Über die kovariante Ableitung der Vektoren in verallgemeinerten Linienelementräumen

Von ARTHUR MOÓR in Sopron (Ungarn)

§ 1. Einleitung

In [3] begründeten wir eine Übertragungstheorie der Vektoren und der verallgemeinerten Vektoren in einem $\mathfrak{M}_n$-Raum, d. h. in einem Raum, in dem die Grundelemente (x^i, v^i) dem Transformationsgesetz:

$$
(1.1)\qquad \begin{cases} \hat{x}^i = \hat{x}^i(x^1, x^2, \dots, x^n), \\ \hat{v}^i = \hat{v}^i(\bar{v}^1, \bar{v}^2, \dots, \bar{v}^n), \quad \bar{v}^j = \dfrac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^r} v^r, \\ \operatorname{Det}\left(\dfrac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^j}\right) \neq 0, \quad \operatorname{Det}\left(\dfrac{\partial \hat{v}^i}{\partial \bar{v}^j}\right) \neq 0 \end{cases}
$$

genügen. Die Funktionen $\hat{v}^i(\bar{v})$ sollen in den $\bar{v}^i$ immer homogen von erster Ordnung sein. In [4] bestimmten wir verschiedene mögliche Type der kovarianten Ableitungen der verallgemeinerten Vektoren, d. h. die bezüglich (1. 1) dem Transformationsgesetzt

$$
(1.2a)\qquad \hat{X}^i = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^r} X^r \qquad \text{bzw.} \qquad (1.2b)\qquad \hat{Y}_i = \frac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^i} Y_t
$$

genügen.

Im folgenden wollen wir die möglichen Formen der kovarianten Ableitungen der gewöhnlichen Vektoren im $\mathfrak{M}_n$-Raum bestimmen, d. h. die kovarianten Ableitungen der Vektoren, die bezüglich (1. 1) dem Transformationsgesetz

$$
(1.3a)\qquad \hat{X}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^r} X^r \qquad \text{bzw.} \qquad (1.3b)\qquad \hat{Y}_i = \frac{\partial x^t}{\partial \hat{x}^i} Y_t
$$

genügen. Bezüglich des Begriffs der kovarianten Ableitung verweisen wir auf die fundamentale Arbeit [1] der Theorie der geometrischen Objekte (vgl. insb. Kapitel IV. 1). Wir bemerken, daß die Theorie der allgemeinen zweiten kovarianten Ableitung ${}_{(2)}\nabla_k$ nicht so vollständig ist, wie die der ersten kovarianten Ableitung; die fundamentalen Funktionalgleichungen aber, von denen die zweiten kovarianten Ableitungen bestimmt werden können, werden wir in § 4 angeben.

§ 2. Fundamentalgrößen des $\mathfrak{M}_n$-Raumes

Wir werden die folgenden Bezeichnungen benützen:

$$(2.1)\qquad \hat{p}^i_r \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial \bar{v}^r}, \quad p^j_s \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \bar{v}^j}{\partial \hat{v}^s}, \quad \hat{q}^i_r \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^r} \equiv \frac{\partial \bar{v}^i}{\partial v^r}, \quad q^j_s \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^j}{\partial \hat{x}^s} \equiv \frac{\partial v^j}{\partial \bar{v}^s};$$

diese stimmen mit den in [4] benützten Bezeichnungen überein.

Die Grundgrößen eines $\mathfrak{M}_n$-Raumes, in dem eine Übertragungstheorie der Vektoren definiert ist (vgl. [3] § 3—§6) sind die folgenden:

I. Der Pseudotensor $a^i_j(x, v)$ mit dem Transformationsgesetz[1]):

$$(2.2)\qquad \hat{a}^i_j(\hat{x}, \hat{v}) = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^r}\frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^j} a^r_s(x, v) \equiv \hat{p}^i_t \hat{q}^t_r q^s_j a^r_s(x, v),$$

da nach (2. 1) offenbar

$$(2.2a)\qquad \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^r} \equiv \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial \bar{v}^t}\frac{\partial \bar{v}^t}{\partial v^r} \equiv \hat{p}^i_t \hat{q}^t_r$$

besteht.

Es soll immer

$$(2.2b)\qquad \operatorname{Det}(a^i_j) \neq 0$$

gelten, woraus folgt, daß a^i_j einen eindeutig bestimmten inversen Pseudotensor b^i_r definiert, d. h. die Relationen

$$(2.3)\qquad b^i_r a^r_j = \delta^i_j \quad \text{bzw.} \quad b^r_i a^j_r = \delta^j_i$$

bezüglich b^i_j eindeutig lösbar sind, und es gilt:

$$(2.4)\qquad \hat{b}^i_j(\hat{x}, \hat{v}) = \frac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^j}\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^r} b^r_t(x, v) \equiv q^t_s p^s_j \hat{q}^i_r b^r_t(x, v)$$

da nach (2. 1) offenbar

$$(2.4a)\qquad \frac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^j} \equiv \frac{\partial v^t}{\partial \bar{v}^s}\frac{\partial \bar{v}^s}{\partial \hat{v}^j} \equiv q^t_s p^s_j$$

besteht.

B e m e r k u n g. Die Relationen (2. 2*a*) und (2. 4*a*) werden wir im folgenden öfters ohne einen direkten Hinweis auf diese Gleichungen anwenden. Die beiden Relationen von (2. 3) sind nach einem wohlbekannten Satz der Tensoralgebra gleichwertig.

---

[1]) Bezüglich des Begriffs der verallgemeinerten Tensoren und Pseudotensoren vgl. [3] § 2. Die verallgemeinerten Tensoren könnten bezüglich der Grundelementtransformation (1. 1) auch als gewöhnliche Tensoren betrachtet werden, doch wollen wir die Terminologie von unserer Arbeit [3] behalten.

II. Die in i, k symmetrischen Übertragungsparameter $M_i{}^j{}_k$ mit dem Transformationsgesetz:

$$\hat{M}_i{}^j{}_k = M_b{}^b{}_c p_i^t q_t^a \hat{p}_r^j \hat{q}_b^r p_k^s q_s^c - \hat{p}_{st}^j p_i^s p_k^t, \tag{2. 5}$$

wo

$$\hat{p}_{st}^j \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \hat{v}^j}{\partial \bar{v}^s \partial \bar{v}^t}$$

bedeutet (vgl. z. B. [4], Formel (1. 6)).

III. Die Übertragungsparameter $L_j^{*i}{}_k$ mit dem Transformationsgesetz:

$$\hat{L}_j^{*i}{}_k = L_a^{*b}{}_c p_j^r q_r^a \hat{p}_s^i \hat{q}_b^s q_k^c + \hat{p}_{bc}^i p_j^b \hat{q}_t^c q_k^r L_o^{*t}{}_r + \hat{p}_{bc}^i \hat{q}_r^c p_j^b q_{tk}^r \bar{v}^t + \hat{p}_r^i \hat{q}_t^r q_{sk}^t p_j^s, \tag{2. 6}$$

wo der Index „o" die Überschiebung mit v^j, und

$$q_{sk}^t \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 x^t}{\partial \hat{x}^s \partial \hat{x}^k}$$

bedeuten (vgl. [4], Formel (1. 6)).

Die Größen $M_j{}^i{}_k$ und $L_j^{*i}{}_k$ sind für die Festlegung der kovarianten Ableitung der verallgemeinerten Vektoren nötig (vgl. [4]), während die Pseudotensoren a_j^i bzw. b_j^i bei der Definition der kovarianten Ableitungen der gewöhnlichen Vektoren im $\mathfrak{M}_n$-Raum benützt werden.

§ 3. Die allgemeine erste kovariante Ableitung

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zur Definition der allgemeinen ersten kovarianten Ableitung ${}_{(1)}\nabla_k$ über. Diese allgemeine erste kovariante Ableitung soll so definiert werden, daß sie eine Verallgemeinerung der in [3] durch $\overset{*}{\nabla}_k$ bezeichneten Ableitung sei. Aus § 5 und aus den Gleichungen (4. 12) und (4. 14) von [3] kann leicht berechnet werden, daß für einen gewöhnlichen Vektor:

$$\overset{*}{\nabla}_k X^i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial v^k}(a_r^i X^r) + M_j{}^i{}_k a_r^j X^r, \quad \overset{*}{\nabla}_k Y_i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial v^k}(b_i^t Y_t) - M_i{}^j{}_k b_j^t Y_t.$$

Definition 1. Die allgemeine erste kovariante Ableitung ${}_{(1)}\nabla_k$ eines kontra- bzw. kovarianten Vektors $\vec{Z}$ vom Transformationsgesetz (1. 3) ist ein verallgemeinerter Tensor zweiter Stufe, der von $\vec{Z}$, $\partial_{v^i}\vec{Z}$, a_j^i, $\partial_{v^k} a_j^i$ und vom Hilfsobjekt $M_j{}^i{}_k$ abhängig ist, und dessen kovariante Stufenzahl um eins größer, als die von $\vec{Z}$ ist (vgl. [3] § 2).

Die einzelnen Funktionen der verschiedenen kovarianten Ableitungen sollen jetzt und im folgenden immer in allen ihren Veränderlichen stetig sein. Wir beweisen für die Form der ersten kovarianten Ableitung eines kontravarianten Vektors den folgenden

Satz 1. *Die allgemeine erste kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors X^i im $\mathfrak{M}_n$-Raum ist eine Funktion von $a^a_b X^b$, $a^a_b \partial_{vj} X^b$ und $b^s_j \overset{*}{\nabla}_c a^a_s$, wo*

$$\overset{*}{\nabla}_k a^i_j \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial a^i_j}{\partial v^k} + M_t{}^i{}_k a^t_j. \tag{3. 1}$$

Vor dem Beweis des Satzes 1 wollen wir zeigen, daß die durch (3. 1) bestimmte Größe selbst ein Pseudotensor ist. Auf Grund von (2. 1) ist nämlich

$$\frac{\partial \hat{a}^i_j}{\partial \hat{v}^k} = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^r} \frac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^k} \frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^j} \frac{\partial a^r_s}{\partial v^t} + \frac{\partial^2 \hat{v}^i}{\partial v^r \partial v^t} \frac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^k} \frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^j} a^r_s,$$

woraus in Hinsicht auf (2. 5) und (2. 1), ferner wegen der Relation

$$\frac{\partial^2 \hat{v}^i}{\partial v^r \partial v^t} \frac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^k} = - \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^t} \frac{\partial^2 v^t}{\partial \hat{v}^s \partial \hat{v}^k} \frac{\partial \hat{v}^s}{\partial v^r}$$

— die offenbar besteht, da $\dfrac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^t} \dfrac{\partial v^t}{\partial \hat{v}^k} = \delta^i_k$ ist — leicht folgt:

$$\overset{*}{\nabla}_k \hat{a}^i_j = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^r} \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^k} \frac{\partial x^t}{\partial \hat{x}^j} \overset{*}{\nabla}_s a^r_t, \tag{3. 2}$$

und das beweist unsere Behauptung bezüglich des pseudotensoriellen Charakters von (3. 1).

Es ist bemerkenswert, daß in (3. 1) nur ein $M_j{}^i{}_k$ enthaltendes Glied nötig ist, obwohl a^i_j zwei Indizes hat. Das folgt daraus, daß in der Transformationsformel (2. 2) von a^i_j nur bezüglich des Indexen „i" ein $\dfrac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^r}$-Faktor vorkommt, während $\dfrac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^j}$ bezüglich der Ableitung $\dfrac{\partial}{\partial v^k}$ eine Konstante ist.

Beweis des Satzes 1. Auf Grund der Definition 1 ist:

$${}_{(1)}\nabla_s X^r = F^r_s \left(X^i, \frac{\partial X^i}{\partial v^j}, M_j{}^i{}_k, a^i_j, \frac{\partial a^i_j}{\partial v^k} \right). \tag{3. 3}$$

Da ${}_{(1)}\nabla_s X^r$ nach der Definition 1 ein verallgemeinerter Tensor sein muß, gilt nach einer Transformation (1. 1) die Transformationsformel

$${}_{(1)}\nabla_k \hat{X}^i = \hat{p}^i_a \hat{q}^a_r q^s_b p^b_k \, {}_{(1)}\nabla_s X^r, \tag{3. 4}$$

wo die Größen $\hat{p}^i_a$, $\hat{q}^a_r$, q^s_b und p^b_k durch (2. 1) festgelegt sind. In Hinsicht auf (3. 3),

(2. 2), (2. 5) und (2. 6) bekommt man für die erste kovariante Ableitung F^t_r das folgende Funktionalsgleichungssystem

(3. 5)
$$F^i_k\left(\hat{q}^a_b X^b, \hat{q}^a_b q^s_t p^l_j \frac{\partial X^b}{\partial v^s}, p^t_a q^e_t \hat{p}^b_r \hat{q}^r_l p^s_c q^j_s M_e{}^l{}_j - \right.$$
$$\left. - \hat{p}^b_{rs} p^r_a p^s_c, \hat{p}^a_t \hat{q}^t_r q^s_b a^r_s, \hat{p}^a_t \hat{q}^t_r q^s_b q^m_l p^l_c \frac{\partial a^r_s}{\partial v^m} + \hat{p}^a_{tm} p^m_c \hat{q}^t_r q^s_b a^r_s\right) =$$
$$= \hat{p}^i_m \hat{q}^m_r q^s_t p^t_k F^r_s\left(X^a, \frac{\partial X^a}{\partial v^b}, M_a{}^b{}_c, a^a_b, \frac{\partial a^a_b}{\partial v^c}\right).$$

Da die Relationen (3. 5) für die $\hat{p}^a_s$, $\hat{q}^a_b$, $\hat{p}^b_{rs}$ eine Identität bilden, bekommt man für
$$\hat{p}^i_j = \hat{q}^i_j = p^i_j = q^i_j = \delta^i_j, \quad \hat{p}^b_{ac} = M_a{}^b{}_c \ ^{2)}$$
die Relation:
$$F^i_k\left(X, \frac{\partial X}{\partial v}, 0, a, \overset{*}{\nabla} a\right) = F^i_k\left(X, \frac{\partial X}{\partial v}, M, a, \frac{\partial a}{\partial v}\right),$$
wo wir wegen leichterer Übersicht die Indizes bei den Argumenten von F^i_k wegließen. Unsere letzte Formel zeigt nun, daß die erste kovariante Ableitung von X^i von $M_a{}^b{}_c$ nicht explizit abhängig ist, d. h. daß sie die Form:

(3. 6)
$$_{(1)}\nabla_k X^i = \Phi^i_k\left(X^a, \frac{\partial X^a}{\partial v^b}, a^a_b, \overset{*}{\nabla}_c a^a_b\right)$$
hat.

Die Transformationsformel (3. 4) gibt somit nach (3. 3) für Φ^i_k das Funktionalgleichungssystem:

(3. 7)
$$\Phi^i_k\left(\hat{q}^a_b X^b, \hat{q}^a_b q^m_l p^l_j \frac{\partial X^b}{\partial v^m}, \hat{p}^a_t \hat{q}^t_r q^s_b a^r_s, \hat{p}^a_t \hat{q}^t_r q^s_b q^m_l p^l_c \overset{*}{\nabla}_m a^r_s\right) =$$
$$= \hat{p}^i_t \hat{q}^t_r q^s_h p^h_k \Phi^r_s\left(X^a, \frac{\partial X^a}{\partial v^j}, a^a_b, \overset{*}{\nabla}_c a^a_b\right).$$

Wählen wir jetzt $\hat{q}^a_b = a^a_b$, $\hat{p}^a_b = b^a_b$, so werden wegen $\hat{p}^i_r p^r_j = \delta^i_j$, $\hat{q}^i_r q^r_j = \delta_j$ die Relationen $p^r_j = a^r_j$, $q^r_j = b^r_j$ bestehen und aus (3. 7) bekommt man für die Funktionen Φ^i_k die Funktionalgleichung:
$$\Phi^i_k\left(a^a_b X^b, a^a_b \frac{\partial X^b}{\partial v^j}, \delta^a_b, b^s_c \overset{*}{\nabla}_c a^a_s\right) = \Phi^i_k\left(X^a, \frac{\partial X^b}{\partial v^j}, a^a_b, \overset{*}{\nabla}_c a^a_b\right),$$
und diese Formel beweist wegen (3. 6) eben den Satz 1.

---

[2]) Diese Substitution ist wegen der Symmetrie von $M_a{}^b{}_c$ in a, c möglich. Offenbar folgt auch aus $\hat{p}^i_j = \hat{q}^i_j = \delta^i_j$ die Relation $p^i_j = q^i_j = \delta^i_j$.

Die allgemeine erste kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors hat also die Form:

$$ {}_{(1)}\nabla_k X^i = \varphi^i_k \left(a^a_b X^b,\, a^a_b \frac{\partial X^b}{\partial v^j},\, b^s_b \overset{*}{\nabla}_c a^a_s \right). \tag{3. 8} $$

Wir wollen nun zeigen, daß die durch $\overset{*}{\nabla}_k$ bezeichnete kovariante Ableitung der gewöhnlichen Vektoren mit dem Transformationsgesetz (1. 3*a*), in unserem Aufsatz [3] auch die Form von (3. 8) hat. Die kovariante Ableitung und invariantes Differential eines gewöhnlichen Vektors bildet man nach § 5 der Arbeit [3] in der Weise, daß man dem gewöhnlichen Vektor X^i durch $a^i_r X^r$ einen verallgemeinerten Vektor von dem Transformationsgesetz (1. 2*a*) zuordnet und dann die kovariante Ableitung bzw. das invariante Differential dieses verallgemeinerten Vektors bildet. Es ist somit in Hinsicht auf (3. 1):

$$ \overset{*}{\nabla}_k X^i = \frac{\partial}{\partial v^k}(a^i_r X^r) + M_j{}^i{}_k a^j_r X^r \equiv (b^r_s \overset{*}{\nabla}_k a^i_r) a^s_m X^m + a^i_r \frac{\partial X^r}{\partial v^k}, $$

und das zeigt, daß $\overset{*}{\nabla}_k X^i$ tatsächlich die Form (3. 8) hat, wie behauptet wurde.

Bezüglich der allgemeinen ersten kovarianten Ableitung eines kovarianten Vektors Y_i gilt der

Satz 2. *Die allgemeine erste kovariante Ableitung eines kovarianten Vektors Y_i im $\mathfrak{M}_n$-Raum ist eine Funktion von $b^t_a Y_t$, $b^t_a \dfrac{\partial Y_t}{\partial v_j}$, $a^j_m \overset{*}{\nabla}_d b^m_a$, wo*

$$ \overset{*}{\nabla}_d b^m_a \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial b^m_a}{\partial v^d} - M_a{}^s{}_d b^m_s. \tag{3. 9} $$

Ebenso wie bei der Formel (3. 1) kann leicht gezeigt werden, daß die durch (3. 9) bestimmte Größe ein Pseudotensor ist. Nach (2. 4) und (2. 5) kann leicht verifiziert werden, daß die folgende Transformationsformel besteht:

$$ \overset{*}{\nabla}_d \hat{b}^c_a = \frac{\partial v^r}{\partial \hat{v}^a} \frac{\partial \hat{x}^c}{\partial x^t} \frac{\partial v^m}{\partial \hat{v}^d} \overset{*}{\nabla}_m b^t_r. \tag{3. 10} $$

Beweis des Satzes 2. Auf Grund der Definition 1 ist

$$ {}_{(1)}\nabla_k Y_i = F_{ik} \left(Y_a,\, \frac{\partial Y_a}{\partial v^b},\, M_a{}^b{}_c,\, b^a_b,\, \frac{\partial b^a_b}{\partial v^c} \right), \tag{3. 11} $$

wo wir statt der a^a_b die inversen Größen b^a_b gesetzt haben. Bilden wir nun — wie im kontravarianten Fall — das Transformationsgesetz von ${}_{(1)}\nabla_k Y_i$, das nach der

Definition ein verallgemeinerter rein kovarianter Tensor ist, so erhält man für F_{ik} in Hinsicht auf (2. 2), (2. 4), (2. 5) und (2. 6) das Funktionalgleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
\text{(3. 12)} \qquad & F_{ik}\Big(q_a^r Y_r,\, q_a^r q_l^s p_b^l \frac{\partial Y_r}{\partial v^s},\, p_a^t q_t^m \hat{p}_r^b \hat{q}_l^r p_c^s q_s^j M_m{}^l{}_j - \\
& - \hat{p}_{rs}^b p_a^r p_c^s,\, q_s^r p_a^s \hat{q}_t^c b_r^t,\, q_s^r p_a^s \hat{q}_t^c q_h^m p_d^h \frac{\partial b_r^t}{\partial v^m} + p_{ad}^s q_s^r \hat{q}_t^c b_r^t\Big) = \\
& = q_m^r p_k^m q_t^s p_i^t F_{rs}\left(Y_a,\, \frac{\partial Y_a}{\partial v^b},\, M_a{}^b{}_c,\, b_a^c,\, \frac{\partial b_a^c}{\partial v^d}\right),
\end{aligned}
$$

wo

$$p_{ad}^s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \bar{v}^s}{\partial \hat{v}^a\, \partial \hat{v}^d}$$

bedeutet.

Da nach (2. 1) $\hat{p}_r^b p_a^r = \delta_a^b$ besteht, bekommt man durch partielle Ableitung nach $\hat{v}^d$

$$\text{(3. 13)} \qquad \hat{p}_{rt}^b p_a^r p_d^t = -\hat{p}_r^b p_{ad}^r .$$

Setzen wir jetzt in (3. 12)

$$p_b^a = \hat{p}_b^a = q_b^a = \hat{q}_b^a = \delta_b^a, \quad p_{ac}^b = -M_a{}^b{}_c,$$

so zeigt sich nach (3. 13), daß F_{ik} von den $M_a{}^b{}_c$ nicht explizit, sondern nur durch $\overset{*}{\nabla}_d b_a^m$ abhängt. Die allgemeine kovariante Ableitung von Y_i wird somit die Form

$$\text{(3. 14)} \qquad {}_{(1)}\nabla_k Y_i = \Phi_{ik}\left(Y_a,\, \frac{\partial Y_a}{\partial v^b},\, b_c^a,\, \overset{*}{\nabla}_d b_c^a\right) \equiv F_{ik}\left(Y_a,\, \frac{\partial Y_a}{\partial v^b},\, 0,\, b_a^c,\, \frac{\partial b_a^c}{\partial v^b}\right)$$

haben. Statt (3. 12) erhält man für die Funktionen Φ_{ik} das Funktionalgleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
\text{(3. 15)} \qquad & \Phi_{ik}\left(q_a^r Y_r,\, q_a^r q_e^s p_b^e \frac{\partial Y_r}{\partial v^s},\, q_s^r p_a^s \hat{q}_t^c b_r^t,\, q_e^r p_a^e \hat{q}_t^c q_s^m p_d^s \overset{*}{\nabla}_m b_r^t\right) = \\
& = q_m^r p_k^m q_t^s p_i^t \Phi_{rs}\left(Y_a,\, \frac{\partial Y_a}{\partial v^b},\, b_a^c,\, \overset{*}{\nabla}_d b_a^c\right).
\end{aligned}
$$

Wählen wir jetzt $\hat{q}_b^a = a_b^a$, $\hat{p}_b^a = b_b^a$, so gilt für die inversen Größen $q_b^a = b_b^a$, $p_b^a = a_b^a$, da nach (2. 3) a_b^a und b_b^a zu einander inverse Größen sind. Aus (3. 15) wird dann

$$\Phi_{ik}\left(Y_a,\, \frac{\partial Y_a}{\partial v^b},\, b_a^c,\, \overset{*}{\nabla}_d b_a^c\right) = \Phi_{ik}\left(b_a^r Y_r,\, b_a^r \frac{\partial Y_r}{\partial v^b},\, \delta_a^c,\, a_t^c \overset{*}{\nabla}_d b_a^t\right),$$

und das drückt nach (3. 14) eben die Behauptung des Satzes 2 aus.

Zum Schluß dieses Paragraphen zeigen wir noch, daß die in unserem Aufsatz [3] durch $\overset{*}{\nabla}_k$ bezeichnete kovariante Ableitung des kovarianten Vektors Y_i von den im Satz 2 angegebenen Größen abhängig ist. Es ist nämlich in Hinsicht auf (3. 9)

$$\overset{*}{\nabla}_k Y_i = \frac{\partial}{\partial v^k}(b_i^t Y_t) - M_i{}^r{}_k b_r^t Y_t \equiv (a_t^r \overset{*}{\nabla}_k b_i^t) b_r^s Y_s + b_i^t \frac{\partial Y_t}{\partial v^k}$$

und das beweist unsere Behauptung.

Wir wollen noch bemerken, daß die in den Sätzen 1 und 2 angegebenen Größen verallgemeinerte Vektoren bzw. Tensoren sind, wie das aus den entsprechenden Transformationsformeln leicht verfiziert werden kann.

§ 4. Die allgemeine zweite kovariante Ableitung

Die allgemeine zweite kovariante Ableitung ${}_{(2)}\nabla_k$ der gewöhnlichen Vektoren mit dem Transformationsgesetz (1. 3), soll die in unserer Arbeit [3] durch ∇_k bezeichnete kovariante Ableitung verallgemeinern. Aus § 5 und ferner aus den Gleichungen (4. 11) und (4. 13) von [3] folgt, daß

$$\tilde{\nabla}_k X^i = \frac{\partial}{\partial x^k}(a_t^i X^t) - \left\{\frac{\partial}{\partial v^s}(a_t^i X^t)\right\} L_o^{*s}{}_k + L_s^{*i}{}_k a_t^s X^t,$$

$$\tilde{\nabla}_k Y_i = \frac{\partial}{\partial x^k}(b_i^t Y_t) - \left\{\frac{\partial}{\partial v^s}(b_i^t Y_t)\right\} L_o^{*s}{}_k - L_i^{*s}{}_k b_s^t Y_t$$

ist. $\tilde{\nabla}_k$ bezeichnet die kovariante Ableitung für gewöhnliche Vektoren.

Definition 2. Die allgemeine zweite kovariante Ableitung ${}_{(2)}\nabla_k$ eines kontra- bzw. kovarianten Vektors $\vec{Z}$ vom Transformationsgesetz (1. 3) ist ein Pseudotensor zweiter Stufe, der von $\vec{Z}$, $\partial_{x^i}\vec{Z}$, $\partial_{v^i}\vec{Z}$, a_j^i, $\partial_{x^k} a_j^i$, $\partial_{v^k} a_j^i$ und vom Hilfsobjekt $L_j^{*j}{}_k$ abhängig ist. Die Transformationsformeln seien die folgenden:

(4. 1) $${}_{(2)}\nabla_k \hat{X}^i = \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s}\frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^k}\,{}_{(2)}\nabla_r X^s,$$

(4. 2) $${}_{(2)}\nabla_k \hat{Y}_i = \frac{\partial v^s}{\partial \hat{v}^i}\frac{\partial x^r}{\partial \hat{x}^k}\,{}_{(2)}\nabla_r Y_s.$$

Wir beginnen mit der Untersuchung des kontravarianten Falles. Nach Definition 2 ist

(4. 3) $${}_{(2)}\nabla_k X^i = f_k^i\left(X^a, \frac{\partial X^a}{\partial x^b}, \frac{\partial X^a}{\partial v^b}, a_b^a, \frac{\partial a_b^a}{\partial x^c}, \frac{\partial a_b^a}{\partial v^c}, L_a^{*b}{}_c\right),$$

wo die Form der Funktionen f_k^i bestimmt werden soll. Für f_k^i werden wir das charakteristische Funktionalgleichungssystem bestimmen, die explizite Lösung ist aber noch ein ungelöstes Problem.

Für die Bestimmung dieses Funktionalgleichungssystem müssen wir die transformierten Komponenten der Größen $\frac{\partial X^a}{\partial x^b}, \frac{\partial X^a}{\partial v^b}, \frac{\partial a_b^a}{\partial x^c}, \frac{\partial a_b^a}{\partial v^c}$ berechnen. Beachten wir nun, daß für eine von (x^i, v^i) abhängige Größe die Operatoren $\frac{\partial}{\partial \hat{x}^i}, \frac{\partial}{\partial \hat{v}^i}$ die Form

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}^k} = q_k^s \frac{\partial}{\partial x^s} + q_{rk}^s \bar{v}^r(\hat{v}) \frac{\partial}{\partial v^s}, \quad \frac{\partial}{\partial \hat{v}^k} = q_s^r p_k^s \frac{\partial}{\partial v^r}$$

haben, ferner die Identitäten

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}^b} \hat{q}_r^a = \frac{\partial^2 \hat{x}^a}{\partial x^r \partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial \hat{x}^b} \equiv \hat{q}_{rs}^a q_b^s \equiv -\hat{q}_s^a q_{tb}^s \hat{q}_r^t,$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{v}^k} \hat{p}_r^a \hat{q}_s^r = \frac{\partial^2 \hat{v}^a}{\partial v^m \partial v^s} \frac{\partial v^m}{\partial \hat{v}^k} \equiv \hat{p}_{mt}^a p_k^t \hat{q}_s^m$$

bestehen, so wird:

$$\frac{\partial \hat{X}^a}{\partial \hat{x}^b} = \hat{q}_r^a q_b^s \frac{\partial X^r}{\partial x^s} + \hat{q}_r^a q_{eb}^s \bar{v}^e(\hat{v}) \frac{\partial X^r}{\partial v^s} + \hat{q}_{rs}^a q_b^s X^r, \tag{4. 4}$$

$$\frac{\partial \hat{X}^a}{\partial \hat{v}^b} = \hat{q}_r^a q_e^s p_b^e \frac{\partial X^r}{\partial v^s}, \tag{4. 5}$$

$$\frac{\partial \hat{a}_b^a}{\partial \hat{x}^c} = \hat{p}_e^a \hat{q}_r^e q_b^s \left(\frac{\partial a_s^r}{\partial x_t} q_c^t + \frac{\partial a_s^r}{\partial v^t} q_{mc}^t \bar{v}^m(\hat{v}) \right) + \hat{p}_e^a (\hat{q}_{rt}^e q_c^t q_b^s + \hat{q}_r^e q_{bc}^s) a_s^r, \tag{4. 6}$$

$$\frac{\partial \hat{a}_b^a}{\partial \hat{v}^c} = \hat{p}_e^a \hat{q}_r^e q_b^s q_h^t p_c^h \frac{\partial a_s^r}{\partial v^t} + a_s^r \hat{p}_{et}^a p_c^t \hat{q}_r^e q_b^s. \tag{4. 7}$$

Aus (4. 1) bekommen wir somit für die Funktionen f_k^i — die die zweite kovariante Ableitung der gewöhnlichen kontravarianten Vektoren bestimmen — das charakteristische Funktionalgleichungssystem:

$$f_k^i \left(\hat{X}^a, \frac{\partial \hat{X}^a}{\partial \hat{x}^b}, \frac{\partial \hat{X}^a}{\partial \hat{v}^b}, \hat{a}_b^a, \frac{\partial \hat{a}_b^a}{\partial \hat{x}^c}, \frac{\partial \hat{a}_b^a}{\partial \hat{v}^c}, \hat{L}^{*b}_{a\ c} \right) = \tag{4. 8}$$

$$= \hat{p}_t^i \hat{q}_s^t q_k^r f_r^s \left(X^a, \frac{\partial X^a}{\partial x^b}, \frac{\partial X^a}{\partial v^b}, a_b^a, \frac{\partial a_b^a}{\partial x^c}, \frac{\partial a_b^a}{\partial v^c}, L^{*b}_{a\ c} \right),$$

wo selbstverständlich $\hat{X}^a = \hat{q}_r^a X^r$, ferner für $\frac{\partial \hat{X}^a}{\partial \hat{x}^b}, \frac{\partial \hat{X}^a}{\partial \hat{v}^b}, \ldots$ die entsprechenden Werte aus (4. 4)—(4. 7), (2. 2) und aus (2. 6) gesetzt werden sollen.

Im kovarianten Fall muß die allgemeine zweite kovariante Ableitung eines kovarianten Vektors Y_i die Form:

$$(4.9)\qquad {}_{(2)}\nabla_k Y_i = f_{ik}\left(Y_a, \frac{\partial Y_a}{\partial x^b}, \frac{\partial Y_a}{\partial v^b}, b^a_b, \frac{\partial b^a_b}{\partial x^c}, \frac{\partial b^a_b}{\partial v^c}, L^{*b}_{a\ c}\right)$$

haben[3]). Wir verfahren auch jetzt ähnlich dem vorigen Falle. Auf Grund von

$$(4.10)\qquad \hat{Y}_a = q^r_a Y_r$$

und (2. 4) wird:

$$(4.11)\qquad \frac{\partial \hat{Y}_a}{\partial \hat{x}^b} = q^t_a q^s_b \frac{\partial Y_t}{\partial x^s} + q^t_a q^s_{eb} \bar{v}^e \frac{\partial Y_t}{\partial v^s} + q^t_{ab} Y_t,$$

$$(4.12)\qquad \frac{\partial \hat{Y}_a}{\partial \hat{x}^b} = q^t_a q^s_e p^e_b \frac{\partial Y_t}{\partial v^s},$$

$$(4.13)\qquad \frac{\partial \hat{b}^a_b}{\partial \hat{x}^c} = q^t_e p^e_b \hat{q}^a_s \left(\frac{\partial b^s_t}{\partial x^r} q^r_c + \frac{\partial b^s_t}{\partial v^r} q^r_{ch} \bar{v}^h\right) + p^e_b (q^t_{ec} \hat{q}^a_s + q^t_e \hat{q}^a_{sm} q^m_c) b^s_t,$$

$$(4.14)\qquad \frac{\partial \hat{b}^a_b}{\partial \hat{v}^c} = q^t_e p^e_b \hat{q}^a_s q^r_f p^f_c \frac{\partial b^s_t}{\partial v^r} + q^t_e p^e_{bc} \hat{q}^a_s b^s_t.$$

Auf Grund von (4. 2) und (4. 9) bekommt man das Funktionalgleichungssystem:

$$(4.15)\qquad f_{ik}\left(\hat{Y}_a, \frac{\partial \hat{Y}_a}{\partial \hat{x}^b}, \frac{\partial \hat{Y}_a}{\partial \hat{v}^c}, \hat{b}^a_b, \frac{\partial \hat{b}^a_b}{\partial \hat{x}^c}, \frac{\partial \hat{b}^a_b}{\partial \hat{v}^c}, \hat{L}^{*b}_{a\ c}\right) =$$

$$= q^s_i p^t_i q^r_k f_{sr}\left(Y_a, \frac{\partial Y_a}{\partial x^b}, \frac{\partial Y_a}{\partial v^b}, b^a_b, \frac{\partial b^a_b}{\partial x^c}, \frac{\partial b^a_b}{\partial v^c}, L^{*b}_{a\ c}\right),$$

wo $\hat{Y}_a, \frac{\partial \hat{Y}_a}{\partial \hat{x}^b}, \dots$ aus den Formeln (4. 10)—(4. 14), (2. 4) und (2. 6) substituiert werden sollen. (4. 8) bzw. (4. 15) muß somit in den $\hat{p}^a_b$, $\hat{q}^a_b$, p^a_b, q^a_b, $\hat{p}^a_{bc}$, $\hat{q}^a_{bc}$, p^a_{bc}, q^a_{bc} eine Identität sein; diese Größen sind aber voneinander nicht unabhängig. Wenn $\hat{p}^a_b$, $\hat{q}^a_b$, $\hat{p}^a_{bc}$ und $\hat{q}^a_{bc}$ angegeben sind, so sind die übrigen schon eindeutig bestimmt, wie wir das in § 3 gezeigt haben.

Die Bestimmung der Lösung der Funktionalgleichungssysteme (4. 8) und (4. 15) ist noch ein ungelöstes Problem. Man kann nicht $L^{*b}_{a\ c}$ eliminieren, wie in den gewöhnlichen Linienelementräumen (vgl. [2]) da in den $\mathfrak{M}_n$-Räumen $L^{*b}_{a\ c}$ in a, c nicht symmetrisch ist. Mit der in [2] verwandten Methode wäre nur der symmetrische

[3]) Die b^a_b sind nach (2. 2b) und (2. 3) eindeutige Funktionen der a^a_b.

Teil $L^{*\,b}_{(a\ c)}$ eliminierbar, der zurückbleibende schiefsymmetrische Teil $L^{*\,b}_{[a\ c]}$ hat aber in den allgemeinen $\mathfrak{M}_n$-Räumen keinen tensoriellen Charakter (vgl. die Transformationsformel (2. 6) von $L^{*b}_{a\ c}$ und der Satz 2 des Aufsatzes [3]).

§ 5. Vergleichung der kovarianten Ableitungen mit denen in Linienelementräumen

Wir untersuchten den Fall der gewöhnlichen Linienelementräumen $\mathfrak{L}_n$ in unserem Aufsatz [2]. Dieser Fall ist unter den Grundtransformationen (1. 1) dadurch gekennzeichnet, daß in (1. 1) $\hat{v}^i \equiv \bar{v}^i$ gesetzt werden soll. Daraus folgt, daß $\frac{\partial}{\partial v^i}$ in den $\mathfrak{L}_n$-Räumen eine tensorielle Operation ist; somit wird das Hilfsobjekt $M_i{}^j{}_k$ überflüssig und es kann ${}_{(1)}\nabla_k X^i = f^i_k \left(\frac{\partial X^a}{\partial v^b}\right)$ gesetzt werden. $\frac{\partial}{\partial v^k}$ ist die einfachste erste fundamentale kovariante Ableitung des $\mathfrak{L}_n$-Raumes.

Bei der ${}_{(2)}\nabla_k$-Ableitung ist im $\mathfrak{L}_n$-Raum $a^i_k = b^i_k = \delta^i_k$, $\nabla_k a^i_j = \nabla_k b^i_j = 0$, und aus der Formel (4. 10) wäre noch auch die explizite Abhängigkeit von X^a eliminierbar (vgl. [2] Satz 3.). Unsere Formel (4. 16) geht im wesentlichen — abgesehen von der Abhängigkeit von v^i — in (3. 21) von [2] über; in den $\mathfrak{M}_n$-Räumen haben wir aber eine explizite Abhängigkeit von den v^i nicht vorausgesetzt, da jetzt v^i wegen $\hat{v}^i \equiv \frac{\partial \hat{v}^i}{\partial v^s} v^s$ kein gewöhnlicher Vektor ist.

Literatur

[1] J. Aczél und S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte* (Warszawa, 1960).

[2] A. Moór, Untersuchungen über die kovariante Ableitung in Linienelementräumen, *Publ. Math. Debrecen*, **7** (1960), 41—53.

[3] A. Moór Übertragungstheorie bezüglich der allgemeinen Linienelementtransformationen, *Publ. Math. Debrecen*, **13** (1966), 263—287.

[4] A. Moór, Objektentheoretische Untersuchungen über die kovarianten Ableitungen in allgemeinen Räumen, *Acta Sci. Math.*, **29** (1968), 177—186.

(Eingegangen am 6, Dezember 1968)