Об одной задаче Б. В. Гнеденко

А. П. БИКЯЛИС (Вильнюс), Й. МОДЬОРОДИ*) (Будапешт)

1. В последнее время появилось ряд работ посвященных исследованиям предельных закономерностей для сумм случайного числа независимых случайных слагаемых. Но, как недавно указал Б. В. Гнеденко [1], много интересных задач ещё не решено. Например, при каких условиях имеет место закон больших чисел для последовательностей сумм случайного числа ν_n первых слагаемых последовательности $\{\xi_n\}$ независимых случайных величин? Мы здесь будем заниматься случаем, когда слагаемые ξ_k и число слагаемых ν_n тоже независимы.

2. Рассмотрим последовательность серий

$$\xi_{n1}, \xi_{n2}, \cdots, \xi_{n\nu_n} \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

случайного числа ν_n независимых в каждой серии случайных величин. Предположим, что ν_n принимает целые положительные значения и не зависит от случайных величин n-той серии. Кроме того, пусть ν_n, $n=1, 2, \cdots$, имеют конечные математические ожидания.

Последовательность

$$\zeta_{\nu_n}^{(n)} = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \cdots + \xi_{n\nu_n} \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{2}$$

будем называть устойчивой, если существует последовательность постоянных $\{A_k^{(n)}\}$, $n, k=1, 2, \cdots$, таких, что случайные величины $\zeta_{\nu_n}^{(n)} - A_{\nu_n}^{(n)}$ по вероятности сходятся к нулю при $n \to \infty$.

Об устойчивости последовательности (2) гласит следующая

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность* (2) *была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы при $n \to \infty$ выполнялись условия*

$$1)\quad M\left(\sum_{k=1}^{\nu_n} \int\limits_{|x|>1} dF_{nk}(x+m_{nk})\right) \to 0, \qquad 2)\quad M\left(\sum_{k=1}^{\nu_n} \int\limits_{|x|\le 1} x^2\, dF_{nk}(x+m_{nk})\right) \to 0.$$

*) J. Mogyoródi

Здесь $F_{nk}(x)$ — функция распределения случайной величины ξ_{nk}, а m_{nk} — медиана ξ_{nk}.

Доказательство. *Достаточность.* Положим

$$\xi'_{nk} = \xi_{nk} - m_{nk}; \quad \xi''_{nk} = \begin{cases} \xi'_{nk}, & \text{если} \quad |\xi'_{nk}| \leqq 1, \\ 0, & \text{если} \quad |\xi'_{nk}| > 1; \end{cases}$$

$$F'_{nk}(x) = P(\xi'_{nk} < x); \quad A^{(n)}_{\nu_n} = \sum_{k=1}^{\nu_n} (m_{nk} + M(\xi''_{nk}));$$

$$\zeta^{(n)\prime}_{\nu_n} = \sum_{k=1}^{\nu_n} \xi'_{nk}, \quad \zeta^{(n)\prime\prime}_{\nu_n} = \sum_{k=1}^{\nu_n} \xi''_{nk}.$$

Через B_n и $\bar{B}_n$ обозначим, соответственно, события $\zeta^{(n)\prime}_{\nu_n} = \zeta^{(n)\prime\prime}_{\nu_n}$ и $\zeta^{(n)\prime}_{\nu_n} \neq \zeta^{(n)\prime\prime}_{\nu_n}$ Нетрудно проверить, что

$$(3) \qquad P(\bar{B}_n) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\zeta^{(n)\prime}_{\nu_n} \neq \zeta^{(n)\prime\prime}_{\nu_n}, \nu_n = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\zeta^{(n)\prime}_{k} \neq \zeta^{(n)\prime\prime}_{k}) P(\nu_n = k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(\nu_n = k) P\left(\sum_{j=1}^{k} \xi'_{nj} \neq \sum_{j=1}^{k} \xi''_{nj}\right) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} P(\nu_n = k) \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{|x|>1} dF'_{nj}(x) =$$

$$= M\left(\sum_{j=1}^{\nu_n} \int\limits_{|x|>1} dF'_{nj}(x)\right).$$

Для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ имеем

$$(4) \qquad P\left(|\zeta^{(n)}_{\nu_n} - A^{(n)}_{\nu_n}| > \varepsilon\right) = P\left(|\zeta^{(n)}_{\nu_n} - A^{(n)}_{\nu_n}| > \varepsilon, B_n\right) + P\left(|\zeta^{(n)}_{\nu_n} - A^{(n)}_{\nu_n}| > \varepsilon, \bar{B}_n\right).$$

С помощью неравенства Чебышева получаем

$$(5) \qquad P\left(|\zeta^{(n)}_{\nu_n} - A^{(n)}_{\nu_n}| > \varepsilon, B_n\right) = P\left(\left|\sum_{k=1}^{\nu_n} (\xi''_{nk} - M(\xi''_{nk}))\right| > \varepsilon, B_n\right) \leqq$$

$$\leqq P\left(\left|\sum_{k=1}^{\nu_n} (\xi''_{nk} - M(\xi''_{nk}))\right| > \varepsilon\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\nu_n = k) P\left(\left|\sum_{j=1}^{k} (\xi''_{nj} - M(\xi''_{nj}))\right| > \varepsilon\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} P(\nu_n = k) \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{|x|\leqq 1} x^2\, dF'_{nj}(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} M\left(\sum_{k=1}^{\nu_n} \int\limits_{|x|\leqq 1} x^2\, dF'_{nk}(x)\right).$$

Из (3), (4) и (5) вытекает неравенство

$$P\left(|\zeta^{(n)}_{\nu_n} - A^{(n)}_{\nu_n}| > \varepsilon\right) \leqq M\left(\sum_{k=1}^{\nu_n} \int\limits_{|x|>1} dF'_{nk}(x)\right) + \frac{1}{\varepsilon^2} M\left(\sum_{k=1}^{\nu_n} \int\limits_{|x|\leqq 1} x^2\, dF'_{nk}(x)\right),$$

а тем самым и достаточность условий Теоремы 1.

Необходимость. Предположим, что для последовательности $\{\zeta_{\nu_n}^{(n)}\}$ существует последовательность $\{A_k^{(n)}\}$ постоянных таких, что

$$\zeta_{\nu_n}^{(n)} - A_{\nu_n}^{(n)} \tag{6}$$

при $n \to \infty$ по вероятности сходится к нулю. Это утверждение равносильно тому, что характеристическая функция случайной величины (6) сходится к единице при $n \to \infty$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} M\left(e^{it(\zeta_{\nu_n}^{(n)} - A_{\nu_n}^{(n)})}\right) = 1 \tag{7}$$

для каждого фиксированного t.

Пусть $f_{nk}(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ_{nk}, тогда

$$M\left(e^{it(\zeta_{\nu_n}^{(n)} - A_{\nu_n}^{(n)})}\right) = M\left(e^{-itA_{\nu_n}^{(n)}} \prod_{j=1}^{\nu_n} f_{nj}(t)\right).$$

Так как выполняется неравенство

$$\left| e^{-itA_{\nu_n}^{(n)}} \prod_{j=1}^{\nu_n} f_{nj}(t) \right| \leqq 1$$

то из (7) непосредственно вытекает, что случайная величина

$$\left| \prod_{j=1}^{\nu_n} f_{nj}(t) \right|$$

по вероятности сходится к единице при $n \to \infty$. Далее доказательство проводится точно так же, как и доказательство необходимости теоремы § 22 книги Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова [2].

Пользуясь утверждением Теоремы 1, рассмотрим закон больших чисел. Мы скажем, что для последовательности (2) выполняется закон больших чисел, если существует последовательность $\{C_n\}$ констант таких, что при $n \to \infty$ случайная величина $\zeta_{\nu_n}^{(n)} - C_n$ по вероятности сходится к нулю.

Теорема 2. *Для того чтобы при надлежащем подборе констант $\{C_n\}$ последовательность $\zeta_{\nu_n}^{(n)}$ была подчинена закону больших чисел, необходимо и достаточно, чтобы $n \to \infty$ выполнялись условия*

1′) $M\left(\sum_{k=1}^{\nu_n} \int_{|x|>1} dF_{nk}(x+m_{nk})\right) \to 0$, 2′) $M\left(\sum_{k=1}^{\nu_n} \int_{|x|\leqq 1} x^2\, dF_{nk}(x+m_{nk})\right) \to 0$,

3′) $P\left(\left|\sum_{k=1}^{\nu_n} \left\{ \int_{|x|\leqq 1} x\, dF_{nk}(x+m_{nk}) + m_{nk} \right\} - C_n \right| > \varepsilon\right) \to 0.$

Доказательство. *Достаточность.* Имеем

$$P(|\zeta_{\nu_n}^{(n)} - C_n| \geqq \varepsilon) \leqq P\left(|\zeta_{\nu_n}^{(n)} - A_{\nu_n}^{(n)}| \geqq \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|A_{\nu_n}^{(n)} - C_n| \geqq \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

где

$$A_{\nu_n}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\nu_n} \left\{ m_{nk} + \int_{|x| \leqq 1} x \, dF_{nk}(x + m_{nk}) \right\}. \tag{8}$$

При выполнении условий 1′) и 2′) по Теореме 1 первый член в правой части этого неравенства сходится к нулю при $n \to \infty$. Условие 3 равносильно сходимости к нулю второго члена.

Необходимость. Предположим, что случайная величина $\zeta_{\nu_n}^{(n)} - C_n$ по вероятности сходится к нулю при $n \to \infty$. Повторяя доказательство необходимости условий Теоремы 1, получаем, что выполняются условия 1′) и 2′) настоящей теоремы. По Теореме 1 эти условия гарантируют сходимость по вероятности к нулю случайной величины $\zeta_{\nu_n}^{(n)} - A_{\nu_n}^{(n)}$ при $n \to \infty$. Здесь $A_{\nu_n}^{(n)}$ определено равенством (8). Следовательно, случайная величина $A_{\nu_n}^{(n)} - C_n$ необходимо должна сходиться по вероятности к нулю при $n \to \infty$, что и означает необходимость условия 3′). Теорема 2 полностью доказана.

Замечание. Первые два условия Теоремы 1 и 2 равносильны следующему условию:

$$\lim_{n \to \infty} M\left(\sum_{k=1}^{\nu_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \, dF_{nk}(x + m_{nk})\right) = 0$$

(ср. с леммой § 22 книги [2]).

Следующее утверждение дает необходимые и достаточные условия того, чтобы последовательность независимых случайных величин подчинялась закону больших чисел для сумм случайного числа случайных слагаемых.

Теорема 3. *Пусть имеем последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и независимую от них случайную величину ν_n, принимающую целые положительные значения. Тогда для того, чтобы при данных постоянных $B_n > 0$ существовала последовательность $\{C_n\}$ чисел таких что для каждого $\varepsilon > 0$ имело место соотношение*

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{\nu_n} \xi_i - C_n\right| > \varepsilon\right) = 0$$

необходимо и достаточно, чтобы при фиксированном $\delta > 0$

$$1'') \qquad \lim_{n\to\infty} M\left(\sum_{k=1}^{\nu_n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{B_n^2+x^2}\, dF_k(x+m_k)\right) = 0,$$

$$2'') \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{\nu_n}\left(m_k + \int_{|x|\le B_n} x\, dF_k(x+m_k)\right) - C_n\right| > \delta\right) = 0.$$

Здесь $F_k(x)$ *и* m_k *— соответственно функция распределения и медиана случайной величины* ξ_k.

В случае одинаково распределенных $\xi_1, \xi_2, \ldots$ эти теоремы могут быть сформулированы следующим образом.

Теорема 4. *Если* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и* $B_n \to \infty$, *то суммы*

$$\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{\nu_n} \xi_i \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

устойчивы тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$1''') \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{B_n^2+x^2}\, dF(x+m)\right) M(\nu_n) = 0.$$

К последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *применим закон больших чисел при данных постоянных* $B_n > 0$ *и надлежащем подборе констант* C_n *тогда и только тогда, когда выполняется условие* 1''') *и*

$$2''') \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\nu_n}{B_n}\left(m + \int_{|x|\le B_n} x\, dF(x+m)\right) - C_n\right| > \delta\right) = 0.$$

Литература

[1] Б. В. Гнеденко, О связи теории суммирования независимых случайных величин с задачами теории массового обслуживания и теории надежности, *Revue roumaine math. pures et appl.*, **12** (1967), 1243—1353.

[2] B. V. Gnedenko — A. N. Kolmogorov, *Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen* (Berlin, 1960).

(Поступило 19/IX/1968.)