l_p-faktorisierbare Operatoren in Banachräumen

Von ALBRECHT PIETSCH in Jena (DDR)

Ein beschränkter linearer Operator T, der einen Banachraum E in einem Banachraum F abbildet, heißt *l_p-faktorisierbar* $(1 \leqq p \leqq \infty)$, wenn er sich in ein Produkt

$$T\colon\ E \xrightarrow{A} l_p \xrightarrow{Y} F$$

von zwei beschränkten linearen Operatoren $A \in \mathbf{L}(E, l_p)$ und $Y \in \mathbf{L}(l_p, F)$ aufspalten läßt. Setzt man

$$\varphi_p(T) = \inf \|A\| \, \|Y\|,$$

wobei das Infimum über alle möglichen Faktorisierungen von T gebildet wird, so ist die Klasse $\mathbf{F}_p$ aller l_p-faktorisierbaren Operatoren zwischen beliebigen Banachräumen ein vollständiges Operatorenideal mit der Norm φ_p.

Bemerkenswert ist die Tatsache, daß das Ideal $\mathbf{F}_p(H, H)$ für jeden Hilbertraum H und $1 < p < \infty$ sowie $p \neq 2$ gerade aus allen kompakten linearen Operatoren besteht, während man in den Grenzfällen $p = 1$ und $p = \infty$ die Hilbert—Schmidt-Operatoren erhält. Für $p = 2$ ergibt sich das Ideal aller beschränkten linearen Operatoren mit separablem Bildraum.

Als Anwendung der gewonnenen Ergebnisse erhalten wir ein interessantes Nuklearitätskriterium für lokalkonvexe Räume.

1. Die vollständigen Normideale $[\mathbf{F}_p, \varphi_p]$

Mit $\mathbf{L}$ bezeichnen wir die Klasse aller beschränkten linearen Operatoren zwischen beliebigen Banachräumen, und $\mathbf{L}(E, F)$ ist die Menge derjenigen Operatoren $T \in \mathbf{L}$, die den Banachraum E in den Banachraum F abbilden.

Eine Klasse $\mathbf{A}$ von beschränkten linearen Operatoren heißt *Ideal* (Vgl. [9]), wenn für die Mengen

$$\mathbf{A}(E, F) = \mathbf{L}(E, F) \cap \mathbf{A}$$

die folgenden Aussagen gelten:

(A) *Aus* $S, T \in \mathbf{A}(E, F)$ *folgt* $S + T \in \mathbf{A}(E, F)$.

(I_1) *Aus* $T \in \mathbf{L}(E, F)$ *und* $S \in \mathbf{A}(F, G)$ *folgt* $ST \in \mathbf{A}(E, G)$.

(I_2) *Aus* $T \in \mathbf{A}(E, F)$ *und* $S \in \mathbf{L}(F, G)$ *folgt* $ST \in \mathbf{A}(E, G)$.

Eine Abbildung α, die jedem Operator $T \in \mathbf{A}$ eine nicht negative Zahl $\alpha(T)$ zuordnet, nennt man *Idealnorm*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(O) *Aus* $\alpha(T)=0$ *folgt* $T=O$.

(NA) *Für* $S, T \in \mathbf{A}(E, F)$ *gilt* $\alpha(S+T) \leqq \alpha(S)+\alpha(T)$.

(NI_1) *Für* $T \in \mathbf{L}(E, F)$ *und* $S \in \mathbf{A}(F, G)$ *gilt* $\alpha(ST) \leqq \alpha(S)\|T\|$.

(NI_2) *Für* $T \in \mathbf{A}(E, F)$ *und* $S \in \mathbf{L}(F, G)$ *gilt* $\alpha(ST) \leqq \|S\|\alpha(T)$.

Ein Operatorenideal $\mathbf{A}$, auf dem eine Idealnorm α gegeben ist, wird als *Normideal* $[\mathbf{A}, \alpha]$ bezeichnet. Ein Normideal $[\mathbf{A}, \alpha]$ heißt *vollständig*, wenn die einzelnen Komponenten $\mathbf{A}(E, F)$ vollständig sind.

Wir formulieren nun das Hauptergebnis dieses Abschnittes.

Satz 1. *Die Klasse* $[\mathbf{F}_p, \varphi_p]$ *ist ein vollständiges Normideal.*

Wir verzichten auf den trivialen Nachweis der Eigenschaften (I_1), (I_2), (NI_1), (NI_2) und (O). Die Gültigkeit von (A) und (NA) ergibt sich zusammen mit der Vollständigkeit aus

Hilfssatz 1. *Für jede Folge von Operatoren* $T_n \in \mathbf{F}_p(E, F)$ *mit*

$$\sum \varphi_p(T_n) < +\infty$$

wird durch den Ansatz

$$T = \sum T_n$$

ein Operator $T \in \mathbf{F}_p(E, F)$ *definiert, und es gilt*

$$\varphi_p(T) \leqq \sum \varphi_p(T_n).$$

Beweis. Zu einer vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ bestimmen wir Faktorisierungen

$$T_n\colon\ E \xrightarrow{A_n} l_p \xrightarrow{Y_n} F$$

mit

$$\|A_n\| \leqq [\varphi_p(T_n)+2^{-n}\varepsilon]^{1/p} \quad \text{und} \quad \|Y_n\| \leqq [\varphi_p(T_n)+2^{-n}\varepsilon]^{1/p'}.$$

Außerdem betrachten wir neben dem Folgenraum l_p den entsprechenden Doppelfolgenraum $\boldsymbol{l}_p$ und setzen (n wird festgehalten)

$$I_n\colon\ \{\xi_i\} \to \{\xi_i \delta_{kn}\} \quad \text{und} \quad P_n\colon\ \{\xi_{ik}\} \to \{\xi_{in}\}.$$

Dann liefern die Operatoren

$$A = \sum I_n A_n \quad \text{und} \quad Y = \sum Y_n P_n$$

die gewünschte Faktorisierung

$$T\colon\ E \xrightarrow{A} l_p \xrightarrow{Y} F.$$

Dabei gelten die Ungleichungen

$$\|A\| \leqq \{\sum \|A_n\|^p\}^{1/p} \quad \text{und} \quad \|Y\| \leqq \{\sum \|Y_n\|^{p'}\}^{1/p'}.$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen, denn die Banachräume l_p und $\boldsymbol{l}_p$ sind isomorph, und es besteht die Abschätzung

$$\varphi_p(T) \leqq \|A\|\,\|Y\| \leqq \sum \varphi_p(T_n) + \varepsilon.$$

2. Ein Darstellungssatz für l_p-faktorisierbare Operatoren

Wenn man die bekannten Darstellungssätze (vgl. [6]) für Operatoren $A \in \mathbf{L}(E, l_p)$ und $Y \in \mathbf{L}(l_p, F)$ ausnutzt, ergibt sich

Satz 2. *Ein Operator $T \in \mathbf{L}(E, F)$ ist genau dann l_p-faktorisierbar* $(1 < p < \infty)$, *wenn er sich in der Form*

$$Tx = \sum \langle x, a_n \rangle y_n$$

darstellen läßt, so daß die Ungleichungen

$$\sum |\langle x, a_n \rangle|^p < +\infty \quad \textit{und} \quad \sum |\langle y_n, b \rangle|^{p'} < +\infty$$

für alle $x \in E$ bzw. alle $b \in F'$ bestehen. Setzt man

$$\varepsilon_p[a_n] = \sup_{\|x\| \leqq 1} \{\sum |\langle x, a_n \rangle|^p\}^{1/p} \quad \textit{und} \quad \varepsilon_{p'}[y_n] = \sup_{\|b\| \leqq 1} \{\sum |\langle y_n, b \rangle|^{p'}\}^{1/p'},$$

so gilt die Identität

$$\varphi_p(T) = \inf \{\varepsilon_p[a_n]\, \varepsilon_{p'}[y_n]\},$$

falls das Infimum über alle möglichen Darstellungen von T gebildet wird.

3. l_p-faktorisierbare Operatoren in Hilberträumen

Im folgenden characterisieren wir die l_p-faktorisierbaren Operatoren in einem beliebigen Hilbertraum H. Dazu benötigen wir

Hilfssatz 2. *Für die identische Abbildung*

$$I_n\colon\ l_2^n \to l_2^n$$

und $1 < p < \infty$ gilt mit einer von $n = 1, 2, \ldots$ unabhängigen Konstanten c_p die Ungleichung

$$\varphi_p(I_n) \leqq c_p.$$

Beweis. Durchläuft $e=\{\varepsilon_i\}$ die 2^n-elementige Menge aller n-tupel mit $\varepsilon_i=\pm 1$, so besteht für alle $x=\{\xi_i\}$ mit einer Konstanten a_p die Littlewood-Chintchinsche Ungleichung (vgl. [3], [5])

$$\{\sum_e |\sum_i \varepsilon_i \xi_i|^p\}^{1/p} \leqq 2^{n/p} a_p \{\sum |\xi_i|^2\}^{1/2}.$$

Deshalb erhält man durch den Ansatz

$$A_n\colon \{\xi_i\} \to \{\eta_e = \sum_i \varepsilon_i \xi_i\}$$

einen Operator mit

$$\|A_n\colon l_2^n \to l_p^{2^n}\| \leqq 2^{n/p} a_p,$$

und für den (dualen) Operator

$$A_n'\colon \{\eta_e\} \to \{\zeta_k = \sum_e \varepsilon_k \eta_e\}$$

gilt

$$\|A_n'\colon l_{p'}^{2^n} \to l_2^n\| \leqq 2^{n/p'} a_{p'}.$$

Aus der Identität $I_n = 2^{-n} A_n' A_n$ ergibt sich abschließend die behauptete Ungleichung

$$\varphi_p(I_n) \leqq a_p a_{p'} = c_p.$$

Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir

Satz 3. *Für $1<p<\infty$ und $p \neq 2$ besteht das Ideal $\mathbf{F}_p(H, H)$ aus allen kompakten linearen Operatoren.*

Beweis.

(1) Wir betrachten zuerst einen ausgearteten Operator T. Weil der Bildraum $B(T)$ zu dem Hilbertraum l_2^n mit $n=\dim B(T)$ isomorph ist, hat man

$$\varphi_p(T) \leqq \varphi_p(I_n)\|T\| \leqq c_p\|T\|. \tag{Δ}$$

Da jeder kompakte lineare Operator T durch ausgeartete Operatoren approximiert werden kann, überträgt sich die Ungleichung (Δ), und T gehört zu $\mathbf{F}_p(H, H)$.

(2) Weil man jeden l_p-faktorisierbaren Operator T in der folgenden Weise zerlegen kann,

$$T\colon H \to l_2 \to l_p \to l_2 \to H,$$

ergibt sich die behauptete Kompaktheit aus der Tatsache, daß für $r>s$ alle Operatoren aus $\mathbf{L}(l_r, l_s)$ kompakt sind (vgl. [10]).

Den Beweis der folgenden Behauptung findet man indirekt bei A. Grothendieck [2] oder J. Lindenstrauss—A. Pełczyński [4].

Satz 4. *Die Ideale* $\mathbf{F}_1(H, H)$ *und* $\mathbf{F}_\infty(H, H)$ *bestehen aus allen Hilbert—Schmidt-Operatoren.*

Ohne Beweis formulieren wir abschließend den trivialen

Satz 5. *Das Ideal* $\mathbf{F}_2(H, H)$ *besteht aus allen beschränkten linearen Operatoren mit separablem Bildraum.*

4. $\mathfrak{M}$-faktorisierbare Operatoren

Der Begriff des l_p-faktorisierbaren Operators kann folgendermaßen verallgemeinert werden. Wir betrachten eine beliebige Klasse $\mathfrak{M}$ von Banachräumen und bezeichnen einen Operator $T \in \mathbf{L}(E, F)$ als $\mathfrak{M}$*-faktorisierbar*, wenn es Banachräume $M_n \in \mathfrak{M}$, Operatoren $A_n \in \mathbf{L}(E, M_n)$ und $Y_n \in \mathbf{L}(M_n, F)$ mit

$$\sum \|A_n\| \, \|Y_n\| < +\infty$$

gibt, so daß

$$T = \sum Y_n A_n$$

gilt. Setzt man

$$\varphi_{\mathfrak{M}}(T) = \inf \sum \|A_n\| \, \|Y_n\|,$$

wobei das Infimum über alle möglichen Darstellungen gebildet wird, so ist die Klasse $[\mathbf{F}_{\mathfrak{M}}, \varphi_{\mathfrak{M}}]$ aller M-faktorisierbaren Operatoren das kleinste vollständige Normideal $[\mathbf{A}, \alpha]$, das alle identischen Abbildungen

$$I_M: M \to M, \quad M \in \mathfrak{M},$$

enthält.

(1) Die von uns betrachteten l_p-faktorisierbaren Operatoren erhält man, wenn $\mathfrak{M}$ nur aus dem Banachraum l_p besteht.

(2) Enthält $\mathfrak{M}$ lediglich den eindimensionalen Banachraum, so ergeben sich die nuklearen Operatoren.

(3) Die Klasse aller Hilberträume liefert das interessante Normideal der sogenannten Hilbert-Operatoren, die bereits von A. Grothendieck [2] und J. Lindenstrauss—A. Pełczyński [4] untersucht wurden.

5. Projektive Spektren von Banachräumen

Eine Folge von Banachräumen E_n, zwischen denen beschränkte lineare Operatoren

$$T_n: E_{n+1} \to E_n$$

definiert sind, heißt *projektives Spektrum* (vgl. [1]). Für jedes projektive Spektrum wird die Menge E aller Folgen

$$x = \{x_n\} \quad \text{mit} \quad T_n x_{n+1} = x_n$$

zu einem (F)-Raum, wenn man die Halbnormen

$$p_n(x) = \|x_n\|$$

einführt. Umgekehrt läßt sich jeder (F)-Raum auf diese Weise aus einem projektiven Spektrum von Banachräumen erzeugen.

Aus der Theorie der nuklearen lokalkonvexen Räume (vgl. [7]) ist bekannt, daß man jeden nuklearen (F)-Raum sogar aus einem projektiven Spektrum von Hilberträumen gewinnen kann, in dem die Operatoren T_n nuklear sind. Als unmittelbare Folgerung aus dieser Feststellung ergibt sich

Satz 6. (Vgl. [11], S. 101) *Jeder nukleare (F)-Raum kann mit beliebigen Zahlen $p \neq q$ aus einem projektiven Spektrum*

$$(*) \qquad \to l_p \xrightarrow{T_{n+1}} l_q \xrightarrow{T_n} l_p \to$$

erzeugt werden.

Es erhebt sich nun die umgekehrte Frage, ob jedes projektive Spektrum $(*)$ einen nuklearen (F)-Raum liefert.

Satz 7. *Für $p=1$ und $2 \leqq q \leqq \infty$ bzw. $1 \leqq p \leqq 2$ und $q=\infty$ wird durch jedes projektive Spektrum $(*)$ ein nuklearer (F)-Raum erzeugt.*

Beweis. Unsere Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß jeder Operator aus $\mathbf{L}(l_\infty, l_q)$ mit $1 \leqq q \leqq 2$ absolut-2-summierend ist (vgl. [4], [8]).

Satz 8. *Für $1 < p, q < \infty$ wird durch ein projektives Spektrum $(*)$ nicht immer ein nuklearer (F)-Raum erzeugt.*

Beweis. Wir betrachten eine Nullfolge von reellen Zahlen λ_i mit

$$\sum |\lambda_i|^r = +\infty \quad \text{für} \quad r \geqq 1$$

und definieren den Operator T durch die Zuordnung

$$T\colon \{\xi_i\} \to \{\lambda_i \xi_i\}.$$

Dann gilt

$$T \in \mathbf{F}_p(l_2, l_2) \quad \text{für} \quad 1 < p < \infty,$$

und es gibt Faktorisierungen

$$T\colon\ l_2 \xrightarrow{A_p} l_p \xrightarrow{Y_p} l_2 \quad \text{und} \quad T\colon\ l_2 \xrightarrow{A_q} l_q \xrightarrow{Y_q} l_2.$$

Folglich liefert das projektive Spektrum

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \ell_2 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "A_p"] & & \ell_2 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "A_q"] & & \ell_2 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "A_p"] & & \ell_2 \arrow[r] & {} \\
& {} \arrow[r] & \ell_p \arrow[ur, "Y_p"'] \arrow[rr] & & \ell_q \arrow[ur, "Y_q"'] \arrow[rr] & & \ell_p \arrow[ur, "Y_p"'] \arrow[r] & {} &
\end{tikzcd}$$

keinen nuklearen (F)-Raum.

Problem. *Erzeugt jedes projektive Spektrum* $(*)$ *mit* $p=1$ *und* $1<q<2$ *bzw.* $2<p<\infty$ *und* $q=\infty$ *stets einem nuklearen* (F)*-Raum?*

Literatur

[1] K. FLORET und J. WLOKA, *Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume*, Lecture Notes in Mathematics, 56 (Berlin—Heidelberg—New York, 1968).

[2] A. GROTHENDIECK, Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, *Boletim Soc. Mat. Sao Paulo*, **8** (1956), 1—79.

[3] S. KACZMARZ und H. STEINHAUS, *Theorie der Orthogonalreihen* (Warschau, 1935).

[4] J. LINDENSTRAUSS and A. PEŁCZYŃSKI, Absolutely summing operators in L_p-spaces and their applications, *Studia Math.*, **29** (1968), 275—326.

[5] J. E. LITTLEWOOD, On bounded bilinear forms in infinite number of variables, *Quart. J. Math.*, **1** (1930), 164—174.

[6] R. S. PHILLIPS, On linear transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **48** (1940), 516—541.

[7] A. PIETSCH, *Nukleare lokalkonvexe Räume* (Berlin, 1965).

[8] A. PIETSCH, Absolut-p-summierende Abbildungen in normierten Räumen, *Studia Math.*, **28** (1967), 333—353.

[9] A. PIETSCH, Ideale von Operatoren in Banachräumen, *Mitteilungen der MGdDDR* 1968, 1—13.

[10] H. R. PITT, A note on bilinear forms, *J. London Math. Soc.*, **11** (1936), 174—180.

[11] H. H. SCHAEFER, *Topological vector spaces* (New York—London, 1966).

(Eingegangen am 18. März, 1969)