten:*

a) $I_\nu = \left[\frac{a_\nu}{2^{m_\nu}}, \frac{a_\nu+1}{2^{m_\nu}}\right) \quad (a_\nu < 2^{m_\nu}, \quad a_\nu \in G, \quad \nu = 1, 2, \ldots),$ [1]

$I_\nu \cap I_{\nu'} = \emptyset \qquad (\nu \neq \nu');$

b) $f(u) = f_1(u) + w(u), \qquad w(u) = \sum_{\nu=1}^{\infty} w_\nu(u);$

c) $w_\nu(u) = 0 \quad (u \notin I_\nu), \qquad \int_{I_\nu} w_\nu(u)\,du = 0, \qquad \int_{I_\nu} |w_\nu(u)|\,du \leqq 4M|I_\nu|;$ [2]

d) $|f_1(u)| \leqq 2M$ *(fast überall in* $[0, 1]$*)*;

e) $\sum_{\nu=1}^{\infty} |I_\nu| \leqq \frac{1}{M} \int_0^1 |f(u)|\,du.$

Auf Grund des Beweises von Lemma 1 in [4] kann man Hilfssatz III leicht zeigen.

Hilfssatz IV. *Es sei $\{I_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ ein System von disjunkten dyadischen Intervallen mit $I_\nu = \left[\frac{a_\nu}{2^{m_\nu}}, \frac{a_\nu+1}{2^{m_\nu}}\right)$ $(a_\nu < 2^{m_\nu}, a_\nu \in G)$ und es sei weiterhin*

$$(1.6)\qquad \begin{cases} \varphi_\nu(u) = \begin{cases} |I_\nu| & (u \in I_\nu), \\ 0 & (u \in [0, 1) - I_\nu) \end{cases} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots); \\ \Phi_j(u) = \sum_{|I_\nu| \leqq 2^{-j}} \varphi_\nu(u) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots); \end{cases}$$

$$w^*(u) \geqq 0 \text{ für } u \in \bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_\nu, \text{ und } w^*(u) = 0 \text{ für } u \in [0, 1) - \bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_\nu;$$

$$\Psi_i(x) = \Psi_i(w^*; x) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{j=m_\nu}^{\infty} \int_0^1 w^*(u) D_{2^j}\left(x \dot{+} u \dot{+} \frac{1}{2^{i+1}}\right) \Phi_{m_\nu}\left(u \dot{+} \frac{1}{2^{i+1}} \dot{+} \frac{1}{2^{j+1}}\right) du & \text{für } x \dot{+} \frac{1}{2^{i+1}} \in I_\nu, \\ 0 & \text{für } x \dot{+} \frac{1}{2^{i+1}} \notin \bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_\nu. \end{cases}$$

---

[1] G bedeutet die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen.

[2] $|I_\nu|$ bedeutet das Lebesguesche Maß von I_ν.

Dann besteht in fast allen Punkten $x \in F = [0, 1) - \bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_\nu$

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \int_0^1 D_{2^i}^2(x \dotplus u)\Phi_0(u)\,du = N_1(x) < \infty,$

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} 2^i \sum_{j=i+1}^{\infty} \int_0^1 D_{2^j}\left(x \dotplus u \dotplus \frac{1}{2^{i+1}}\right)\Phi_j(u)\,du = N_2(x) < \infty,$

c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} 2^i \Psi_i(x) = N_3(x) < \infty.$

Beweis von Hilfssatz IV. Nach dem Satz von Fubini gilt

$$A_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \int_F \left(\int_0^1 D_{2^i}^2(x \dotplus u)\Phi_0(u)\,du \right) dx = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i \int_0^1 \Phi_0(u) \left(\int_F D_{2^i}(x \dotplus u)\,dx \right) du =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} 2^i \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{I_\nu} \varphi_\nu(u) \left(\int_F D_{2^i}(x \dotplus u)\,dx \right) du.$$

Da

$$\text{(1.7)} \qquad \begin{cases} D_{2^i}(x \dotplus u) = 0 \quad (u \in I_\nu,\ x \notin I_\nu,\ i \geqq m_\nu), \\ \displaystyle\int_F D_{2^i}(x \dotplus u)\,dx \leqq \int_0^1 D_{2^i}(x \dotplus u)\,dx = 1, \end{cases}$$

deshalb ist auf Grund von (1. 6)

$$A_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{m_\nu - 1} 2^i \int_{I_\nu} \varphi_\nu(u) \left(\int_F D_{2^i}(x \dotplus u)\,dx \right) du \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} |I_\nu|^2 \sum_{i=0}^{m_\nu - 1} 2^i < \sum_{\nu=1}^{\infty} |I_\nu| < 1,$$

woraus nach dem Satz von B. Levi die Behauptung a) folgt.

Ähnlich ergibt sich b):

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^i \sum_{j=i+1}^{\infty} \int_F \left(\int_0^1 D_{2^j}\left(x \dotplus u \dotplus \frac{1}{2^{i+1}}\right) \Phi_j(u)\,du \right) dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} 2^i \sum_{j=i+1}^{\infty} \int_0^1 \Phi_j(u) \left(\int_F D_{2^j}\left(x \dotplus u \dotplus \frac{1}{2^{i+1}}\right) dx \right) du =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} 2^i \sum_{j=i+1}^{\infty} \sum_{|I_\nu| \leqq \frac{1}{2^j}} \int_0^1 \varphi_\nu(u) \left(\int_F D_{2^j}\left(x \dotplus u \dotplus \frac{1}{2^{i+1}}\right) dx \right) du =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{m_\nu - 1} 2^i \sum_{j=i+1}^{m_\nu} |I_\nu|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} |I_\nu| \sum_{i=0}^{m_\nu - 1} 2^{i-m_\nu}(m_\nu - i) < \left(\sum_{j=1}^{\infty} j 2^{-j} \right) \sum_{\nu=1}^{\infty} |I_\nu| < 4.$$

Aus (1. 6) folgt
$$\int_F \Psi_i(x)\,dx = \int_{F\dot{+}\frac{1}{2^{i+1}}} \Psi_i\left(x\dot{+}\frac{1}{2^{i+1}}\right)dx\ ^{3)} =$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j\geqq m_\nu}\int_{\left(F\dot{+}\frac{1}{2^{i+1}}\right)\cap I_\nu}\left(\int_0^1 w^*(u)D_{2^j}(x\dot{+}u)\Phi_{m_\nu}\left(u\dot{+}\frac{1}{2^{i+1}}\dot{+}\frac{1}{2^{j+1}}\right)du\right)dx =$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j\geqq m_\nu}\int_0^1 w^*(u)\Phi_{m_\nu}\left(u\dot{+}\frac{1}{2^{i+1}}\dot{+}\frac{1}{2^{j+1}}\right)\left(\int_{\left(F\dot{+}\frac{1}{2^{i+1}}\right)\cap I_\nu} D_{2^j}(x\dot{+}u)\,dx\right)du.$$

Da im Falle $x\in I_\nu$, $u\notin I_\nu$, $j\geqq m_\nu$ $D_{2^j}(x\dot{+}u)=0$ gilt, deshalb ist

$$\int_F \Psi_i(x)\,dx=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j\geqq m_\nu}\int_{I_\nu} w^*(u)\Phi_{m_\nu}\left(u\dot{+}\frac{1}{2^{i+1}}\dot{+}\frac{1}{2^{j+1}}\right)\left(\int_{\left(F\dot{+}\frac{1}{2^{i+1}}\right)\cap I_\nu} D_{2^i}(x\dot{+}u)\,dx\right)du =$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j\geqq m_\nu}\int_{I_{\nu'}\dot{+}\frac{1}{2^{i+1}}\subset I_\nu}|I_{\nu'}|\int_{I_{\nu'}\dot{+}\frac{1}{2^{i+1}}\dot{+}\frac{1}{2^{j+1}}} w^*(u)\left(\int_{\left(F\dot{+}\frac{1}{2^{i+1}}\right)\cap I_\nu} D_{2^j}(x\dot{+}u)\,dx\right)du.$$

Da endlich
$$\left(F\dot{+}\frac{1}{2^{i+1}}\right)\cap I_\nu=\emptyset\quad(i\geqq m_\nu)$$
und
$$D_{2^j}(x\dot{+}u)=0\quad\left(x\in F\dot{+}\frac{1}{2^{i+1}},\ u\in I_{\nu'}\dot{+}\frac{1}{2^{i+1}}\dot{+}\frac{1}{2^{j+1}},\ j\geqq m_{\nu'}\right)$$
gilt, so erhalten wir auf Grund von (1. 7)
$$\sum_{i=0}^{\infty}2^i\int_F \Psi_i(x)\,dx =$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{m_\nu-1}2^i\sum_{I_{\nu'}\dot{+}\frac{1}{2^{i+1}}\subset I_\nu}|I_{\nu'}|\sum_{j=m_\nu}^{m_{\nu'}-1}\int_{I_{\nu'}\dot{+}\frac{1}{2^{i+1}}\dot{+}\frac{1}{2^{j+1}}} w^*(u)\left(\int_{F\dot{+}\frac{1}{2^{i+1}}\cap I_\nu} D_{2^j}(x\dot{+}u)\,dx\right)du \leqq$$

$$\leqq\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{m_\nu-1}2^i\sum_{I_{\nu'}\dot{+}\frac{1}{2^{i+1}}\subset I_\nu}|I_{\nu'}|\int_{I_\nu} w^*(u)\,du \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\int_{I_\nu} w^*(u)\,du\right)\sum_{i=0}^{m_\nu-1}2^i\,|I_\nu| \leqq$$

$$\leqq\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{I_\nu} w^*(u)\,du=\int_0^1 w^*(u)\,du,$$

womit auch c) bewiesen ist.

---

3) $F\dot{+}\frac{1}{2^{i+1}}$ bezeichnet die Menge $\left\{x\dot{+}\frac{1}{2^{i+1}};\ x\in F\right\}$.

§2. Beweis des Satzes

Es sei $M > \int_0^1 |f(u)|du$ eine beliebige positive Zahl. Durch Anwendung von Hilfssatz III und auf Grund der Minkowskischen Ungleichung ergibt sich

$$h_n(f, x; 2) \leqq h_n(f_1, x; 2) + h_n(w, x; 2), \tag{2. 1}$$

wobei auf Grund von Hilfssatz III d) $h_n(f_1, x; 2) = o(1)$ (f.ü.a. in [0, 1]) besteht. (Siehe [6] oder [7].) Für $2^{k(n)-1} < 2^n \leqq 2^{k(n)}$ gilt $h_n(w, x; 2) \leqq \sqrt{2}\, h_{2^{k(n)}}(w, x; 2)$, weiterhin nach (1. 1) und (1. 2) besteht

$$h_{2^k}^2(w, x; 2) = \frac{1}{2^k}\sum_{\mu=0}^{2^k-1}\Big(\int_0^1 (w(x\dotplus u)-w(x))D_\mu(u)\,du\Big)^2 \leqq \tag{2. 2}$$

$$\leqq \frac{1}{2^k}\sum_{\mu=0}^{2^k-1}\Big(\int_0^1 (w(x\dotplus u)-w(x))D_{2^k}(u)\,du\Big)^2 + \frac{1}{2^k}\sum_{\mu=0}^{2^k-1}\Big(\int_0^1 (w(x\dotplus u)-w(x))\psi_\mu(u)\,du\Big)^2 +$$

$$+\frac{1}{2^k}\sum_{\mu=0}^{2^k-1}\Big(\int_0^1 [w(x\dotplus u)-w(x)]D_\mu^*(u; 0, k)\,du\Big)^2 =$$

$$= \big(S_{2^k}(w; x)-w(x)\big)^2 + \frac{1}{2^k}\sum_{\mu=0}^{2^k-1}[c_\mu(w)]^2 + \frac{w^2(x)}{2^k} + h_{2^k}^*(w, x; 2)$$

mit $k = k(n)$, wobei der Grenzwert der ersten drei Glieder fast überall gleich Null ist (siehe z.B. [1]). Auf Grund von (1. 1) erhalten wir

$$h_{2^k}^*(w, x; 2) = \frac{1}{2^k}\sum_{\mu=0}^{2^k-1}\Big(\int_0^1 [w(x\dotplus u)-w(x)]D_\mu^*(u; 0, k)\,du\Big)^2 \leqq \tag{2. 3}$$

$$\leqq \frac{1}{2^{k-1}}\sum_{\mu=0}^{2^k-1}\left(\int_0^1 [w(x\dotplus u)-w(x)]\sum_{i=0}^{l-1} r_i(u)\psi_\mu\left(u\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\right) D_{2^i}(u)\,du\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{2^{k-1}}\sum_{\mu=0}^{2^k-1}\Big(\int_0^1 [w(x\dotplus u)-w(x)]D_\mu^*(u; l, k)\,du\Big)^2 \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=0}^{l-1}\frac{2l}{2^k}\sum_{\mu=0}^{2^k-1}\Big(\int_0^1 [w(x\dotplus u)-w(x)]r_i(u)D_{2^i}(u)\psi_\mu(u)\,du\Big)^2 +$$

$$+\frac{2}{2^k}\sum_{\mu=0}^{2^k-1}\Big(\int_0^1 [w(x\dotplus u)-w(x)]D_\mu^*(u; l, k)\,du\Big)^2 = 2\big(\sigma_k^{(1)}(l; x)+\sigma_k^{(2)}(l; x)\big)$$

für jede fixierte natürliche Zahl $l(\leqq k)$. Wir setzen

$$W_{x,i}(u) = [w(x\dotplus u)-w(x)]r_i(u)D_{2^i}(u) \quad (i = 1, 2, \cdots, l-1).$$

Dann gilt

$$(2.4)\qquad \sigma_k^{(1)}(l;x) = l\sum_{i=0}^{l-1}\frac{1}{2^k}\sum_{\mu=0}^{2^k-1}|c_\mu(W_{x,i})|\to 0 \qquad (k\to\infty).$$

Auf Grund von (1.5) ergibt sich

$$(2.5)\qquad \sigma_k^{(2)}(l;x) = \frac{1}{2^k}\sum_{\mu=0}^{2^k-1}\Big(\int_0^1 [w(x\dotplus u)-w(x)]D_\mu^*(u;l,k)\,du\Big)^2 =$$

$$= \frac{1}{2^k}\sum_{\mu=0}^{2^k-1}\Big(\int_0^1 [w(x\dotplus u)-w(x)]D_\mu^*(u;l,k)\,du\Big)\Big(\int_0^1 [w(x\dotplus v)-w(x)]D_\mu^*(v;l,k)\,dv\Big) =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 [w(x\dotplus u)-w(x)][w(x\dotplus v)-w(x)]\frac{1}{2^k}\sum_{\mu=0}^{2^k-1}D_\mu^*(u;l,k)D_\mu^*(v;l,k)\,du\,dv =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 [w(x\dotplus u)-w(x)][w(x\dotplus v)-w(x)]K_{2^k}(u,v;l)\,du\,dv.$$

Auf Grund von (2.1), (2.2), (2.3) und (2.4) gilt

$$h_n^2(f,x;2) = O(1)\sigma_{k(n)}^{(2)}(l;x)+o(1) \qquad (n\to\infty)$$

für jede fixierte natürliche Zahl $l(\leqq k)$ f.ü.a. in [0, 1].

Da M beliebig groß gewählt werden kann, so genügt es auf Grund von Hilfssatz III e) zu zeigen, daß

$$(2.6)\qquad \sigma_k^{(2)}(l;x)\leqq \varepsilon(l;x) \quad \text{für} \quad x\in F=[0,1)-\bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_\nu$$

gilt, wobei $\varepsilon(l;x)\to 0$ $(l\to\infty)$ f.ü.a. in F.

Aus (1.5), Hilfssatz III b) und (2.5) mit Berücksichtigung von $w(x)=0$ $(x\in F)$ folgt:

$$(2.7)\qquad \sigma_k^{(2)}(l;x)\leqq \sum_{\nu,\nu'=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\sum_{i,j=l}^{k-1}\cdot$$

$$\cdot\left|\int_0^1\int_0^1 w_{\nu'}(x\dotplus v)w_\nu(x\dotplus u)r_i(u)D_{2^i}(u)r_j(v)D_{2^j}(v)D_{2^k}\left(u\dotplus v\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\dotplus\frac{1}{2^{j+1}}\right)du\,dv\right| \leqq$$

$$\leqq 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{m_{\nu'}\geqq m_\nu}\frac{1}{2^k}\sum_{i,j=l}^{k-1}\cdot$$

$$\cdot\left|\int_0^1\int_0^1 w_\nu(x\dotplus u)w_{\nu'}(x\dotplus v)r_i(u)D_{2^i}(u)r_j(v)D_{2^j}(v)D_{2^k}\left(u\dotplus v\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\dotplus\frac{1}{2^{j+1}}\right)du\,dv\right|.$$

Da nach (8)

$$(2.8)\qquad D_{2^{k_1}}(u)D_{2^{k_2}}(v) = D_{2^{k_1}}(u\dotplus v)D_{2^{k_2}}(v) \qquad (k_1\leqq k_2)$$

gilt, so ist auf Grund von Hilfssatz III c)

$$\frac{1}{2^k}\left|\int_0^1 w_{\nu'}(v\dotplus x)r_j(v)D_{2^j}(v)D_{2^k}\left(u\dotplus v\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\dotplus\frac{1}{2^{j+1}}\right)dv\right| =$$

$$= 2^{-k}D_{2^j}\left(u\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\right)\left|\int_0^1 w_{\nu'}(v\dotplus x)r_j(v)D_{2^k}\left(u\dotplus v\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\dotplus\frac{1}{2^{j+1}}\right)dv\right| \leqq$$

$$\leqq\begin{cases} 0, \text{ wenn } u\dotplus x\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\dotplus\frac{1}{2^{j+1}}\notin I_{\nu'}, \\ 4M\,|I_{\nu'}|\,D_{2^j}\left(u\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\right), \text{ wenn } u\dotplus x\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\dotplus\frac{1}{2^{j+1}}\in I_{\nu'}.\end{cases}$$

Aus (1. 6) und (2. 7) folgt

$$\sigma_k^{(2)}(l;x)\leqq \tag{2. 9}$$

$$\leqq 8M\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{i,j=l}^{k-1}\int_0^1 |w_\nu(x\dotplus u)|D_{2^i}(u)D_{2^j}\left(u\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\right)\sum_{m_{\nu'}\geqq m_\nu}\varphi_{\nu'}\left(u\dotplus x\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\dotplus\frac{1}{2^{j+1}}\right)du=$$

$$=8M\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{i=l}^{k-1}\left(\sum_{j=l}^{i}+\sum_{j=i+1}^{k-1}\right)\int_0^1 |w_\nu(x\dotplus u)|D_{2^i}(u)D_{2^j}\left(u\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\right)\cdot$$

$$\cdot\Phi_{m_\nu}\left(u\dotplus x\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\dotplus\frac{1}{2^{j+1}}\right)du = 8M\left(\sigma_k^{(3)}(l;x)+\sigma_k^{(4)}(l;x)\right).$$

Wir bezeichnen mit $J_i(x)$ das den Punkt x enthaltende dyadische Intervall $\left[\frac{\alpha_i(x)}{2^i},\frac{\alpha_i(x)+1}{2^i}\right)$ wobei $0\leqq\alpha_i<2^i$, $\alpha_i\in G$. Dann gilt auf Grund von (8), Hilfssatz III, (1. 6), (2. 8) und (2. 9) für $x\in F$

$$\sigma_k^{(3)}(l;x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{i=l}^{k-1}\sum_{j=l}^{i}2^j\int_0^1|w_\nu(x\dotplus u)|D_{2^i}(u)\Phi_{m_\nu}\left(u\dotplus x\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\dotplus\frac{1}{2^{j+1}}\right)du=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{i=l}^{k-1}\sum_{j=l}^{i}2^j\int_0^1|w_\nu(u)|D_{2^i}(x\dotplus u)\Phi_{m_\nu}\left(u\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\dotplus\frac{1}{2^{j+1}}\right)du=$$

$$=\sum_{i=l}^{k-1}\sum_{j=l}^{i}2^j\sum_{I_\nu\subset J_i(x)}\sum_{I_{\nu'}\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\dotplus\frac{1}{2^{j+1}}\subset I_\nu}2^i|I_{\nu'}|\int\limits_{I_{\nu'}\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\dotplus\frac{1}{2^{j+1}}}|w_\nu(u)|\,du\leqq$$

$$\leqq\sum_{i=l}^{\infty}\sum_{j=l}^{i}2^j\sum_{I_\nu\subset J_i(x)}\sum_{I_{\nu'}\dotplus\frac{1}{2^{i+1}}\dotplus\frac{1}{2^{j+1}}\subset I_\nu}2^i|I_{\nu'}|\int\limits_{I_\nu}|w_\nu(u)|\,du\leqq$$

$$\leqq 4M\sum_{i=l}^{\infty}\sum_{j=l}^{i}2^j\sum_{I_\nu\subset J_i(x)}2^i|I_\nu|^2=4M\sum_{i=l}^{\infty}\sum_{j=l}^{i}2^j\int_0^1\Phi_0(u)D_{2^i}(x\dotplus u)\,du<$$

$$<8M\sum_{i=l}^{\infty}2^i\int_0^1\Phi_0(u)D_{2^i}(x\dotplus u)\,du,$$

woraus sich nach Hilfssatz IV a) die Relation

$$\sigma_k^{(3)}(l; x) \leqq \varepsilon_1(l; x) \to 0 \qquad (l \to \infty), \tag{2.10}$$

f.ü.a. in F ergibt.

Aus (2. 8) und (2. 9) folgt

$$\sigma_k^{(4)}(l; x) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{i=l}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k-1} \int_0^1 |w_\nu(x \dotplus u)| D_{2^i}(u) D_{2^j}\left(u \dotplus \frac{1}{2^{i+1}}\right) \Phi_{m_\nu}\left(u \dotplus x \dotplus \frac{1}{2^{i+1}} \dotplus \frac{1}{2^{j+1}}\right) du =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{i=l}^{k-1} 2^i \sum_{j=i+1}^{k-1} \int_0^1 |w_\nu(u)| D_{2^j}\left(u \dotplus x \dotplus \frac{1}{2^{i+1}}\right) \Phi_{m_\nu}\left(u \dotplus \frac{1}{2^{i+1}} \dotplus \frac{1}{2^{j+1}}\right) du =$$

$$= \sum_{i=l}^{k-1} 2^i \sum_{j=i+1}^{k-1} \Big(\sum_{m_\nu \leqq j} + \sum_{m_\nu > j}\Big) \int_0^1 |w_\nu(u)| D_{2^j}\left(u \dotplus x \dotplus \frac{1}{2^{i+1}}\right) \Phi_{m_\nu}\left(u \dotplus \frac{1}{2^{i+1}} \dotplus \frac{1}{2^{j+1}}\right) du =$$

$$= \sigma_k^{(5)}(l; x) + \sigma_k^{(6)}(l; x).$$

Aus $D_{2^j}\left(x \dotplus u \dotplus \frac{1}{2^{i+1}}\right) = 0 \left(x \dotplus \frac{1}{2^{i+1}} \notin I_\nu,\ u \in I_\nu,\ j \geqq m_\nu\right)$ auf Grund von (1. 6) und Hilfssatz IV ergibt sich

$$\sigma_k^{(5)}(l; x) = \tag{2.11}$$

$$= \sum_{i=l}^{k-1} 2^i \sum_{j=i+1}^{k-1} \sum_{m_\nu \leqq j} \int_0^1 |w_\nu(u)| D_{2^j}\left(u \dotplus x \dotplus \frac{1}{2^{i+1}}\right) \Phi_{m_\nu}\left(u \dotplus \frac{1}{2^{i+1}} \dotplus \frac{1}{2^{j+1}}\right) du \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=l}^{k-1} 2^i \Psi_i(|w|; x) \leqq \sum_{i=l}^{\infty} 2^i \Psi_i(|w|; x) = \varepsilon_2(l; x) \to 0 \qquad (l \to \infty)$$

f. ü. a. in F.

Endlich folgt aus Hilfssatz III und IV:

$$\sigma_k^{(6)}(l; x) = \sum_{i=l}^{k-1} 2^i \sum_{j=i+1}^{k-1} \sum_{m_\nu > j} \int_0^1 |w_\nu(u)| D_{2^j}\left(u \dotplus x \dotplus \frac{1}{2^{i+1}}\right) \Phi_{m_\nu}\left(u \dotplus \frac{1}{2^{i+1}} \dotplus \frac{1}{2^{j+1}}\right) du =$$

$$= \sum_{i=l}^{k-1} 2^i \sum_{j=i+1}^{k-1} \sum_{I_\nu \subset J_j\left(x \dotplus \frac{1}{2^{i+1}}\right)} \sum_{I_{\nu'} \dotplus \frac{1}{2^{i+1}} \dotplus \frac{1}{2^{j+1}} \subset I_\nu} 2^j |I_{\nu'}| \int_{I_{\nu'} \dotplus \frac{1}{2^{i+1}} \dotplus \frac{1}{2^{j+1}}} |w_\nu(u)|\, du \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=l}^{\infty} 2^i \sum_{j=i+1}^{\infty} \sum_{I_\nu \subset J_j\left(x \dotplus \frac{1}{2^{i+1}}\right)} 2^j |I_\nu| \int_{I_\nu} |w_\nu(u)|\, du \leqq 4M \sum_{i=l}^{\infty} 2^i \sum_{j=i+1}^{\infty} \sum_{I_\nu \subset J_j\left(x \dotplus \frac{1}{2^{i+1}}\right)} 2^j |I_\nu|^2 \leqq$$

$$\leqq 4M \sum_{i=l}^{\infty} 2^i \sum_{j=i+1}^{\infty} \int_0^1 D_{2^j}\left(u \dotplus x \dotplus \frac{1}{2^{i+1}}\right) \Phi_j(u)\, du = \varepsilon_3(l; x) \to 0 \qquad (l \to \infty)$$

f.ü.a. in F. Wegen (2. 10) und (2. 11) folgt hieraus (2. 6), woraus sich die Behauptung unseres Satzes ergibt.

Literaturverzeichnis

[1] N. J. Fine, On the Walsh functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65** (1949), 372—414.

[2] A. Zygmund, On the convergence and summability of power series on the circle of convergence, *Proc. London Math. Soc.*, **47** (1941), 326—350.

[3] F. Schipp, Über die Größenordnung der Partialsummen der Entwicklung integrierbarer Funktionen nach W-Systemen, *Acta Sci. Math.*, **28** (1967), 123—134.

[4] S. Igari, An extension of the interpolation theorem of Marcinkiewicz, *Tôhoku Math. J.*, **15** (1963), 343—358.

[5] C. Watari, Mean convergence of Walsh Fourier series, *Tôhoku Math. J.*, **16** (1964), 183—188.

[6] G. Sunouchi, Strong summability of Walsh—Fourier series, *Tôhoku Math. J.*, **16** (1964), 228—237.

[7] P. Billard, Sur la convergence presque partout des séries de Fourier—Walsh des fonctions de l'espace $L^2(0, 1)$, *Studia Math.*, **28** (1967), 365—388.

(Eingegangen am 21. März 1968)