# Über Supplemente in endlichen Gruppen

Von LUDWIG PROHAŠKA in Rostock (DDR)

**1.** $G$ sei eine endliche Gruppe, $e$ ihr Einselement. $N \lhd G$ bedeutet, daß $N$ Normalteiler von $G$ ist. Die Untergruppe $U$ von $G$ heißt ein *Supplement* von $N$, wenn $G = UN$. Es gibt immer das triviale Supplement $U = G$, im allgemeinen interessieren Supplemente mit möglichst kleinem Durchschnitt $U \cap N$. Ist insbesondere $U \cap N = \langle e \rangle$ so heißt $U$ ein *Komplement* von $N$. In diesem Fall ist $G$ eine zerfallende Erweiterung von $N$ mit $U$.

Sei

$$G = \sum_{\nu=1}^{n} Ur_\nu$$

eine Zerlegung von $G$ in Nebenklassen nach $U$ mit einem festen Repräsentantensystem $R = \{r_\nu, \ \nu = 1, \ldots, n\}$. Transformiert man $r_1, \ldots, r_n$ mit Elementen aus $U$, so erhält man

$$u^{-1} r_\nu u = c_{\nu,u} r_{\nu u} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n; \ u \in U),$$

wo $c_{\nu,u} \in U$ ist und die $r_{1u}, \ldots, r_{nu}$ eine von $u$ abhängige Permutation der $r_1, \ldots, r_n$ bilden. Die von den $c_{\nu,u}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n; \ u \in U)$ erzeugte Untergruppe $C \subseteqq U$ heißt die zum Repräsentantensystem $R$ gehörige *Koeffizientengruppe.*

Es ist $C \lhd U$. Denn sind $u, v \in U$, so gilt

$$v^{-1} u^{-1} r_\nu uv = v^{-1} c_{\nu,u} v \cdot v^{-1} r_{\nu u} v = v^{-1} c_{\nu,u} v \cdot c_{\nu u, v} r_{\nu uv}.$$

Andererseits ist

$$(uv)^{-1} r_\nu (uv) = c_{\nu,uv} r_{\nu uv},$$

also

$$v^{-1} c_{\nu,u} v = c_{\nu,uv} \cdot c_{\nu u, v}^{-1} \in C.$$

Ist insbesondere $C = \langle e \rangle$, so heißt $R$ ein *ausgezeichnetes Repräsentantensystem* für $U$ in $G$ [2]. Ein bekannter Satz von BURNSIDE über Komplemente [1], p. 327, läßt sich mittels dieses Begriffs folgendermaßen aussprechen [2]:

(A) *Sei* $G = \sum_{r_\nu \in R} Pr_\nu$, *R habe die Koeffizientengruppe* $C = \langle e \rangle$, *und sei P abelsche Sylowgruppe von G. Dann enthält G einen Normalteiler N mit* $G = PN$ *und* $P \cap N = \langle e \rangle$.

Die Voraussetzung über $P$ wurde in Sätzen von KOCHENDÖRFFER [2] und ZAPPA [6] abgeschwächt.

In [3] beweist KOCHENDÖRFFER für eine Untergruppe $H$ von $G$:

(B) *Sei* $G=\sum_{r_\nu\in R} Hr_\nu$, *$R$ habe die Koeffizientengruppe $C$, sei* $([G:H],[H:C])=1$, *und sei $H/C$ nilpotent. Dann enthält $G$ einen Normalteiler $N$ mit $G=HN$ und $H\cap N\subseteq C$*

Wenn $C=\langle e\rangle$ ist, kann man „$H/C$ ist nilpotent" ersetzen durch „$H/C$ ist Sylowturmgruppe", d.h. es gibt eine Untergruppenkette $H=H_0\supset H_1\supset\dots$ $\dots\supset H_{r-1}\supset H_r=C$, deren Glieder $H_i$ sämtlich Normalteiler von $H$ sind und deren Indizes $[H_{i-1}:H_i]$ $(i=1,2,\dots,r)$, paarweise teilerfremde Primzahlpotenzen sind [5].

**2.** In [3] und [4] findet sich die Vermutung, daß in ($B$) auch für $C\neq\langle e\rangle$ die Voraussetzung „$H/C$ ist nilpotent" noch abgeschwächt werden kann. Wir zeigen, daß sie nicht durch „$H/C$ ist Sylowturmgruppe" ersetzbar ist.

Beispiel. $G=S_5=$ volle Permutationsgruppe des Grades 5. Die permutierten Elemente seien die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5. $H=S_4=$ Untergruppe derjenigen Permutationen, welche die 5 festlassen. Als Repräsentanten für die Nebenklassen von $H$ in $G$ wählen wir:

$e$ (die identische Permutation), (12)(34)(15), (25), (35), (45). In $S_4$ ist bekanntlich $V=\langle(12)(34),(13)(24)\rangle$ Normalteiler. Er liegt in der alternierenden Gruppe der $S_4$ und es ist $S_4/V$ Sylowturmgruppe isomorph der $S_3$.

Bei Transformation mit Elementen aus $H$ werden die Permutationen (15), (25), (35), (45) untereinander vertauscht. Da $(12)(34)\in V\lhd H$, geht dies Element bei Transformation mit Elementen aus $H$ in Elemente aus $V$ über. Das angegebene Repräsentantensystem für $H$ in $G$ besitzt also eine Koeffizientengruppe $\subseteq V$. $V$ ist genau die Koeffizientengruppe, denn

$$(123)(25)(132)=(12)(34)\cdot(12)(34)(15).\quad(123)(12)(34)(15)(132)=(13)(24)\cdot(35).$$

Wäre der vermutete Satz richtig, so müßte $G$ einen Normalteiler $N$ enthalten mit $G=HN$ und $H\cap N\subseteq V$. Aus $G/N\cong H/H\cap N$ ergibt sich $|N|=\dfrac{|G|\cdot|H\cap N|}{|H|}=5k$ $(k=1,2,4)$. Bekanntlich enthält die $S_5$ aber keinen Normalteiler von einer dieser Ordnungen.

**3.** Es sollen nun einige Bedingungen angegeben werden, unter denen der vermutete Satz für Sylowturmgruppen gültig ist.

Bezeichnet $\pi$ eine Menge von Primzahlen, so sei $u_\pi(G)$ das Erzeugnis aller Elemente aus $G$, deren Ordnung nicht durch eine Primzahl aus $\pi$ teilbar ist.

Satz. *Sei*

(a) $G\supset H\rhd C$, *$C$ umfasse die Koeffizientengruppe eines Repräsentantensystems $R$ von $H$ in $G$,*

(b) $([G:H],[H:C])=1$, $H/C$ *Sylowturmgruppe. Ferner gelte eine der Bedingungen*

($c_1$) $([H:C],[C:\langle e\rangle])=1$,

($c_2$) $H \lhd G$,

($c_3$) $[C:\langle e\rangle]$ *enthalte nur Primteiler von* $[H:C]$, *$H$ sei subnormal in $G$, d.h. es gibt eine Untergruppenkette* $G=K_s \rhd K_{s-1} \rhd \ldots \rhd K_1 \rhd K_0 = H$.
*Bezeichnet $\pi$ die Menge der Primteiler von $[H:C]$, so ist*

$$G = Hu_\pi(G) \quad \textit{und} \quad H \cap u_\pi(G) \subseteqq C.$$

Anmerkung: Unter der Bedingung ($c_1$) ist $H \cap u_\pi(G) = C$.

Beweis. ($c_1$): Nach einem Satz von SCHUR [7], p. 162, besitzt $C$ in $H$ ein Komplement $\bar{H}$, d.h. $H=\bar{H}C$ und $\bar{H}\cap C=\langle e\rangle$. Da $H/C \cong \bar{H}$, ist $\bar{H}$ Sylowturmgruppe. Der Komplex $CR$ ist ein Repräsentantensystem für $\bar{H}$ in $G$. Weil für alle $h \in H$ gilt $h^{-1}CRh=CR$, ist $CR$ ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem für $\bar{H}$ in $G$. Es ist $[G:\bar{H}]=[G:H][C:\langle e\rangle]$, $[\bar{H}:\langle e\rangle]=[H:C]$, also $([G:\bar{H}],[\bar{H}:\langle e\rangle])=1$. Nach [5] ist dann $G=\bar{H}u_\pi(G)$ und $\bar{H}\cap u_\pi(G)=\langle e\rangle$, woraus folgt $G=Hu_\pi(G)$ und $H\cap u_\pi(G)=C$.

($c_2$): $C$ ist Normalteiler im Normalisator $N_G(H)$ von $H$ in $G$, denn ist $x^{-1}= =hr_\nu \in N_G(H)$ $(h\in H, r_\nu \in R)$, so gilt für $c \in C$ $x^{-1}cx = hr_\nu c r_\nu^{-1} h^{-1} = hc c_{\nu,c} r_{\nu c} r_\nu^{-1} h^{-1} \in H$. D.i. gleichbedeutend mit $r_{\nu c}=r_\nu$ und wegen $C \lhd H$ folgt $x^{-1}cx \in C$. Die Voraussetzung ($c_2$) ergibt dann $C \lhd G$. Es ist

$$G/C = \sum_{r_\nu \in R} (H/C)(Cr_\nu)$$

und für alle $h \in H$, $r_\nu \in R$ gilt mit geeigneten $r_\mu \in R$

$$(Ch)^{-1}(Cr_\nu)(Ch)=(Cr_\mu).$$

Da ferner $([G/C:H/C], |H/C|)=1$ und $H/C$ Sylowturmgruppe, gibt es nach [5] einen Normalteiler $N/C$ von $G/C$ mit

$$G/C = H/C \cdot N/C \quad \text{und} \quad H/C \cap N/C = \langle e\rangle,$$

also $G=HN$ und $H \cap N = C$. Es ist $N \supseteqq u_\pi(G)$ und $G=Hu_\pi(G)$ mit $H\cap u_\pi(G) \subseteqq C$.

($c_3$): Da $H \lhd K_1$, ist $H$ das Erzeugnis aller Elemente von $K_1$, deren Ordnung nur durch Primzahlen aus $\pi$ teilbar ist. Daher ist $H$ charakteristische Untergruppe von $K_1$ und also Normalteiler von $K_2$. Wie eben erhält man, daß $H$ dann sogar charakteristische Untergruppe von $K_2$ und also Normalteiler von $K_3$ ist usw. Schließlich: $H \lhd K_s = G$, d.h. Bedingung ($c_2$) ist erfüllt.

## Literatur

[1] W. Burnside, *Theory of groups of finite order*, 2. ed. (1911).
[2] R. Kochendörffer, Ein Satz über Sylowgruppen, *Math. Nachr.*, **17** (1959), 189—194.
[3] ———— On supplements in finite groups, *J. Austr. Math. Soc.*, **3** (1963), 63—67.
[4] F. Migliorini, Rappresentanti di laterali e supplementi in un gruppo finito, *Matematiche, Catania* **21** (1966), 11—17.
[5] L. Prohaska, Über die Existenz normaler Komplemente zu gewissen Hallgruppen, *Acta Sci. Math.*, **26** (1965), 159—162.
[6] G. Zappa, Generalizzazione di un teorema di Kochendörffer, *Matematiche, Catania,* **13** (1958), 61—64.
[7] H. Zassenhaus, *The theory of groups*. 2. ed. (1949).

*(Eingegangen am 22. Juni 1968)*