Erweiterung von Halbgruppen durch wiederholte Quotientenbildung. I

Von H. SEIBT (Potsdam, DDR)

Einleitung

Ist $\mathfrak{N}$ eine Halbgruppe und $\mathfrak{n}$ eine Unterhalbgruppe (zweiseitig) regulärer Elemente von $\mathfrak{N}$, so versteht man unter einer Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ von $\mathfrak{N}$ nach $\mathfrak{n}$ eine Oberhalbgruppe von $\mathfrak{N}$ mit Einselement, in der jedes Element $\alpha \in \mathfrak{n}$ ein Inverses α^{-1} besitzt und deren Elemente als Rechtsquotienten $a\alpha^{-1}$ mit $a \in \mathfrak{N}$ und $\alpha \in \mathfrak{n}$ dargestellt werden können. Letzteres drücken wir auch durch die Schreibweise $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})=\mathfrak{N}\mathfrak{n}^{-1}$ aus und nennen $\mathfrak{n}$ eine rechtsseitige Nennermenge von $\mathfrak{N}$.

Eine solche Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ existiert nach [1], [2] genau dann, wenn die folgende Bedingung $Q_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ erfüllt ist: Zu je zwei Elementen $a \in \mathfrak{N}$ und $\alpha \in \mathfrak{n}$ gibt es Elemente $l \in \mathfrak{N}$ und $\lambda \in \mathfrak{n}$ mit $a\lambda=\alpha l$. Die Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ ist dann durch $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{n}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Dagegen können verschiedene Unterhalbgruppen $\mathfrak{n}_i$ $(i \in I)$ von $\mathfrak{N}$ zur gleichen Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n}_i)$ führen. Unter ihnen gibt es dann genau eine maximale Halbgruppe $\mathfrak{n}$, die gerade aus allen in $\mathfrak{S}$ invertierbaren Elementen von $\mathfrak{N}$ besteht. Nach [2] (§ 4, Satz 2) ist eine rechtsseitige Nennermenge $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{N}$ genau dann relativ maximal in diesem Sinne, wenn aus $ab \in \mathfrak{n}$ für beliebige reguläre Elemente a und b aus $\mathfrak{N}$ stets $a \in \mathfrak{n}$ und $b \in \mathfrak{n}$ folgt. Dabei erhält man aus jeder Nennermenge $\mathfrak{n}_i$ mit $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n}_i)$ die zugehörige relativ maximale Nennermenge $\mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ durch Hinzunahme aller regulären Elemente a und b aus $\mathfrak{N}$ mit $ab \in \mathfrak{n}_i$.

Andererseits sprechen wir von der absolut maximalen rechtsseitigen Nennermenge von $\mathfrak{N}$ in folgendem Sinne: Wenn nämlich die Halbgruppe $\mathfrak{N}$ überhaupt Rechtsquotientenhalbgruppen $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ besitzt, so liegen alle rechtsseitigen Nennermengen $\mathfrak{n}$ in einer maximalen Halbgruppe $\mathfrak{m}$ dieser Art (vgl. [2], § 4, Satz 3). Es gibt dann also die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte maximale Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N})=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{m})$, die jede Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ von $\mathfrak{N}$ als Unterstruktur enthält.

Schließlich ist für unsere nachfolgenden Untersuchungen noch von Bedeutung, daß sich jeweils endlich viele Elemente einer Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ stets mit „gleichem Nenner", also in der Form $a_1\alpha^{-1}, \cdots, a_n\alpha^{-1}$ schreiben lassen. Natürlich gelten alle diese Resultate in entsprechender Form auch für Linksquotientenhalbgruppen $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$, wobei wir hier wie im Folgenden mit jeder Begriffsbildung bzw. Aussage auch immer die aus ihr durch „Vertauschung von rechts und links" hervorgehende duale Begriffsbildung bzw. Aussage als gegeben ansehen. Wir erwähnen in diesem Zusammenhang noch, daß für eine Unterhalbgruppe $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{N}$, die sowohl rechtsseitige wie linksseitige Nennermenge von $\mathfrak{N}$ ist, die zugehörigen Quotientenhalbgruppen $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ und $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ als gleich angesehen werden können (vgl. [2]).

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir nun Halbgruppenerweiterungen, die sich durch Nacheinanderanwendung von Quotientenbildungen der eben beschriebenen Art ergeben. Diese Problemstellung wurde in [3] aufgeworfen und zunächst gezeigt, daß zwei „gleichseitige" Erweiterungsschritte zu nichts Neuem führen: Ist nämlich $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ eine Rechtsquotientenhalbgruppe von $\mathfrak{N}$ nach $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{S}, \mathfrak{s})$ eine Rechtsquotientenhalbgruppe von $\mathfrak{S}$ nach einer Unterhalbgruppe $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{S}$, so ist $\mathfrak{T}$ auch schon als Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{t})$ von $\mathfrak{N}$ nach einer geeigneten Unterhalbgruppe $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{N}$ zu gewinnen. Damit erhebt sich als nächstes die Frage, ob etwa auch die Nacheinanderanwendung einer Rechtsquotientenerweiterung $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ und einer Linksquotientenerweiterung $\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{S}, \mathfrak{s})$ stets durch einen Schritt ersetzt werden kann, also $\mathfrak{T}$ selbst schon Rechts- oder Linksquotientenhalbgruppe von $\mathfrak{N}$ ist. Dies ist jedoch nicht der Fall, wie wir zunächst durch ein Beispiel in § 1 nachweisen.

Im folgenden Paragraphen wenden wir uns einer allgemeinen Theorie der Erweiterung von Halbgruppen durch abwechselnde Bildung von Rechts- und Linksquotientenhalbgruppen zu. Beginnend mit einer Rechtsquotientenhalbgruppe von $\mathfrak{N}$ sprechen wir nach k Schritten von einer k-ten r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots, \mathfrak{n}_k)$ von $\mathfrak{N}$, wobei $\mathfrak{n}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ jeweils die im $\varkappa$-ten Schritt verwendete Nennermenge bezeichnet (vgl. Definition 1). Über diese Halbgruppen $\mathfrak{n}_\varkappa$ können wir noch in gewisser Weise verfügen, ohnedabei die einzelnen Quotientenerweiterungsschritte abzuändern; insbesondere zeigen wir, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit stets $\mathfrak{n}_1 \subseteqq \mathfrak{n}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{n}_k$ annehmen dürfen. Da jedoch die Nennermengen $\mathfrak{n}_\varkappa$ jeweils erst nach der $(\varkappa-1)$-ten Quotientenerweiterung von $\mathfrak{N}$ als Unterhalbgruppe von $\mathfrak{N}_{\varkappa-1} = \mathfrak{Q}_r^{\varkappa-1}(\mathfrak{N}; \mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_{\varkappa-1})$ zur Verfügungstehen, gehen wir zu ihren Durchschnitten $\mathfrak{x}_\varkappa = \mathfrak{n}_\varkappa \cap \mathfrak{N}$ mit der Halbgruppe $\mathfrak{N}$ über und versuchen, mit ihrer Hilfe Aussagen über k-te r-Quotientenhalbgruppen $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_k)$ von $\mathfrak{N}$ zu gewinnen. Eine so entstehende Unterhalbgruppenkette $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_k$ von $\mathfrak{N}$ nennen wir eine Q_r-Kette von $\mathfrak{N}$ der Länge k. Wir zeigen, daß dann $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_k)$ auch schon durch diese Unterhalbgruppen von $\mathfrak{N}$ eindeutig bis auf Isomorphie bestimmt ist (Satz 2), was die Bezeichnung $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k)$ rechtfertigt. Dabei spielt, wie überhaupt bei allen Überlegungen, eine wichtige Rolle, daß die k-te r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k)$ von $\mathfrak{N}$ zugleich eine $(k-1)$-te l-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l^{k-1}(\mathfrak{N}_1; \mathfrak{y}_2, \cdots, \mathfrak{y}_k)$ von $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{x}_1)$ ist, wobei die Unterhalbgruppen der Q_l-Kette $\mathfrak{y}_2 \subseteqq \mathfrak{y}_3 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{y}_k$ von $\mathfrak{N}_1$ als Rechtsquotientenhalbgruppen $\mathfrak{y}_\varkappa = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{x}_\varkappa, \mathfrak{x}_1)$ gewählt werden können (Satz 1). In dem Hauptsatz (Satz 3) dieser Arbeit geben wir dann notwendige und hinreichende (bereits in $\mathfrak{N}$ nachprüfbare) Bedingungen dafür an, daß eine Kette $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_k$ von Unterhalbgruppen regulärer Elemente von $\mathfrak{N}$ eine Q_r-Kette ist, also die k-te r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k)$ existiert.

Eine wichtige Ergänzung zu diesem Resultat stellt ein zweiter Hauptsatz (Satz 6) dar, den wir jedoch erst in der Fortsetzung dieser Arbeit behandeln werden. Wir werden dort nämlich zeigen, daß es für jede natürliche Zahl k Halbgruppen $\mathfrak{N}$ gibt, zu denen eine k-te r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k)$ existiert, die jedoch auf keine Weise in weniger als k Schritten durch Quotientenerweiterung von $\mathfrak{N}$ gewonnen werden kann.

Dagegen behandeln wir in dem vorliegenden Teil I, § 3 noch einige Fragen der Darstellung der Elemente einer k-ten r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k)$. Wir zeigen (Satz 4), daß für jedes Element $a_k \in \mathfrak{N}_k$ eine Quotientendarstellung der Form

$$a_k = x_1 x_2^{-1} \cdots x_{k-1}^{-1} \cdot a x_k^{-1} \cdot x_{k-1} \cdots x_2 x_1^{-1}$$

bzw.

$$a_k = x_1 x_2^{-1} \cdots x_{k-1} \cdot x_k^{-1} a \cdot x_{k-1}^{-1} \cdots x_2 x_1^{-1}$$

möglich ist, je nachdem ob k eine ungerade oder eine gerade Zahl ist. Zur Darstellung eines Elementes von $\mathfrak{N}_k$ braucht also jeweils nur ein Element aus jeder Nennermenge $\mathfrak{x}_\varkappa$ verwendet zu werden. Darüber hinaus weisen wir nach (Satz 5), daß sogar je endlich viele Elemente von $\mathfrak{N}_k$ eine solche Darstellung mit „den gleichen Nennern" gestatten, wobei also für jedes Element die gleichen $x_\varkappa \in \mathfrak{x}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \cdots, k)$ auftreten.

Wir vermerken noch, daß alle unseren allgemeinen Überlegungen auch für die Erweiterung von Halbringen durch wiederholte Quotientenbildung zutreffen. Gemäß [2], § 5 ist nämlich jeder Rechtsquotientenhalbring $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ eines Halbringes $\mathfrak{N}$ nach einer Unterhalbgruppe $\mathfrak{n}$ multiplikativ regulärer Elemente von $\mathfrak{N}$ bereits durch die Halbgruppenerweiterung $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}^\times, \mathfrak{n})$ der multiplikativen Halbgruppe $\mathfrak{N}^\times$ von $\mathfrak{N}$ eindeutig festgelegt, da sich die Addition von $\mathfrak{N}$ stets auf eine und nur eine Weise zu einer Addition in jeder Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}^\times, \mathfrak{n})$ fortsetzen läßt. Definieren wir nun einen k-ten r-Quotientenhalbring $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_k)$ eines Halbringes $\mathfrak{N}$ nach den jeweils im $\varkappa$-ten Schritt als Nennermengen auftretenden Unterhalbgruppen $\mathfrak{n}_\varkappa$ genau wie bei Halbgruppen, so läßt sich diese

Aussage auf jeden Teilschritt anwenden, womit alle Ergebnisse der Paragraphen 2 und 3 ebenso für die Erweiterung von Halbringen durch Quotientenbildung gelten. Dabei ermöglicht es die in Satz 5 gezeigte Darstellungsmöglichkeit der Elemente von $\mathfrak{N}_k$, die Addition in $\mathfrak{N}_k$ sogar direkt auf die Addition in $\mathfrak{N}$ zurückzuführen. Auf die Existenz k-ter r-Quotientenhalbringe werden wir in einer späteren Arbeit zurückkommen.

§ 1

Im Folgenden konstruieren wir eine Halbgruppe $\mathfrak{N}$, für die eine Linksquotientenhalbgruppe einer Rechtsquotientenhalbgruppe von $\mathfrak{N}$ existiert, ohne daß eine solche Oberstruktur durch eine einmalige Quotientenerweiterung erreichbar ist. Wir werden $\mathfrak{N}$ als direktes Produkt zweier geeigneter Halbgruppen gewinnen und stellen deshalb der eigentlichen Konstruktion den folgenden Hilfssatz voran. Dabei verstehen wir unter dem direkten Produkt $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_1\otimes\mathfrak{N}_2$ zweier Halbgruppen $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ zunächst die Produktmenge $\mathfrak{N}_1\times\mathfrak{N}_2$ mit komponentenweiser Multiplikation; da wir jedoch für beide Halbgruppen $\mathfrak{N}_i$ die Existenz eines Einselementes voraussetzen, dürfen wir die Elemente von $\mathfrak{N}$ in der Form $n=n_1n_2$ mit $n_i\in\mathfrak{N}_i$ schreiben.

Hilfssatz 1. *Sind $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ Halbgruppen mit Einselement und den absolut maximalen rechtsseitigen Nennermengen $\mathfrak{n}_1$ bzw. $\mathfrak{n}_2$, so besitzt das direkte Produkt $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_1\otimes\mathfrak{N}_2$ die Halbgruppe $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_1\otimes\mathfrak{n}_2$ als absolut maximale rechtsseitige Nennermenge.*

Beweis. Zunächst ist $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_1\otimes\mathfrak{n}_2$ jedenfalls eine Unterhalbgruppe regulärer Elemente von $\mathfrak{N}$. Zum Beweis der Bedingung $Q_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ wählen wir a_1a_2 beliebig aus $\mathfrak{N}$ und $\alpha_1\alpha_2$ beliebig aus $\mathfrak{n}$. Wegen $Q_r(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{n}_1)$ und $Q_r(\mathfrak{N}_2, \mathfrak{n}_2)$ gilt dann $a_1\lambda_1= =\alpha_1 l_1$ und $a_2\lambda_2=\alpha_2 l_2$ mit geeigneten Elementen $l_1\in\mathfrak{N}_1$, $l_2\in\mathfrak{N}_2$, $\lambda_1\in\mathfrak{n}_1$ und $\lambda_2\in\mathfrak{n}_2$, und die Elemente $l_1l_2\in\mathfrak{N}$ und $\lambda_1\lambda_2\in\mathfrak{n}$ erfüllen

$$a_1a_2\cdot\lambda_1\lambda_2=a_1\lambda_1a_2\lambda_2=\alpha_1 l_1\alpha_2 l_2=\alpha_1\alpha_2\cdot l_1 l_2,$$

womit $\mathfrak{n}$ als rechtsseitige Nennermenge von $\mathfrak{N}$ nachgewiesen ist. Es existiert also auch die absolut maximale rechtsseitige Nennermenge $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{N}$, deren Elemente die Darstellung $\alpha=\alpha_1\alpha_2$ mit $\alpha_i\in\mathfrak{m}_i\subseteqq\mathfrak{N}_i$ $(i=1,2)$ gestatten, wobei $\mathfrak{m}_i$ die Gesamtheit aller Komponenten α_i der Elemente α von $\mathfrak{m}$ bezeichnet. Dabei ist klar, daß $\mathfrak{m}_i$ Unterhalbgruppe regulärer Elemente von $\mathfrak{N}_i$ ist, für die wegen $\mathfrak{m}\supseteqq\mathfrak{n}= \mathfrak{n}_1\otimes\mathfrak{n}_2$ sofort $\mathfrak{m}_i\supseteqq\mathfrak{n}_i$ folgt. Andererseits gibt es wegen $Q_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{m})$ zu jedem $a_1a_2\in\mathfrak{N}$ und zu jedem $\alpha_1\alpha_2\in\mathfrak{m}$ Elemente $l_1l_2\in\mathfrak{N}$ und $\lambda_1\lambda_2\in\mathfrak{m}$ mit $a_1a_2\lambda_1\lambda_2=\alpha_1\alpha_2 l_1 l_2$, also $a_i\lambda_i=\alpha_i l_i$ für $i=1,2$. Das bedeutet aber gerade die Gültigkeit von $Q_r(\mathfrak{N}_i, \mathfrak{m}_i)$, womit aus der absoluten Maximalität von $\mathfrak{n}_i$ schließlich auch $\mathfrak{m}_i\subseteqq\mathfrak{n}_i$ folgt.

Wir betrachten nun eine Halbgruppe $\mathfrak{H}$ mit Einselement, welche von zwei

Elementen A und B mit der Relation $A^2B=BA$ erzeugt wird, weswegen sich ihre Elemente jedenfalls in der Form A^xB^y (x, y nicht negative ganze Zahlen) angeben lassen und je zwei Elemente von $\mathfrak{H}$ nach der Regel

$$A^{x_1}B^{y_1}\cdot A^{x_2}B^{y_2} = A^{x_1+2^{y_1}x_2}B^{y_1+y_2}$$

multipliziert werden. Man kann nun nachprüfen, daß die oben angegebene Darstellung der Elemente von $\mathfrak{H}$ eindeutig und daß $\mathfrak{H}$ eine reguläre Halbgruppe ist, worauf wir jedoch an dieser Stelle verzichten wollen, zumal sich beides aus allgemeineren Überlegungen im zweiten Teil mit ergeben wird. Für diese Halbgruppe $\mathfrak{H}$ zeigen wir zunächst:

a) Die absolut maximale rechtsseitige Nennermenge von $\mathfrak{H}$ ist $\mathfrak{n}_1=\{A^x\}$;

b) die absolut maximale linksseitige Nennermenge von $\mathfrak{H}$ ist $\mathfrak{H}$ selbst.

Vorerst ist klar, daß $\mathfrak{n}_1$ eine Unterhalbgruppe regulärer Elemente von $\mathfrak{H}$ ist. Sind weiterhin $a=A^xB^y$ und $\alpha=A^\xi$ beliebige Elemente von $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{n}_1$, dann erfüllen die Elemente

$$l = A^{x+\xi(2^y-1)}B^y\in\mathfrak{H} \quad\text{und}\quad \lambda = A^\xi\in\mathfrak{n}_1$$

die Gleichung

$$a\lambda = A^xB^y\cdot A^\xi = A^{x+2^y\xi}B^y = A^\xi\cdot A^{x+\xi(2^y-1)}B^y = \alpha l,$$

also gilt $Q_r(\mathfrak{H}, \mathfrak{n}_1)$. Dagegen erfüllt keine $\mathfrak{n}_1$ echt umfassende Unterhalbgruppe $\bar{\mathfrak{n}}_1$ von $\mathfrak{H}$ die Bedingung $Q_r(\mathfrak{H}, \bar{\mathfrak{n}}_1)$. Es enthält nämlich $\bar{\mathfrak{n}}_1$ wenigstens ein Element $\bar{\alpha}=A^\xi B^\eta$ mit $\eta\neq 0$. Wählen wir dann etwa $a=A^xB^y$ aus $\mathfrak{H}$ mit $y\neq 0$ und $x\not\equiv\xi \bmod 2$, so führt jedes $\bar{\lambda}=A^{\xi'}B^{\eta'}\in\bar{\mathfrak{n}}_1$ und jedes $l=A^{x'}B^{y'}\in\mathfrak{H}$ auf

$$a\bar{\lambda} = A^{x+2^y\xi'}B^{y+\eta'} \quad\text{und}\quad \bar{\alpha}l = A^{\xi+2^\eta x'}B^{\eta+y'},$$

was aber wegen $x\not\equiv\xi \bmod 2$ und $y\neq 0$, $\eta\neq 0$ auf $a\bar{\lambda}\neq\bar{\alpha}l$ hinausläuft.

Für b) genügt es schließlich zu zeigen, daß $Q_l(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$ erfüllt ist. Mit den beliebig vorgegebenen Elementen $a=A^xB^y$ und $\alpha=A^\xi B^\eta$ aus $\mathfrak{H}$ erfüllen gerade $l=A^{2^\eta x}B^y$ und $\lambda=A^{2^y\xi}B^\eta$ aus $\mathfrak{H}$ die Gleichung

$$\lambda a = A^{2^y\xi}B^\eta\cdot A^xB^y = A^{2^y\xi+2^\eta x}B^{\eta+y} = A^{2^\eta x}B^y\cdot A^\xi B^\eta = l\alpha.$$

Entsprechend besteht die von zwei Elementen C und D mit der Relation $DC=CD^2$ erzeugte Halbgruppe $\mathfrak{F}$ mit Einselement gerade aus den Elementen C^zD^w (z, w nicht negative ganze Zahlen), die vermöge $A^xB^y\to C^yD^x$ zur Halbgruppe $\mathfrak{H}$ antiisomorph ist. Daraus folgt für $\mathfrak{F}$:

a) Die absolut maximale linksseitige Nennermenge von $\mathfrak{F}$ ist $\mathfrak{n}_2=\{D^w\}$;

b) die absolut maximale rechtsseitige Nennermenge von $\mathfrak{F}$ ist $\mathfrak{F}$ selbst.

Gemäß Hilfssatz 1 und seiner dualen Aussage gilt dann für das direkte Produkt $\mathfrak{N}=\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{F}$:

A) Die absolut maximale rechtsseitige Nennermenge von $\mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_1\otimes\mathfrak{F}\neq\mathfrak{N}$;

B) die absolut maximale linksseitige Nennermenge von $\mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{m}=\mathfrak{H}\otimes\mathfrak{n}_2\neq\mathfrak{N}$.

Wir betrachten nun die Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n}) = (\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{F})(\mathfrak{n}_1 \otimes \mathfrak{F})^{-1}$, deren Elemente also die Darstellung $a = A^x B^y C^z D^w D^{-\omega} C^{-\zeta} A^{-\xi}$ gestatten, und zeigen, daß die Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{S}, \mathfrak{b})$ von $\mathfrak{S}$ nach der von B erzeugten Unterhalbgruppe $\mathfrak{b} = \{B^y\}$ existiert. Zunächst ist mit $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{F}$ auch $\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{F}$ und damit gemäß [2], S. 212 auch $\mathfrak{S}$ regulär, so daß wir nur noch $Q_l(\mathfrak{S}, \mathfrak{b})$ nachzuweisen haben. Dabei verwenden wir, daß die Elemente A^{-1}, C^{-1} und D^{-1} von $\mathfrak{S}$ ersichtlich den Beziehungen $BA^{-1} = A^{-2}B$, $C^{-1}B = BC^{-1}$ bzw. $D^{-1}B = BD^{-1}$ genügen, und betrachten beliebige Elemente $a = A^x B^y C^z D^w D^{-\omega} C^{-\zeta} A^{-\xi}$ aus $\mathfrak{S}$ und $\alpha = B^\eta$ aus $\mathfrak{b}$. Mit den Elementen

$$l = A^{2^\eta x} B^y C^z D^w D^{-\omega} C^{-\zeta} A^{-2^\eta \xi} \in \mathfrak{S} \quad \text{und} \quad \lambda = B^\eta \in \mathfrak{b}$$

gilt dann

$$\lambda a = B^\eta \cdot A^x B^y C^z D^w D^{-\omega} C^{-\zeta} A^{-\xi} = A^{2^\eta x} B^{\eta + y} C^z D^w D^{-\omega} C^{-\zeta} A^{-\xi}$$

$$l\alpha = A^{2^\eta x} B^y C^z D^w D^{-\omega} C^{-\zeta} A^{-2^\eta \xi} \cdot B^\eta = A^{2^\eta x} B^{y+\eta} C^z D^w D^{-\omega} C^{-\zeta} A^{-\xi}$$

also gerade $\lambda a = l\alpha$. In $\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{S}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n}), \mathfrak{b})$ sind damit alle Elemente von $\mathfrak{N}$ invertierbar, was wegen A) und B) weder für die maximale Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ noch für die maximale Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{S}' = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{N}, \mathfrak{m})$ von $\mathfrak{N}$ zutrifft.

§ 2

Zur formalen Vereinfachung unserer allgemeinen Untersuchungen stellen wir zunächst folgenden Hilfssatz bereit:

Hilfssatz 2. *Es sei $\mathfrak{N}$ eine Halbgruppe mit Einselement, für die eine Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ existiert, und $\mathfrak{t}$ eine Menge bereits in $\mathfrak{N}$ invertierbarer Elemente von $\mathfrak{N}$. Dann ist auch die von $\mathfrak{n} \cup \mathfrak{t}$ erzeugte Unterhalbgruppe $\bar{\mathfrak{n}}$ rechtsseitige Nennermenge von $\mathfrak{N}$, und es gilt $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n}) = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \bar{\mathfrak{n}})$.*

Beweis. Ersichtlich besitzt jedes Element der von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{t}$ erzeugten Unterhalbgruppe $\bar{\mathfrak{n}}$ von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ ein Inverses. Mit $\mathfrak{n} \subseteq \bar{\mathfrak{n}}$ folgt aus $\mathfrak{S} = \mathfrak{N}\mathfrak{n}^{-1}$ erst recht $\mathfrak{S} = \mathfrak{N}\bar{\mathfrak{n}}^{-1}$, womit $\mathfrak{S}$ auch Rechtsquotientenhalbgruppe von $\mathfrak{N}$ nach $\bar{\mathfrak{n}}$ ist.

Wir gehen nun von einer beliebigen Halbgruppe $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0$ aus, die eine Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}_0, \mathfrak{n}_1)$ besitzt, zu der eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{n}_2)$ existieren möge u.s.f. Allgemein definieren wir induktiv:

Definition 1. Unter einer k-ten r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_k$ $(k \geqq 1)$ einer Halbgruppe $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0$ verstehen wir für ungerades k eine Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}_{k-1}, \mathfrak{n}_k)$, für gerades k eine Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{N}_{k-1}, \mathfrak{n}_k)$

einer $(k-1)$-ten r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_{k-1}$ nach einer Unterhalbgruppe $\mathfrak{n}_k$ regulärer Elemente von $\mathfrak{N}_{k-1}$. Wir schreiben dafür $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_k)$.

Die entsprechende duale Begriffsbildung, bei der also der erste Schritt eine Linksquotientenerweiterung ist, bezeichnen wir als k-te l-Quotientenhalbgruppe.

Eine solche k-te r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_k)$ ist dabei durch $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0$ und die Nennermengen $\mathfrak{n}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \cdots, k)$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, da ja jeder Teilschritt durch $\mathfrak{N}_{\varkappa-1}$ und $\mathfrak{n}_\varkappa$ eindeutig festgelegt ist. Wie aus der Einleitung hervorgeht, kann man dabei ohne Beschränkung der Allgemeinheit über die Nennermengen $\mathfrak{n}_\varkappa$ noch in gewisser Weise verfügen, ohne die entstehenden Quotientenstrukturen $\mathfrak{N}_\varkappa$ abzuändern. Es empfiehlt sich jedoch nicht, diese Nennermengen in jedem Teilschritt relativ maximal zu wählen, sondern gestützt auf Hilfssatz 2 festzulegen: *Für die Nennermengen* $\mathfrak{n}_1, \ldots \mathfrak{n}_k$ *einer* k*-ten* r*-Quotientenhalbgruppe* $\mathfrak{N}_k$ *wird stets angenommen, daß für* $\varkappa = 2, \cdots, k$ *die Nennermenge* $\mathfrak{n}_\varkappa \subseteqq \mathfrak{N}_{\varkappa-1}$ *die von* $\mathfrak{n}_{\varkappa-1}$ *erzeugte Untergruppe von* $\mathfrak{N}_{\varkappa-1}$ *enthält. Mit anderen Worten, wir verabreden*

$$(*) \qquad \mathfrak{n}_{\varkappa-1} \subseteqq \mathfrak{n}_\varkappa \quad \textit{und} \quad \mathfrak{n}_{\varkappa-1}^{-1} \subseteqq \mathfrak{n}_\varkappa \qquad (\varkappa = 2, \ldots, k).$$

Natürlich sind diese Nennermengen $\mathfrak{n}_\varkappa$ für allgemeine Aussagen über die k-te r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_k)$ wenig geeignet, da die Halbgruppe $\mathfrak{n}_\varkappa$ immer erst nach dem $(\varkappa-1)$-ten Schritt zur Verfügung steht. Wir bilden daher die Durchschnitte

$$\mathfrak{x}_\varkappa = \mathfrak{n}_\varkappa \cap \mathfrak{N} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k).$$

Diese Unterhalbgruppen $\mathfrak{x}_\varkappa$ bestehen dann aus regulären Elementen von $\mathfrak{N}$, und aus $\mathfrak{n}_1 \subseteqq \mathfrak{n}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{n}_k$ (gemäß $(*)$) folgt $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_k$.

Im Laufe unserer Untersuchungen wird sich in der Tat herausstellen, daß diese Kette von Unterhalbgruppen von $\mathfrak{N}$ die k-te r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_k)$ ebenfalls eindeutig kennzeichnet und hinreichende und notwendige Kriterien für ihre Existenz auszusprechen gestattet. Wir definieren daher:

Definition 2. Eine Kette $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_k$ von Unterhalbgruppen regulärer Elemente einer Halbgruppe $\mathfrak{N}$ heißt eine Q_r-Kette von $\mathfrak{N}$ der Länge k, wenn eine k-te r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_k)$ existiert und $\mathfrak{x}_\varkappa = \mathfrak{n}_\varkappa \cap \mathfrak{N}$ für $\varkappa = 1, 2, \cdots, k$ gilt.

Als nächstes zeigen wir zwei Hilfssätze über solche Q_r-Ketten, wobei wir dem zweiten im Hinblick auf spätere Betrachtungen eine etwas allgemeinere Fassung geben.

Hilfssatz 3. *Ist* $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_k$ *eine* Q_r*-Kette einer Halbgruppe* $\mathfrak{N}$, *so gilt für* $\varkappa = 2, 3, \cdots, k$ *und alle Elemente* a, b *von* $\mathfrak{N}$:

Aus $a \cdot b \in \mathfrak{x}_\varkappa$ *und* $a \in \mathfrak{x}_{\varkappa-1}$ *folgt* $b \in \mathfrak{x}_\varkappa$; *aus* $a \cdot b \in \mathfrak{x}_\varkappa$ *und* $b \in \mathfrak{x}_{\varkappa-1}$ *folgt* $a \in \mathfrak{x}_\varkappa$.

Beweis. Es sei $a \cdot b \in \mathfrak{x}_\varkappa$ und $a \in \mathfrak{x}_{\varkappa-1}$. Dann folgt $ab \in \mathfrak{n}_\varkappa$ und $a \in \mathfrak{n}_{\varkappa-1}$, wobei letzteres nach $(*)$ $a^{-1} \in \mathfrak{n}_\varkappa$ nach sich zieht. Damit gilt $a^{-1}ab = b \in \mathfrak{n}_\varkappa$ und wegen $b \in \mathfrak{N}$ auch $b \in \mathfrak{x}_\varkappa = \mathfrak{n}_\varkappa \cap \mathfrak{N}$. Entsprechend folgt die zweite Behauptung.

Hilfssatz 4. *Es sei $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_k$ eine Kette von Unterhalbgruppen regulärer Elemente einer Halbgruppe $\mathfrak{N}$, für welche die Aussagen von Hilfssatz 3 sowie $Q_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{x}_1)$ erfüllt sind. Dann existieren die Rechtsquotientenhalbgruppen $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{x}_\varkappa, \mathfrak{x}_1)$ mit $\varkappa = 2, \cdots, k$ und für jedes Element $bv_1^{-1} \in \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{x}_1)$ folgt aus $bv_1^{-1} \in \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{x}_\varkappa, \mathfrak{x}_1)$ stets $b \in \mathfrak{x}_\varkappa$.*

Beweis. Zum Nachweis der esten Behauptung zeigen wir, daß für jedes $\varkappa = 2, \cdots, k$ die Bedingung $Q_r(\mathfrak{x}_\varkappa, \mathfrak{x}_1)$ erfüllt ist. Nun gibt es wegen $Q_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{x}_1)$ zu Elementen $x_\varkappa \in \mathfrak{x}_\varkappa$ und $x_1 \in \mathfrak{x}_1$ Elemente $a \in \mathfrak{N}$ und $y_1 \in \mathfrak{x}_1$ mit

$$x_\varkappa y_1 = x_1 a.$$

Aus $x_1 a = x_\varkappa y_1 \in \mathfrak{x}_\varkappa$ und $x_1 \in \mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_{\varkappa-1}$ folgt aber wegen der Gültigkeit der Aussagen von Hilfssatz 3, daß das Element a sogar in $\mathfrak{x}_\varkappa$ liegt. Für die zweite Behauptung betrachten wir ein Element

$$bv_1^{-1} = x_\varkappa x_1^{-1} \in \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{x}_\varkappa, \mathfrak{x}_1) \subseteqq \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{x}_1).$$

Dann gilt zunächst $x_\varkappa x_1^{-1} v_1 = b$. Wegen $x_1^{-1} v_1 \in \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_1)$ folgt $x_1^{-1} v_1 = t_2 t_1^{-1}$ mit $t_2 \in \mathfrak{x}_2$ und $t_1 \in \mathfrak{x}_1$. Wir erhalten dann $x_\varkappa t_2 t_1^{-1} = b$, also $x_\varkappa t_2 = bt_1 \in \mathfrak{x}_\varkappa$, woraus wegen $t_1 \in \mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_{\varkappa-1}$ nach der Aussage von Hilfssatz 3 gerade $b \in \mathfrak{x}_\varkappa$ folgt.

Für die weiteren Überlegungen ist nun der folgende Zusammenhang bedeutungsvoll, der es gestattet eine k-te Quotientenhalbgruppe auch als $(k-1)$-te Quotientenhalbgruppe aufzufassen:

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_k)$ eine k-te r-Quotientenhalbgruppe von $\mathfrak{N}$ mit der Q_r-Kette*

$$\mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_k \qquad (\mathfrak{x}_\varkappa = \mathfrak{n}_\varkappa \cap \mathfrak{N}).$$

Dann ist $\mathfrak{N}_k$ zugleich die $(k-1)$-te l-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l^{k-1}(\mathfrak{N}_1; \mathfrak{n}_2, \cdots, \mathfrak{n}_k)$ von $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n}_1)$ mit der Q_l-Kette

$$\mathfrak{y}_2 \subseteqq \mathfrak{y}_3 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{y}_k \qquad (\mathfrak{y}_\varkappa = \mathfrak{n}_\varkappa \cap \mathfrak{N}_1),$$

wobei sich die $\mathfrak{y}_\varkappa$ gerade als folgende Rechtsquotientenhalbgruppen erweisen

$$\mathfrak{y}_\varkappa = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{x}_\varkappa, \mathfrak{x}_1) \qquad (\varkappa = 2, \ldots, k).$$

Beweis. Auf Grund unserer Definition haben wir nur die letzte Behauptung zu zeigen. Nun folgt aus $\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{N}_1$ zunächst $\mathfrak{x}_\varkappa \subseteqq \mathfrak{y}_\varkappa$. Weiter gilt für $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{n}_1$ nach $(*)$ gerade $\mathfrak{n}_1^{-1} \subseteqq \mathfrak{n}_2 \subseteqq \mathfrak{n}_\varkappa$ $(\varkappa = 2, \ldots, k)$, woraus mit $\mathfrak{x}_1^{-1} \subseteqq \mathfrak{N}_1$ auf

$$\mathfrak{x}_1^{-1} \subseteqq \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{n}_\varkappa = \mathfrak{y}_\varkappa$$

geschlossen werden kann. Damit ist $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{x}_\varkappa, \mathfrak{x}_1) = \mathfrak{x}_\varkappa \mathfrak{x}_1^{-1} \subseteqq \mathfrak{y}_\varkappa$ gezeigt. Andererseits besteht $\mathfrak{y}_\varkappa$ als Unterhalbgruppe von $\mathfrak{N}_1$ aus Elementen der Form ax_1^{-1} mit $a \in \mathfrak{N}$ und $x_1 \in \mathfrak{x}_1$. Dabei liefert $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_\varkappa \subseteqq \mathfrak{y}_\varkappa$ sofort

$$a = ax_1^{-1} \cdot x_1 \in \mathfrak{y}_\varkappa \subseteqq \mathfrak{n}_\varkappa,$$

also $a \in \mathfrak{x}_\varkappa$ und damit $\mathfrak{y}_\varkappa \subseteqq \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{x}_\varkappa, \mathfrak{x}_1)$.

Gestützt auf diesen Satz erhalten wir zunächst die bereits angekündigte Eindeutigkeitsaussage:

Satz 2. *Eine k-te r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_k)$ von $\mathfrak{N}$ ist durch $\mathfrak{N}$ und die Q_r-Kette*

$$\mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_k \qquad (\mathfrak{x}_\varkappa = \mathfrak{n}_\varkappa \cap \mathfrak{N})$$

bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Wir schreiben daher im Folgenden auch

$$\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k).$$

Beweis. Wir zeigen diesen Satz zusammen mit seiner dualen Aussage durch vollständige Induktion über k. Für $k=1$ ist wegen $\mathfrak{Q}_r^1(\mathfrak{N}; \mathfrak{n}_1) = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n}_1)$, $\mathfrak{Q}_l^1(\mathfrak{N}; \mathfrak{n}_1) = \mathfrak{Q}_l(\mathfrak{N}, \mathfrak{n}_1)$ und $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{x}_1$ nichts mehr zu zeigen. Weiterhin zieht die Richtigkeit des Satzes und seiner dualen Aussage für $k-1$ die Richtigkeit beider für k nach sich, wobei wir natürlich nur einen der zueinander dualen Schritte ausführen. Gemäß Satz 1 gilt

$$\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_k) = \mathfrak{Q}_l^{k-1}(\mathfrak{N}_1; \mathfrak{n}_2, \ldots, \mathfrak{n}_k) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n}_1),$$

wobei die $(k-1)$-te l-Quotientenhalbgruppe nach Induktionsvoraussetzung durch $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{y}_2 = \mathfrak{n}_2 \cap \mathfrak{N}_1, \cdots, \mathfrak{y}_k = \mathfrak{n}_k \cap \mathfrak{N}_1$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Nach Satz 1 gilt jedoch $\mathfrak{y}_\varkappa = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{x}_\varkappa, \mathfrak{x}_1)$, so daß $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{y}_2, \cdots, \mathfrak{y}_k$ auch durch $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k$ eindeutig festgelegt sind.

Nach diesen Vorbereitungen können wir uns nun der Frage nach der Existenz von k-ten r-Quotientenhalbgruppen zuwenden. Dabei wird die nachstehend definierte Bedingung $Q_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k)$ eine wesentliche Rolle spielen:

Definition 3. Wir sagen, daß die Unterhalbgruppen $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_k$ einer Halbgruppe $\mathfrak{N}$ der Bedingung $Q_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k)$ genügen, wenn es zu jedem Element $z_k = z_k^1 \in \mathfrak{x}_k$ und zu jedem Element $c = c^1 \in \mathfrak{N}$ Elemente [1])

$$z_k^j \in \mathfrak{x}_k \quad \text{und} \quad c^j \in \mathfrak{N} \qquad (j = 2, 3, \ldots, k+1),$$
$$u_j \quad \text{und} \quad v_j \quad \text{aus} \quad \mathfrak{x}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k-1)$$

[1]) Da im Folgenden außer Inversen keine Potenzen auftreten werden, können wir folgende Schreibweise verabreden: Ein unterer Index i gibt an, in welcher Unterhalbgruppe $\mathfrak{x}_i$ das betreffende Element liegt, fehlt ein solcher, handelt es sich um ein beliebiges Element von $\mathfrak{N}$. Obere Indices dienen zur Unterscheidung der Elemente.

gibt, so daß folgende Gleichungen für ungerades k

$$(1)\qquad \begin{aligned} c^{\lambda-1}u_{\lambda-1} &= v_{\lambda-1}c^{\lambda}, & z_k^{\lambda-1}u_{\lambda-1} &= v_{\lambda-1}z_k^{\lambda} \\ c^{\lambda+1}u_{\lambda} &= v_{\lambda}c^{\lambda}, & z_k^{\lambda+1}u_{\lambda} &= v_{\lambda}z_k^{\lambda}, \\ c^k z_k^{k+1} &= z_k^k c^{k+1} \end{aligned} \qquad (\lambda = 2, 4, \ldots, k-1)$$

bzw. folgende Gleichungen für gerades k erfüllt sind:

$$(2)\qquad \begin{aligned} c^{\lambda-1}u_{\lambda-1} &= v_{\lambda-1}c^{\lambda}, & z_k^{\lambda-1}u_{\lambda-1} &= v_{\lambda-1}z_k^{\lambda} \\ c^{\lambda+1}u_{\lambda} &= v_{\lambda}c^{\lambda}, & z_k^{\lambda+1}u_{\lambda} &= v_{\lambda}z_k^{\lambda} \\ c^{k-1}u_{k-1} &= v_{k-1}c^k \\ c^{k+1}z_k^k &= z_k^{k+1}c^k \\ v_{k-1}z_k^k &= z_k^{k-1}u_{k-1}. \end{aligned} \qquad (\lambda = 2, 4, \ldots, k-2)$$

Bei der dualen Bedingung $Q_l^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k)$ sind natürlich die Faktoren auf beiden Seiten aller vorkommenden Gleichungen zu vertauschen.

Wir geben zunächst einige Erläuterungen zur inhaltlichen Bedeutung dieser Bedingungen: Für $k=1$ fällt offensichtlich $Q_r^1(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1)$ mit der Bedingung $Q_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{x}_1)$ zusammen. Die Bedingung $Q_r^2(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$

$$\begin{array}{rcll} \underline{c^1}u_1 &=& v_1 c^2 & \\ & & \downarrow & \\ c^3 z_2^2 &=& z_2^3 c^2 & \Big\} \begin{array}{ll} \text{wie} & Q_l^1(\mathfrak{N}, \mathfrak{x}_2) \\ \text{auf} & c^2, z_2^2 \end{array} \\ \uparrow & & & \\ v_1 z_2^2 &=& \underline{z_2^1}u_1 & \end{array}$$

besagt, daß die vorgegebenen Elemente $\underline{c^1} \in \mathfrak{N}$ und $\underline{z_2^1} \in \mathfrak{x}_2$ als linke Faktoren mit den gleichen Kofaktoren $u_1, v_1 \in \mathfrak{x}_1$ in rechte Faktoren $c^2 \in \mathfrak{N}$ und $z_2^2 \in \mathfrak{x}_2$ übergeführt werden können und daß diese Elemente „weitergeschoben" werden, wobei die mittlere Gleichung der Form nach der Bedingung $Q_l^1(\mathfrak{N}, \mathfrak{x}_2)$ entspricht [2]). Analog schreiben wir die Gleichungen der Bedingung $Q_r^3(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3)$ untereinander, wobei wir wieder die vorgegebenen Elemente $\underline{c^1} \in \mathfrak{N}$ und $\underline{z_3^1} \in \mathfrak{x}_3$ unterstreichen und das „Weiterschieben" der Elemente durch Pfeile kennzeichnen:

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{rcl} \underline{c^1}u_1 &=& v_1 c^2 \\ & & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{ll} \text{wie} & Q_r^1(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_3) \\ \text{auf} & c^3, z_3^3 \end{array} & \left.\begin{array}{rcl} c^3 u_2 &=& v_2 c^2 \\ \downarrow & & \\ \left\{ c^3 z_3^4 \right. &=& z_3^3 c^4 \\ & & \uparrow \\ v_2 z_3^2 &=& z_3^3 u_2 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} \text{wie} & Q_l^2(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) \\ \text{auf} & c^2, z_3^2 \end{array} \\ & \begin{array}{rcl} \uparrow & & \\ v_1 z_3^2 &=& \underline{z_3^1}u_1 \end{array} \end{array}$$

---

[2]) Dabei braucht die Bedingung $Q_l^1(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_2)$ keineswegs zu gelten.

Allgemein stellt $Q_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k)$ eine solche Kette von Gleichungen dar, die von ihren beiden Enden her zu interpretieren ist, wobei wir freilich in Definition 3 die erste und die letzte Gleichung (letztere unter Seitenvertauschung), die zweite und die vorletzte usw. jeweils nebeneinander geschrieben haben.

Für das weitere Arbeiten empfiehlt es sich allerdings, die Schreibweise der Bedingung $Q_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k)$ noch weiter zu formalisieren, um zu einer einfacheren Indizierung der Elemente der auftretenden Gleichungen zu gelangen und die explizite Unterscheidung der Fälle $2 \nmid k$, $2 | k$ umgehen zu können. Dazu führen wir zusätzliche Variable gemäß

$$c^1 = a^1,\ c^2 = b^1 = b^2,\ c^3 = a^3 = a^4,\ c^4 = b^3 = b^4, \ldots,$$

$$z_k^1 = x_k^1,\ z_k^2 = y_k^1 = y_k^2,\ z_k^3 = x_k^3 = x_k^4,\ z_k^4 = y_k^3 = y_k^4, \ldots$$

sowie $u_k = y_k^k$ und $v_k = x_k^k$ ein und erhalten für alle Gleichungen (1) bzw. (2) ersichtlich die einheitliche Schreibweise

$$a^\lambda u_\lambda = v_\lambda b^\lambda, \quad x_k^\lambda u_\lambda = v_\lambda y_k^\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, k),$$

wobei für $\lambda = k$ die triviale Gleichung $x_k^k u_k = x_k^k y_k^k = v_k y_k^k$ hinzugenommen wurde. *Zusammengefaßt können wir also die Bedingung* $Q_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k)$ *auch wie folgt formulieren: Zu jedem* $a^1 \in \mathfrak{N}$ *und zu jedem* $x_k^1 \in \mathfrak{x}_k$ *gibt es Elemente*

$$a^j \in \mathfrak{N}, \quad x_k^j \in \mathfrak{x}_k \qquad (j = 2, 3, \ldots, k),$$

$$b^j \in \mathfrak{N}, \quad y_k^j \in \mathfrak{x}_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

$$u_j \text{ und } v_j \text{ aus } \mathfrak{x}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

derart, daß die Gleichungen

(3) $$a^\lambda u_\lambda = v_\lambda b^\lambda, \quad x_k^\lambda u_\lambda = v_\lambda y_k^\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, k),$$

sowie

(4) $$v_k = x_k^k, \quad u_k = y_k^k$$

und

(5) $$a^{2i} = a^{2i+1},\ x_k^{2i} = x_k^{2i+1},\ b^{2i-1} = b^{2i},\ y_k^{2i-1} = y_k^{2i}$$

erfüllt sind, wobei (5) *stets mit* $i = 1, 2, \cdots, \frac{k-1}{2}$ *bzw.* $i = 1, 2, \cdots, \frac{k}{2}$ *für ungerades bzw. gerades* k *zu lesen ist* [3].

Satz 3 (Hauptsatz). *Zu einer Halbgruppe* $\mathfrak{N}$ *existiert eine k-te r-Quotientenhalbgruppe* $\mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k)$, d. h. *die Unterhalbgruppen* $\mathfrak{x}_1 \subseteq \mathfrak{x}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{x}_k$ *regulärer Elemente von* $\mathfrak{N}$ *bilden eine* Q_r*-Kette, genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1) *Für alle Elemente a und b aus* $\mathfrak{N}$ *und* $\varkappa = 2, 3, \cdots, k$ *gilt:*
Aus $a \cdot b \in \mathfrak{x}_\varkappa$ *und* $a \in \mathfrak{x}_{\varkappa-1}$ *folgt* $b \in \mathfrak{x}_\varkappa$; *aus* $a \cdot b \in \mathfrak{x}_\varkappa$ *und* $b \in \mathfrak{x}_{\varkappa-1}$ *folgt* $a \in \mathfrak{x}_\varkappa$.

[3]) Im letzten Falle sehen wir die Gleichungen $a^k = a^{k+1}$ und $x_k^k = x_k^{k+1}$ als gegenstandslos an.

2) *Für jedes* $\varkappa = 1, 2, \cdots, k$ *ist die Bedingung* $Q_r^\varkappa(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_\varkappa)$ *erfüllt.*

Darüber hinaus ist $\mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k)$ *durch* $\mathfrak{N}$ *und* $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_k$ *bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wir beweisen diesen Satz wieder zusammen mit seiner dualen Aussage, wobei die Eindeutigkeitsbehauptung bereits durch Satz 2 erledigt ist.

I. Für die Notwendigkeit der angegebenen Bedingungen haben wir wegen Hilfssatz 3 nur noch 2) nachzuweisen und schließen hier durch vollständige Induktion über k, wobei für $k=1$ nichts mehr zu zeigen ist. Für beliebige Halbgruppen $\mathfrak{N}$ möge nun jede Q_r-Kette und jede Q_l-Kette der Länge k die Forderung 2) erfüllen. Ist nun $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_{k+1}$ eine Q_r-Kette einer Halbgruppe $\mathfrak{N}$ der Länge $k+1$, also $\mathfrak{N}_{k+1} = \mathfrak{Q}_r^{k+1}(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_{k+1})$ eine $(k+1)$-te r-Quotientenhalbgruppe von $\mathfrak{N}$, dann existiert auch die Halbgruppe $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k)$ und die Bedingungen $Q_r^\varkappa(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_\varkappa)$ für $\varkappa = 1, 2, \cdots, k$ sind nach Induktionsvoraussetzung erfüllt. Damit bleibt lediglich die Bedingung $Q_r^{k+1}(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_{k+1})$ offen. Nun ist gemäß Satz 1 die Halbgruppe $\mathfrak{N}_{k+1}$ gerade k-te l-Quotientenhalbgruppe von $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{Q}_r^1(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1)$ nach der Q_l-Kette

$$\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_1) \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{x}_{k+1}, \mathfrak{x}_1)$$

von $\mathfrak{N}_1$ der Länge k. Folglich gilt nach Induktionsvoraussetzung die Bedingung $Q_l^k(\mathfrak{N}_1; \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_1), \cdots, \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{x}_{k+1}, \mathfrak{x}_1))$, d.h., zu jedem $A^1 \in \mathfrak{N}_1$ und zu jedem $X_k^1 \in \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{x}_{k+1}, \mathfrak{x}_1)$ gibt es geeignete Elemente

$$\begin{aligned} &A^j \in \mathfrak{N}_1, \quad X_k^j \in \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{x}_{k+1}, \mathfrak{x}_1) && (j = 2, 3, \ldots, k),\\ &B^j \in \mathfrak{N}_1, \quad Y_k^j \in \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{x}_{k+1}, \mathfrak{x}_1) && (j = 1, 2, \ldots, k),\\ &U_j \text{ und } V_j \text{ aus } \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{x}_{j+1}, \mathfrak{x}_1) && (j = 1, 2, \ldots, k), \end{aligned}$$

die folgende Gleichungen erfüllen:

$$U_\lambda A^\lambda = B^\lambda V_\lambda, \quad U_\lambda X_k^\lambda = Y_k^\lambda V_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, k), \tag{3'}$$

$$V_k = X_k^k, \quad U_k = Y_k^k, \tag{4'}$$

$$A^{2i} = A^{2i+1}, \quad X_k^{2i} = X_k^{2i+1}, \quad B^{2i-1} = B^{2i}, \quad Y_k^{2i-1} = Y_k^{2i}; \tag{5'}$$

dabei gelten in (5′) die gleichen Verabredungen für den Index i wie in (5). Insbesondere trifft das für die spezielle Wahl von $A^1 = a^1$ aus $\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{N}_1$ und von $X_k^1 = x_{k+1}^1$ aus $\mathfrak{x}_{k+1} \subseteqq \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{x}_{k+1}, \mathfrak{x}_1)$ zu. Alle übrigen in (3′) auftretenden Elemente können wir als Rechtsquotienten aus $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{x}_1)$ mit gleichem Nenner $v_1 \in \mathfrak{x}_1$

$$\begin{aligned} &A^j = c^{j+1} v_1^{-1}, \quad X_k^j = z_{k+1}^{j+1} v_1^{-1} && (j = 2, 3, \ldots, k),\\ &B^j = a^{j+1} v_1^{-1}, \quad Y_k^j = x_{k+1}^{j+1} v_1^{-1} && (j = 1, 2, \ldots, k),\\ &U_j = v_{j+1} v_1^{-1}, \quad V_j = w_{j+1} v_1^{-1} && (j = 1, 2, \ldots, k) \end{aligned}$$

schreiben, wobei also $c^{j+1}\in\mathfrak{N}$, $a^{j+1}\in\mathfrak{N}$ und unter Verwendung von Hilfssatz 4 sogar $z_{k+1}^{j+1}\in\mathfrak{x}_{k+1}$, $x_{k+1}^{j+1}\in\mathfrak{x}_{k+1}$, $v_{j+1}\in\mathfrak{x}_{j+1}$ und $w_{j+1}\in\mathfrak{x}_{j+1}$ gilt. Mit dieser Darstellung erhalten wir aus (3′) für $\lambda=1$

$$B^1V_1=U_1A^1,\quad Y_k^1V_1=U_1X_k^1,$$

also

(6) $$a^2v_1^{-1}w_2=v_2v_1^{-1}a^1v_1,\quad x_{k+1}^2v_1^{-1}w_2=v_2v_1^{-1}x_{k+1}^1v_1,$$

und für $\lambda=2,3,\cdots,k$

$$B^\lambda V_\lambda=U_\lambda A^\lambda,\quad Y_k^\lambda V_\lambda=U_\lambda X_k^\lambda,$$

also

(7) $$a^{\lambda+1}v_1^{-1}w_{\lambda+1}=v_{\lambda+1}v_1^{-1}c^{\lambda+1},\quad x_{k+1}^{\lambda+1}v_1^{-1}w_{\lambda+1}=v_{\lambda+1}v_1^{-1}z_{k+1}^{\lambda+1}.$$

Die Elemente $v_1^{-1}w_2$, $v_1^{-1}a^1v_1$, $v_1^{-1}x_{k+1}^1v_1$ sowie $v_1^{-1}w_{\lambda+1}$, $v_1^{-1}c^{\lambda+1}$ und $v_1^{-1}z_{k+1}^{\lambda+1}$ von $\mathfrak{N}_1=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N},\mathfrak{x}_1)$ dürfen wir wieder als Rechtsquotienten mit gleichem Nenner $t_1\in\mathfrak{x}_1$ schreiben. Gemäß Hilfssatz 4 gibt es dann zunächst Elemente $b^2\in\mathfrak{N}$, $u_2\in\mathfrak{x}_2$, $y_{k+1}^2\in\mathfrak{x}_{k+1}$ mit

$$\begin{aligned} v_1^{-1}w_2 &= u_2t_1^{-1}, && \\ v_1^{-1}a^1v_1 &= b^2t_1^{-1} &\text{bzw.}\quad a^1v_1t_1 &= v_1b^2,\\ v_1^{-1}x_{k+1}^1v_1 &= y_{k+1}^2t_1^{-1} &\text{bzw.}\quad x_{k+1}^1v_1t_1 &= v_1y_{k+1}^2.\end{aligned}$$

Setzen wir nun noch $v_1t_1=u_1\in\mathfrak{x}_1$, so erhalten wir hieraus und aus (6)

(3_1) $$a^1u_1=v_1b^1,\quad x_{k+1}^1u_1=v_1y_{k+1}^1$$

(3_2) $$a^2u_2=v_2b^2,\quad x_{k+1}^2u_2=v_2y_{k+1}^2$$

mit $b^1=b^2$ und $y_{k+1}^1=y_{k+1}^2$ (5_1). Mit den gleichen Gedanken erhalten wir die Darstellungen

$$v_1^{-1}w_{\lambda+1}=u_{\lambda+1}t_1^{-1},\quad v_1^{-1}c^{\lambda+1}=b^{\lambda+1}t_1^{-1},\quad v_1^{-1}z_{k+1}^{\lambda+1}=y_{k+1}^{\lambda+1}t_1^{-1}\qquad(\lambda=2,\dots,k),$$

wobei $b^{\lambda+1}\in\mathfrak{N}$, $u_{\lambda+1}\in\mathfrak{x}_{\lambda+1}$ und $y_{k+1}^{\lambda+1}\in\mathfrak{x}_{k+1}$ gilt, so daß (7) in

(3_3) $$a^{\lambda+1}u_{\lambda+1}=v_{\lambda+1}b^{\lambda+1},\quad x_{k+1}^{\lambda+1}u_{\lambda+1}=v_{\lambda+1}y_{k+1}^{\lambda+1}\qquad(\lambda=2,\dots,k)$$

übergeht. Insgesamt haben wir dann die Aussage: Zu beliebigem $a^1\in\mathfrak{N}$ und $x_{k+1}^1\in\mathfrak{x}_{k+1}$ gibt es Elemente

$$\begin{aligned} &a^j\in\mathfrak{N},\quad x_{k+1}^j\in\mathfrak{x}_{k+1} && (j=2,3,\dots,k+1),\\ &b^j\in\mathfrak{N},\quad y_{k+1}^j\in\mathfrak{x}_{k+1} && (j=1,2,\dots,k+1),\\ &u_j \text{ und } v_j \text{ aus } \mathfrak{x}_j && (j=1,2,\dots,k+1),\end{aligned}$$

welche zunächst die Gleichungen (3_1), (3_2) und (3_3), also die Gleichungen

(3) $$a^\lambda u_\lambda=v_\lambda b^\lambda,\quad x_{k+1}^\lambda u_\lambda=v_\lambda y_{k+1}^\lambda\qquad(\lambda=1,2,\dots,k+1)$$

von $Q_r^{k+1}(\mathfrak{N};\mathfrak{x}_1,\cdots,\mathfrak{x}_{k+1})$ erfüllen. Dabei gelten aber auch die weiteren Gleichungen

(4) und (5) als Folgerungen von (4′) bzw. (5′). Aus $V_k = X_k^k$, also $w_{k+1}v_1^{-1} = z_{k+1}^{k+1}v_1^{-1}$ ergibt sich zunächst $w_{k+1} = z_{k+1}^{k+1}$ und hieraus über

$$u_{k+1}t_1^{-1} = v_1^{-1}w_{k+1} = v_1^{-1}z_{k+1}^{k+1} = y_{k+1}^{k+1}t_1^{-1} \quad \text{auch} \quad u_{k+1} = y_{k+1}^{k+1},$$

während die zweite Gleichung von (4) unmittelbar aus $U_k = v_{k+1}v_1^{-1} = x_{k+1}^{k+1}v_1^{-1} = Y_k^k$ folgt. Weiter erhält man aus den Gleichungen $B^{2i-1} = B^{2i}$ bzw. $Y_k^{2i-1} = Y_k^{2i}$ von (5′) sofort $a^{2i} = a^{2i+1}$ und $x_k^{2i} = x_k^{2i+1}$, während die Gleichungen $A^{2i} = A^{2i+1}$ und $X_k^{2i} = X_k^{2i+1}$ von (5′) über $c^{2i+1} = c^{2i+2}$ und $z_{k+1}^{2i+1} = z_{k+1}^{2i+2}$ auf $b^{2i+1} = b^{2i+2}$ und $y_{k+1}^{2i+1} = y_{k+1}^{2i+2}$ führen. Zusammen mit (5_1) haben wir damit die Gleichungen

$$(5) \qquad a^{2j} = a^{2j+1}, \quad x_{k+1}^{2j} = x_{k+1}^{2j+1}, \quad b^{2j-1} = b^{2j}, \quad y_{k+1}^{2j-1} = y_{k+1}^{2j},$$

wobei der Index j in der Tat die Werte $1, 2, \cdots, \frac{k+1}{2}$ für gerades $k+1$ bzw. $1, 2, \cdots, \frac{(k+1)-1}{2}$ für ungerade $k+1$ annimmt und für gerades $k+1$ die Verabredung von Fußnote 3 zu beachten ist. Somit haben wir die Gültigkeit der Bedingung $Q_r^{k+1}(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_{k+1})$ gezeigt. Die Überlegungen für den Fall, daß $\mathfrak{N}_{k+1} = \mathfrak{Q}_l^{k+1}(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_{k+1})$ eine $(k+1)$-te l-Quotientenhalbgruppe von $\mathfrak{N}$ ist, sind zu den eben durchgeführten dual, womit dieser Teil des Beweises abgeschlossen ist.

II. Wir zeigen nun, daß die im Satz angegebenen Bedingungen 1) und 2) für die Existenz der k-ten r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k)$ hinreichend sind, wobei wir wieder einen Induktionsschluß nach k unter Einbeziehung der dualen Behauptung durchführen. Dabei läuft für $k = 1$ die Bedingung 2) gerade auf die bekannte Existenzbedingung für $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{x}_1)$ bzw. $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{N}, \mathfrak{x}_1)$ hinaus. Wir nehmen daher an, daß jede Kette $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_k$ von Unterhalbgruppen regulärer Elemente einer beliebigen Halbgruppe $\mathfrak{N}$, die 1) und 2) erfüllt, auch Q_r-Kette der Länge k von $\mathfrak{N}$ ist; entsprechend gelte die hierzu duale Aussage. Es sei nun $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \ldots \subseteqq \mathfrak{x}_{k+1}$ eine Kette von Unterhalbgruppen regulärer Elemente einer Halbgruppe $\mathfrak{N}$ mit 1) und 2). Wegen 2) gilt zunächst $Q_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{x}_1)$, es existiert also $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{Q}_r^1(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1)$. Überdies genügen die Unterhalbgruppen $\mathfrak{x}_\varkappa$ $(\varkappa = 2, 3, \cdots, k+1)$ wegen 1) den Voraussetzungen von Hilfssatz 4, wonach auch die Rechtsquotientenhalbgruppen $\mathfrak{y}_\varkappa = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{x}_\varkappa, \mathfrak{x}_1)$ existieren. Wir werden unter a), b) und c) zeigen, daß die Unterhalbgruppen $\mathfrak{y}_2 \subseteqq \ldots \subseteqq \mathfrak{y}_{k+1}$ aus regulären Elementen von $\mathfrak{N}_1$ bestehen und die zu 1) und 2) dualen Aussagen erfüllen. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $\mathfrak{y}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{y}_{k+1}$ eine Q_l-Kette der Länge k von $\mathfrak{N}_1$, so daß die k-te l-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l^k(\mathfrak{N}_1; \mathfrak{y}_2, \cdots, \mathfrak{y}_{k+1})$ existiert, die eine $(k+1)$-te r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_r^{k+1}(\mathfrak{N}; \mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \cdots, \mathfrak{u}_{k+1})$ von $\mathfrak{N}$ ist. Dabei gilt

$$\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{u}_2 = \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_1^{-1}, \quad \mathfrak{u}_\varkappa \cap \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{y}_\varkappa = \mathfrak{x}_\varkappa\mathfrak{x}_1^{-1} \quad \text{für} \quad \varkappa = 3, \ldots, k+1,$$

woraus zunächst

$$\mathfrak{n}_\varkappa \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{n}_\varkappa \cap \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{y}_\varkappa \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{x}_\varkappa \mathfrak{x}_1^{-1} \cap \mathfrak{N} \supseteqq \mathfrak{x}_\varkappa \quad \text{für} \quad \varkappa = 2, \ldots, k+1$$

folgt. Es gilt aber auch $\mathfrak{x}_\varkappa \mathfrak{x}_1^{-1} \cap \mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{x}_\varkappa$, da ein Element $a = x_\varkappa x_1^{-1}$ des Durchschnitts wegen $a x_1 = x_\varkappa$ nach 1) auch $a \in \mathfrak{x}_\varkappa$ erfüllt. Damit ist aber $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_{k+1}$ die zu $\mathfrak{Q}_r^{k+1}(\mathfrak{N}; \mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_{k+1}) = \mathfrak{Q}_r^{k+1}(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_{k+1})$ gehörige Q_r-Kette, also einer der zwei zueinander dualen Induktionsschlüsse von k auf $k+1$ beendet.

a) Zum Beweis der Regularität der Elemente von $\mathfrak{y}_{k+1}$ in $\mathfrak{N}_1$ sei $x_{k+1} x_1^{-1} \in \mathfrak{y}_{k+1}$ und $a y_1^{-1}$, $b y_1^{-1}$ seien zwei (sogleich mit dem gleichen Nenner geschriebene) Elemente aus $\mathfrak{N}_1$ mit

$$x_{k+1} x_1^{-1} a y_1^{-1} = x_{k+1} x_1^{-1} b y_1^{-1}, \quad \text{also} \quad x_{k+1} x_1^{-1} a = x_{k+1} x_1^{-1} b.$$

Da $x_1^{-1} a$ und $x_1^{-1} b$ Elemente von $\mathfrak{N}_1$ sind, können wir sie in der Form

$$x_1^{-1} a = c z_1^{-1} \quad \text{und} \quad x_1^{-1} b = d z_1^{-1}$$

schreiben, woraus zunächst $x_{k+1} c = x_{k+1} d$, also wegen der Regularität von x_{k+1} in $\mathfrak{N}$ auch $c = d$ und damit, wie behauptet,

$$a = x_1 c z_1^{-1} = x_1 d z_1^{-1} = b$$

folgt. Noch leichter ist der Nachweis für die Rechtsregularität der Elemente von $\mathfrak{y}_{k+1}$ in $\mathfrak{N}_1$.

b) Zum Nachweis der zu sich selbst dualen Aussage 1) seien $a y_1^{-1} \in \mathfrak{N}_1$ und $b z_1^{-1} \in \mathfrak{N}_1$ Elemente mit

$$a y_1^{-1} b z_1^{-1} = x_\varkappa x_1^{-1} \in \mathfrak{y}_\varkappa \quad \text{und} \quad b z_1^{-1} \in \mathfrak{y}_{\varkappa-1} \qquad (\varkappa = 3, 4, \ldots, k+1).$$

Wir führen die Multiplikation in $\mathfrak{N}_1$ aus gemäß

$$a c (z_1 t_1)^{-1} = x_\varkappa x_1^{-1} \quad \text{mit} \quad b t_1 = y_1 c, \qquad t_1 \in \mathfrak{x}_1, \quad c \in \mathfrak{N}.$$

Nun erfüllen die Halbgruppen $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_{k+1}$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 4, wonach aus $ac(z_1 t_1)^{-1} \in \mathfrak{y}_\varkappa = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{x}_\varkappa, \mathfrak{x}_1)$ zunächst $ac \in \mathfrak{x}_\varkappa$ bzw. aus $b z_1^{-1} \in \mathfrak{y}_{\varkappa-1}$ auch $b \in \mathfrak{x}_{\varkappa-1}$ folgt. Aus letzterem ergibt sich wegen $c t_1^{-1} = y_1^{-1} b \in \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{x}_{\varkappa-1}, \mathfrak{x}_1)$ auf die gleiche Weise $c \in \mathfrak{x}_{\varkappa-1}$, was zusammen mit $ac \in \mathfrak{x}_\varkappa$ zu $a \in \mathfrak{x}_\varkappa$, d.h. $a y_1^{-1} \in \mathfrak{y}_\varkappa = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{x}_\varkappa, \mathfrak{x}_1)$ führt. Ähnlich zeigt man, daß sich aus

$$a y_1^{-1} b z_1^{-1} = x_\varkappa x_1^{-1} \in \mathfrak{y}_\varkappa \quad \text{und} \quad a y_1^{-1} \in \mathfrak{y}_{\varkappa-1} \qquad (\varkappa = 3, 4, \ldots, k+1)$$

der Reihe nach $a \in \mathfrak{x}_{\varkappa-1}$, $ac \in \mathfrak{x}_\varkappa$, $c \in \mathfrak{x}_\varkappa$, $b t_1 = y_1 c \in \mathfrak{x}_\varkappa$, $t_1 \in \mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_{\varkappa-1}$, $b \in \mathfrak{x}_\varkappa$, also $b z_1^{-1} \in \mathfrak{y}_\varkappa$ ergibt.

c) Schließlich zeigen wir, daß für $\varkappa = 2, 3, \cdots, k+1$ die Bedingungen $Q_l^{\varkappa-1}(\mathfrak{N}_1; \mathfrak{y}_2, \cdots, \mathfrak{y}_\varkappa)$ erfüllt sind. Dazu seien $A^2 = a^1 x_1^{-1} \in \mathfrak{N}_1$ und $X_\varkappa^2 = x_\varkappa^1 x_1^{-1} \in \mathfrak{y}_\varkappa$ die vorgegebenen Elemente. Nach Voraussetzung gilt $Q_r^\varkappa(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_\varkappa)$, also gibt es zu $a^1 \in \mathfrak{N}$ und $x_\varkappa^1 \in \mathfrak{x}_\varkappa$ geeignete Elemente

$$a^j \in \mathfrak{N}, \quad x_\varkappa^j \in \mathfrak{x}_\varkappa \qquad (j = 2, 3, \ldots, \varkappa),$$

$$b^j \in \mathfrak{N}, \quad y_\varkappa^j \in \mathfrak{x}_\varkappa \qquad (j = 1, 2, \ldots, \varkappa),$$

$$u_j \text{ und } v_j \text{ aus } \mathfrak{x}_j \quad (j = 1, 2, \ldots, \varkappa)$$

mit

(3) $$a^\lambda u_\lambda = v_\lambda b^\lambda, \quad x_\varkappa^\lambda u_\lambda = v_\lambda y_\varkappa^\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \varkappa),$$

(4) $$v_\varkappa = x_\varkappa^\varkappa, \qquad u_\varkappa = y_\varkappa^\varkappa,$$

(5) $$a^{2i} = a^{2i+1}, \quad x_\varkappa^{2i} = x_\varkappa^{2i+1}, \quad b^{2i-1} = b^{2i}, \quad y_\varkappa^{2i-1} = y_\varkappa^{2i},$$

letztere mit den entsprechenden Verabredungen für den Index i. Wir greifen aus (3) die Gleichungen für $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$

$$a^1 u_1 = v_1 b^1, \quad x_\varkappa^1 u_1 = v_1 y_\varkappa^1$$

$$a^2 u_2 = v_2 b^2, \quad x_\varkappa^2 u_2 = v_2 y_\varkappa^2$$

heraus, wobei $b^1 = b^2$ und $y_\varkappa^1 = y_\varkappa^2$ wegen (5) gilt. Durch Rechnungen in $\mathfrak{N}_1$ erhalten wir hieraus

$$a^2 u_2 = v_2 v_1^{-1} a^1 u_1, \quad x_\varkappa^2 u_2 = v_2 v_1^{-1} x_\varkappa^1 u_1,$$

also

$$a^2 u_2 u_1^{-1} = v_2 v_1^{-1} a^1, \quad x_\varkappa^2 u_2 u_1^{-1} = v_2 v_1^{-1} x_\varkappa^1$$

und schließlich

$$a^2 u_2 (x_1 u_1)^{-1} = v_2 v_1^{-1} a^1 x_1^{-1}, \quad \varkappa^2 u_2 (x_1 u_1)^{-1} = v_2 v_1^{-1} x_\varkappa^1 x_1^{-1}.$$

Diese Gleichungen haben die Gestalt

$$B^2 V_2 = U_2 A^2, \quad Y_\varkappa^2 V_2 = U_2 X_\varkappa^2,$$

wenn wir $a^2 = B^2 \in \mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{N}_1$, $u_2(x_1 u_1)^{-1} = V_2 \in \mathfrak{y}_2$, $v_2 v_1^{-1} = U_2 \in \mathfrak{y}_2$, $x_\varkappa^2 = Y_\varkappa^2 \in \mathfrak{x}_\varkappa \subseteqq \mathfrak{y}_\varkappa$ setzen und $A^2 = a^1 x_1^{-1}$ und $X_\varkappa^2 = x_\varkappa^1 x_1^{-1}$ berücksichtigen. Entsprechend setzen wir allgemeiner

$$a^j = B^j \in \mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{N}_1, \quad x_\varkappa^j = Y_\varkappa^j \in \mathfrak{x}_\varkappa \subseteqq \mathfrak{y}_\varkappa \qquad (j = 2, 3, \ldots, \varkappa),$$

$$b^j = A^j \in \mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{N}_1, \quad y_\varkappa^j = X_\varkappa^j \in \mathfrak{x}_\varkappa \subseteqq \mathfrak{y}_\varkappa \qquad (j = 3, 4, \ldots, \varkappa),$$

$$u_j = V_j \text{ und } v_j = U_j \text{ aus } \mathfrak{x}_j \subseteqq \mathfrak{y}_j \qquad (j = 3, 4, \ldots, \varkappa)$$

und erhalten somit unter Berücksichtigung auch der übrigen Gleichungen von (3): Zu vorgegebenen Elementen $A^2 \in \mathfrak{N}_1$ und $X_\varkappa^2 \in \mathfrak{y}_\varkappa$ existieren Elemente aus den entsprechenden Unterhalbgruppen von $\mathfrak{N}_1$, welche die Gleichungen

(3″) $$U_\lambda A^\lambda = B^\lambda V_\lambda, \quad U_\lambda X_\varkappa^\lambda = Y_\varkappa^\lambda V_\lambda \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots, \varkappa)$$

erfüllen. Wie man leicht nachprüft, übertragen sich aus (4) und (5) unmittelbar die (3″) ergänzenden Gleichungen (4″) und (5″), womit die Unterhalbgruppen $\mathfrak{y}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{y}_{k+1}$ von $\mathfrak{N}_1$ die zu 2) dualen Bedingungen $Q_l^{\varkappa-1}(\mathfrak{N}_1; \mathfrak{y}_2, \cdots, \mathfrak{y}_\varkappa)$ mit $\varkappa = 2, 3, \cdots, k+1$ erfüllen.

§ 3

Wir wenden uns nun einer näheren Untersuchung der Elemente einer k-ten r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k)$ zu, die ja zunächst nur in der recht unübersichtlichen Form

$$k = 2: \ (x_2 y_1^{-1})^{-1}(a x_1^{-1})$$

$$k = 3: \ (x_2 y_1^{-1})^{-1}(a x_1^{-1})[(y_2 z_1^{-1})^{-1}(x_3 v_1^{-1})]^{-1}$$

$$\vdots$$

mit Elementen $a \in \mathfrak{N}$, $x_1 \in \mathfrak{x}_1$, $x_2 \in \mathfrak{x}_2$, $y_1 \in \mathfrak{x}_1$; $x_3 \in \mathfrak{x}_3$, $v_1 \in \mathfrak{x}_1$, $y_2 \in \mathfrak{x}_2$, $z_1 \in \mathfrak{x}_1$; $\cdots$ geschrieben werden können, wobei insgesamt 2^k Elemente von $\mathfrak{N}$ auftreten.

Satz 4. *Es sei $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k)$ eine k-te r-Quotientenhalbgruppe einer Halbgruppe $\mathfrak{N}$ nach der Q_r-Kette $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_k$. Dann besitzt jedes Element $a_k \in \mathfrak{N}_k$ eine Quotientendarstellung der Form*

$$a_k = x_1 x_2^{-1} x_3 \cdots x_{k-1}^{-1} \cdot a x_k^{-1} \cdot x_{k-1} \cdots x_3^{-1} x_2 x_1^{-1}, \quad k \text{ ungerade},$$

bzw.

$$a_k = x_1 x_2^{-1} x_3 \cdots x_{k-1} \cdot x_k^{-1} a \cdot x_{k-1}^{-1} \cdots x_3^{-1} x_2 x_1^{-1}, \quad k \text{ gerade},$$

mit geeigneten Elementen $a \in \mathfrak{N}$, $x_1 \in \mathfrak{x}_1, \cdots, x_k \in \mathfrak{x}_k$.

Insbesondere können wir damit $\mathfrak{N}_k$ selbst als Komplexprodukt

$$\mathfrak{N}_k = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2^{-1} \mathfrak{x}_3 \cdots \mathfrak{x}_{k-1}^{-1} \cdot \mathfrak{N} \mathfrak{x}_k^{-1} \cdot \mathfrak{x}_{k-1} \cdots \mathfrak{x}_3^{-1} \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_1^{-1}, \quad k \text{ ungerade},$$

bzw.

$$\mathfrak{N}_k = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2^{-1} \mathfrak{x}_3 \cdots \mathfrak{x}_{k-1} \cdot \mathfrak{x}_k^{-1} \mathfrak{N} \cdot \mathfrak{x}_{k-1}^{-1} \cdots \mathfrak{x}_3^{-1} \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_1^{-1}, \quad k \text{ gerade},$$

schreiben, was jedoch weniger aussagt, da für jedes Element $a_k \in \mathfrak{N}_k$ immer der gleiche „Nenner" $x_\varkappa$ bei $\mathfrak{x}_\varkappa$ und $\mathfrak{x}_\varkappa^{-1}$ verwendet werden kann. Zur besseren Übersichtlichkeit geben wir auch die entsprechende Darstellung eines Elementes a_k einer k-ten l-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_l^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k)$ an:

$$a_k = x_1^{-1} x_2 x_3^{-1} \cdots x_{k-1} \cdot x_k^{-1} a \cdot x_{k-1}^{-1} \cdots x_3 x_2^{-1} x_1, \quad k \text{ ungerade},$$

bzw.

$$a_k = x_1^{-1} x_2 x_3^{-1} \cdots x_{k-1}^{-1} \cdot a x_k^{-1} \cdot x_{k-1} \cdots x_3 x_2^{-1} x_1, \quad k \text{ gerade}.$$

Beweis. Da der Satz und seine duale Aussage für $k = 1$ ersichtlich richtig sind, genügt es wieder, die im Satz angegebene Darstellung der Elemente a_k der k-ten r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k)$ von $\mathfrak{N}$ aus der Darstellung herzuleiten, die nach Induktionsvoraussetzung vorliegt, wenn man $\mathfrak{N}_k$ gemäß Satz 1 als $(k-1)$-te l-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_l^{k-1}(\mathfrak{N}_1; \mathfrak{y}_2, \cdots, \mathfrak{y}_k)$ von $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{x}_1)$ auffaßt. Ist k gerade, also $k-1$ ungerade, so gilt dann

$$a_k = Y_2^{-1} Y_3 \cdots Y_{k-1} \cdot Y_k^{-1} A \cdot Y_{k-1}^{-1} \cdots Y_3^{-1} Y_2$$

mit geeigneten Elementen $A \in \mathfrak{N}_1$, $Y_\varkappa \in \mathfrak{y}_\varkappa$ für $\varkappa = 2, 3, \cdots, k$. Dabei dürfen wir alle diese Elemente von $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{x}_1)$ wieder mit dem gleichen Nenner $x_1 \in \mathfrak{x}_1$ schreiben,

$$A = a x_1^{-1}, \quad Y_\varkappa = x_\varkappa x_1^{-1} \qquad (\varkappa = 2, 3, \ldots, k),$$

wobei a und zunächst auch die $x_\varkappa$ Elemente von $\mathfrak{N}$ sind, jedoch nach Hilfssatz 4 sogar $x_\varkappa \in \mathfrak{x}_k$ gilt. Aus

$$a_k = (x_2 x^{-1})^{-1} x_3 x_1^{-1} \cdots x_{k-1} x_1^{-1} (x_k x_1^{-1})^{-1} a x_1^{-1} (x_{k-1} x_1^{-1})^{-1} \cdots (x_3 x_1^{-1})^{-1} x_2 x_1^{-1}$$

folgt damit die behauptete Darstellung

$$a_k = x_1 x_2^{-1} x_3 \ldots x_{k-1} \cdot x_k^{-1} a \cdot x_{k-1}^{-1} \cdots x_3^{-1} x_2 x_1^{-1}.$$

Für ungerades k, also gerades $k-1$, führt

$$a_k = Y_2^{-1} Y_3 \cdots Y_{k-1}^{-1} \cdot A Y_k^{-1} \cdot Y_{k-1} \cdots Y_3^{-1} Y_2$$

mit $A = a x_1^{-1}$ und $Y_\varkappa = x_\varkappa x_1^{-1}$ entsprechend auf

$$a_k = x_1 x_2^{-1} x_3 \cdots x_{k-1}^{-1} \cdot a x_k^{-1} \cdot x_{k-1} \cdots x_3^{-1} x_2 x_1^{-1}.$$

Insbesondere folgt aus diesem Satz, daß jede Unterhalbgruppe $\mathfrak{m}$ der k-ten r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k)$ von $\mathfrak{N}$, die sowohl $\mathfrak{x}_k$ wie auch $\mathfrak{x}_k^{-1}$ umfaßt, eine Darstellung als Komplexprodukt

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2^{-1} \cdots \mathfrak{x}_{k-1}^{-1} (\mathfrak{m} \cap \mathfrak{N}) \mathfrak{x}_k^{-1} \mathfrak{x}_{k-1} \cdots \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_1^{-1}, \quad k \text{ ungerade},$$

bzw.

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2^{-1} \cdots \mathfrak{x}_{k-1} \mathfrak{x}_k^{-1} (\mathfrak{m} \cap \mathfrak{N}) \mathfrak{x}_{k-1}^{-1} \cdots \mathfrak{x}_2 \mathfrak{x}_1^{-1}, \quad k \text{ gerade},$$

gestattet. Eine solche Unterhalbgruppe $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{N}_k$ ist also bereits durch ihren Durchschnitt $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{N}$ mit der Halbgruppe $\mathfrak{N}$ eindeutig festgelegt, was speziell etwa für die in jedem Erweiterungsschritt verwendeten Nennermengen zutrifft.

Auch die wichtige Aussage, daß sich jeweils endlich viele Elemente einer Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ bzw. $\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ mit einem gleichen Nenner schreiben lassen, überträgt sich auf k-te Quotientenhalbgruppen:

Satz 5. *Endlich viele Elemente $a_k, b_k, \cdots$ einer k-ten r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k)$ lassen sich stets in der Form*

$$a_k = x_1 x_2^{-1} x_3 \cdots x_{k-1}^{-1} \cdot a x_k^{-1} \cdot x_{k-1} \cdots x_3^{-1} x_2 x_1^{-1}$$
$$b_k = x_1 x_2^{-1} x_3 \cdots x_{k-1}^{-1} \cdot b x_k^{-1} \cdot x_{k-1} \cdots x_3^{-1} x_2 x_1^{-1} \qquad (k \text{ ungerade})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

bzw.

$$a_k = x_1 x_2^{-1} x_3 \cdots x_{k-1} \cdot x_k^{-1} a \cdot x_{k-1}^{-1} \cdots x_3^{-1} x_2 x_1^{-1}$$
$$b_k = x_1 x_2^{-1} x_3 \cdots x_{k-1} \cdot x_k^{-1} b \cdot x_{k-1}^{-1} \cdots x_3^{-1} x_2 x_1^{-1} \qquad (k \text{ gerade})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

mit Elementen $a, b, \cdots$ aus $\mathfrak{N}$ und dem gleichen Nenner $x_\varkappa \in \mathfrak{x}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \cdots, k)$ schreiben.

Der Beweis erfolgt genau wie der von Satz 4, da man dort ebensogut mehrere Elemente $a_k, b_k, \cdots$ von

$$\mathfrak{R}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{R}; \mathfrak{x}_1 \ldots, \mathfrak{x}_k) = \mathfrak{Q}_l^{k-1}(\mathfrak{R}_1; \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_k)$$

betrachten kann.

Wir bemerken noch, daß sich damit eine direkte Zurückführung der Addition in einem k-ten r-Quotientenhalbring $\mathfrak{R}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{R}; \mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_k)$ des Halbringes $\mathfrak{R}$ (vgl. das Ende der Einleitung) auf die Addition in $\mathfrak{R}$ ergibt. Schreibt man nämlich (etwa bei ungeradem k) die Elemente a_k und b_k von $\mathfrak{R}_k$ in der in Satz 5 angegebenen Form, so gilt ersichtlich

$$a_k + b_k = x_1 x_2^{-1} x_3 \cdots x_{k-1}^{-1} \cdot (a+b) x_k^{-1} \cdot x_{k-1} \cdots x_3^{-1} x_2 x_1^{-1}.$$

Literaturverzeichnis

[1] K. MURATA, On the quotient semi-group of a noncommutative semi-group, *Osaka math. J.*, **2** (1950), 1—5.

[2] H. J. WEINERT, Über Halbringe und Halbkörper. II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **14** (1963), 209—227.

[3] H. J. WEINERT, Zur Erweiterung algebraischer Strukturen durch Rechtsquotientenbildung, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **16** (1965), 213—214.

(Eingegangen am 4. Juli 1967)