Über dreifaktorisierbare Gruppen. I

Von J. SZÉP in Budapest und G. ZAPPA in Firenze

Es sei G eine Gruppe und H eine echte Untergruppe von G. Es seien $H_1, H_2, \ldots$ sämtliche Konjugierte von H in G. Bekanntlich ist das Produkt $\overline{H} = H_1 H_2 \ldots$ eine Gruppe [1]. Es gilt außerdem der Satz:

Ist G eine nichtnilpotente endliche Gruppe, so hat G eine nilpotente Untergruppe H mit der Eigenschaft $\overline{H} = G$ [1].

Im Fall $\overline{H} = G$ benötigt man aber nicht notwendigerweise alle Konjugierte von H um mit Hilfe des Produkts die ganze Gruppe G darzustellen. ORE zeigte, daß das Produkt von zwei Konjugierten einer $H \subset G$ die Gruppe G nicht darstellt, also ist die minimale Anzahl der Konjugierten von H drei, um die ganze Gruppe zu erhalten.

Es erhebt sich die Aufgabe, die Struktur der „dreifaktorisierbaren" Gruppen $G = H_1 H_2 H_3$ zu untersuchen, wobei H_1, H_2, H_3 konjugierte (echte) Untergruppen von G sind.

Eine Zusammenfassung der Ergebnisse dieser Arbeit wurde in [4] veröffentlicht.

I

Definition. Man nennt die Gruppe G *dreifaktorisierbar*, wenn in G eine echte Untergruppe H existiert, für die

(1) $$G = aHa^{-1}HbHb^{-1} \qquad (a, b \in G)$$

gilt. Die Faktorisation (1) heißt eine *Dreifaktorisation.*

Satz 1. *Eine Gruppe G ist dreifaktorisierbar (mit H) dann und nur dann, wenn es ein Element $a \in G$ gibt mit*

$$G = Ha^{-1}HaH.$$

Beweis. Es ist ausreichend, den Fall „nur dann" zu beweisen. Wir nehmen an, daß (1) gilt. Dann ist

$$G = a^{-1}Gb = a^{-1}aHa^{-1}HbHb^{-1}b = Ha^{-1}HbH.$$

Es existieren also drei Elemente h_1, h_2, h_3 von H mit $1=h_1 a^{-1} h_2 b h_3$. Daraus folgt $b=h_2^{-1} a h_1^{-1} h_3^{-1}$, und so erhalten wir

$$G=Ha^{-1}HbH=Ha^{-1}Hh_2^{-1}ah_1^{-1}h_3^{-1}H=Ha^{-1}HaH.$$

Bemerkung. Ist G eine n-faktorisierbare Gruppe, d.h. gilt

$$G=H_1\ldots H_n,$$

wobei $H_1, \ldots, H_n$ konjugierte Untergruppen sind, so kann man erreichen, daß im Produkt der erste und der letzte Faktor identisch werden. Der Beweis erfolgt ähnlich wie im Fall des Satzes 1.

II

Jetzt werden wir einige Kriterien für die Existenz eines Normalkomplements von H herleiten.

Satz 2. *Es sei G eine endliche Gruppe von der Form $G=Ha^{-1}HaH$, wobei H eine Hall-Untergruppe und a ein Element von G sind. Dann gilt $N_G(H)=H$.*

Beweis. Es sei Π die Menge der verschiedenen Primzahlen in der Ordnung von H und x ein Element von $N_G(H)$. Es gilt

$$x=h_1a^{-1}h_2ah_3 \qquad (h_1, h_2, h_3 \in H).$$

Es ergibt sich $a^{-1}h_2a=h_1^{-1}xh_3^{-1}\in N_G(H)$. Das Element $a^{-1}h_2a$ ist ein Π-Element und mit H vertauschbar. Die Gruppe $\{H, a^{-1}h_2a\}$ ist eine Π-Untergruppe von G. H ist eine Hall-Untergruppe von G, also gilt

$$\{H, a^{-1}h_2a\}=H, \quad \text{d.h.} \quad a^{-1}h_2a\in H.$$

Daraus folgt $x\in H$.

Satz 3. *Es sei G eine endliche Gruppe und H eine Hall-Untergruppe von G, die im Zentrum ihres Normalisators enthalten ist. Dann existiert ein Normalteiler N von G mit $G=HN$, $H\cap N=1$.*

Beweis. Es sei Π die Menge der verschiedenen Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_r$ in der Ordnung von H. Es sei P_i die p_i-Sylowgruppe von H $(i=1, \ldots, r)$ und $x\in N_G(P_i)$. Die Gruppe H ist abelsch und außerdem ist $H\subseteqq C(P_i)$, also gilt

$$x^{-1}Hx\subseteqq C(x^{-1}P_ix)=C(P_i).$$

Daraus folgt, daß H und $x^{-1}Hx$ abelsche (nilpotente) Hall-Untergruppen von $C(P_i)$ sind. Nach einem Satz von Wielandt [3] sind die Untergruppen H und $x^{-1}Hx$ in $C(P_i)$ konjugiert. Dann existiert ein $y\in C(P_i)$ mit $y^{-1}(x^{-1}Hx)\,y=H$, d.h. es gilt $(xy)^{-1}Hxy=H$. Daraus folgt $xy\in N_G(H)$. H ist eine abelsche Gruppe, und es gilt $xy \in C(P_i)$, d.h. $x \in C(P_i)$. Das Element x ist ein beliebiges Element von $N_G(P_i)$. also gilt $N_G(P_i) = C(P_i)$ und $P_i \subseteqq Z(N_G(P_i))$. Nach BURNSIDE enthält G genau ein p_i-Normalkomplement und so ist G eine p_i-nilpotente Gruppe. Der Durchschnitt der p_i-Normalkomplemente ($i-1, 2, \ldots, r$) ist ein Normalkomplement N von H in G, d.h. $G = NH$, $N \cap H = 1$.

Aus Satz 2 und 3 folgt der

Satz 4. *Es sei G eine dreifaktorisierbare endliche Gruppe $G = Ha^{-1}HaH$, wobei H eine abelsche Hall-Untergruppe von $G (a \in G)$ ist. Dann gibt es ein Normalteiler N von G derart, daß $G = HN$, $H \cap N = 1$.*

Im Satz 4 ist die Gruppe H eine abelsche Gruppe. Diese Annahme kann man nicht durch „nilpotent" substituieren. Dazu betrachten wir die Gruppe S_4. S_4 hat eine Untergruppe H von der Ordnung 8 (also ist H nilpotent), außerdem hat S_4 die Dreifaktorisation $S_4 = Ha^{-1}HaH (a \in S_4)$. Doch hat S_4 keinen Normalteiler mit dem Index 3.

Die Substitution der abelschen Untergruppe durch eine nilpotente Gruppe ist auch in dem Fall nicht möglich, wenn die Ordnung von G ungerade ist. Betrachten wir dazu die Gruppe G mit der Ordnung $3^7 \cdot 7$, die folgendermaßen definiert ist:

$$a_i^3 = 1 \ (i = 1, \ldots, 7), \quad b^7 = 1, \quad c^3 = 1, \quad a_1 a_2 \ldots a_7 = 1,$$

$$a_i a_j = a_j a_i \ (i, j = 1, \ldots, 7), \quad b^{-1} a_i b = a_{i+1} \ (i = 1, \ldots, 6),$$

$$b^{-1} a_7 b = a_1, \quad c^{-1} a_1 c = a_2, \quad c^{-1} a_2 c = a_4, \quad c^{-1} a_3 c = a_6, \quad c^{-1} a_4 c = a_1,$$

$$c^{-1} a_5 c = a_3, \quad c^{-1} a_6 c = a_5, \quad c^{-1} a_7 c = a_7, \quad c^{-1} bc = b^2.$$

Die Elemente $a_1, \ldots, a_7, c$ erzeugen eine Untergruppe H von der Ordnung 3^7 (also ist H eine nilpotente Hall-Gruppe), außerdem gilt $G = Hb^{-1}HbH$. Doch G hat keinen Normalteiler von der Ordnung 7.

Trotzdem gibt es eine Verallgemeinerung des Satzes 4 für den Fall, daß H ungerade ist. Im Beweis der Verallgemeinerung brauchen wir einen Satz von THOMPSON [2]. Es bezeichne $J(P)$ die im Satz von THOMPSON auftretende Gruppe wobei P eine Sylow-Gruppe bedeutet. ($J(P)$ ist die mit den abelschen Untergruppen erzeugte Untergruppe von P, für die die Anzahl der Basisgeneratoren maximal ist.)

Satz 5. *Es sei G eine endliche Gruppe und H eine nilpotente Hall-Gruppe von G. Es seien $p_1, \ldots, p_s$ die in der Ordnung von H auftretenden verschiedenen Primzahlen und P_i die p_i-Sylow-Gruppe von H. G habe die folgenden Eigenschaften:*

$$\text{a)} \ N_G(H) = H, \qquad \text{b)} \ J(P_i) = P_i, \qquad \text{c)} \ P_i' \subseteqq Z(P_i)$$

($i = 1, 2, \ldots, s$). *Ist H von ungerader Ordnung, so gibt es einen Normalteiler N von G, derart, daß $G = HN$, $H \cap N = 1$.*

Beweis 1. Ist $T \supset H$ eine Untergruppe von G, so ist $\{H^T\} = T$. Im entgegengesetzten Fall gäbe es ein $x \in T$ mit $x \notin \{H^T\}$. Es gilt aber $x^{-1} \{H^T\} x = \{H^T\}$, und nach WIELANDT gibt es ein $y \in \{H^T\}$ sodaß $y^{-1} x^{-1} H x y = H$, d.h. $xy \in N_G(H) = H \subseteqq \{H^T\}$. Daraus folgt $x \in \{H^T\}$, was ein Widerspruch ist.

2. Ist P_i ein Normalteiler von G, dann ist G p_i-nilpotent. Es gilt $G = P_i S$ $(|P_i|, |S|) = 1$. Es sei $H_i = P_1 \times \cdots \times P_{i-1} \times P_{i+1} \times \cdots \times P_s$. Dann ist $\{H_i^G\} \subseteqq S$. Es gilt aber $\{H_i^G\} = S$, weil im entgegengesetzten Fall $P_i \{H_i^G\} = \{H^G\} \subset G$ gelten würde, was wegen 1 unmöglich ist.

3 $C_G(Z(P_i))$ ist p_i-nilpotent. Der Beweis erfolgt durch Induktion. Wegen 2 kann man annehmen, daß $Z(P_i) \subset P_i$ ist. Gilt $C_G(Z(P_i)) \subset G$, dann gelten unsere Bedingungen für $C_G(Z(P_i))$, also ist $C_G(Z(P_i))$ nach Induktion p_i-nilpotent. Gilt $C_G(Z(P_i)) = G$, so betrachten wir die Gruppe $G/Z(P_i)$. Für $G/Z(P_i)$ gelten unsere Bedingungen ($P_i/Z(P_i)$ ist eine abelsche Gruppe, d.h. $J(P_i)/Z(P_i) = P_i/Z(P_i)$). Nach Induktion ist $G/Z(P_i)$ p_i-nilpotent, also existiert eine Untergruppe V mit $V = Z(P_i) S = Z(P_i) \times S$, die ein Normalteiler von G ist. Wegen $p_i \nmid |S|$ ist S das p_i-Komplement in G.

4. $N_G(J(P_i))$ ist p_i-nilpotent. Wegen $J(P_i) = P_i$ und 2 gilt die Behauptung.

Bezüglich 3 und 4 ergibt sich nach dem Satz von Thompson daß G p_i-nilpotent ist. Dies gilt für $i = 1, \ldots, s$ also erhalten wir den Satz.

Nach Satz 2 und 5 bekommt man den

Satz 6. *Es sei G eine dreifaktorisierbare Gruppe $G = Ha^{-1}HaH$, wobei H eine nilpotente Hall-Gruppe von G mit ungerader Ordnung ist. Es seien $p_1, \ldots, p_s$ die in der Ordnung von H vorkommenden verschiedenen Primzahlen. Es sei P_i die p_i-Sylow-Gruppe von H. Nehmen wir an, daß $J(P_i) = P_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ und $P_i' \subseteqq Z(P)$ gilt. Dann gibt es einen Normalteiler N von G derart, daß $G = HN$, $H \cap N = 1$.*

Bemerkungen. Für den Fall der Gruppe von der Ordnung $3^7 \cdot 7$ gilt in unserem Gegenbeispiel $J(H) = J(P) = \{a_1, \ldots, a_7\}$ d.h. $J(P) \neq P$.

Wir bemerken noch, daß zwischen den dreifaktorisierbaren Gruppen auch einfache Gruppen existieren. Dazu betrachten wir die alternierende Gruppe A_5 (über 5 Ziffern); in dieser bilden die Permutationen, die eine Ziffer unverändert lassen, eine Untergruppe H von der Ordung 12, und es gilt $G = Ha^{-1}HaH$, wobei $a \in G$ ein geeignetes Element ist.

III

Wir beschäftigen uns jetzt mit auflösbaren dreifaktorisierbaren endlichen Gruppen und stellen sämtliche maximale Dreifaktorisationen von solchen Gruppen vor.

Definition. Es sei G eine dreifaktorisierbare Gruppe $G=Ha^{-1}HaH$ $(a\in G)$. Man nennt die Dreifaktorisation von G maximal, wenn es keine Gruppe $H_1\subset G$ gibt, für die $G=H_1b^{-1}H_1bH_1$ $(b\in G)$ mit $H\subset H_1$ gilt.

Der Kern der Untergruppe H von G ist $\bigcap H_i$, wobei H_i sämtliche Konjugierte von H in G durchläuft.

Definition. Man sagt, die Untergruppe $H\subset G$ in G sei antinormal, wenn $\bigcap H_i=1$ gilt, d.h. wenn H keinen echten Normalteiler von G enthält.

Ist M der Kern von H, so sieht man leicht, daß H/M antinormal in G/M ist. Es ergibt sich leicht der

Satz 7. *Es sei $G=Ha^{-1}HaH$ eine endliche dreifaktorisierbare Gruppe und M der Kern von H. Dann gilt*

$$G/M=(H/M)(aM)^{-1}(H/M)(aM)(H/M).$$

Die Gruppe H/M ist antinormal in G/M, also reduziert sich die Untersuchung der maximalen Dreifaktorisationen der G auf den Fall, in dem die Untergruppe H antinormal ist.

Wir beweisen den

Satz 8. *Es sei G eine endliche auflösbare Gruppe. G besitzt eine maximale Dreifaktorisation $G=Ha^{-1}HaH$ ($a\in G$, H ist antinormal in G) dann und nur dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

a) *$G=HN$, wobei N ein minimaler Normalteiler von G ist mit $H\cap N=1$ und $C_G(N)=N$.*

b) *Es gibt ein $b\in N$ derart, daß jedes Element von N mit den Elementen der Menge L, die aus den Konjugierten von b in H besteht, wenigstens in einer Weise in der Form $l_1^{-1}l_2$ $(l_1, l_2\in L)$ darstellbar ist.*

Beweis. Zuerst beweisen wir den Fall „dann". Wir nehmen an, daß $G=Ha^{-1}HaH$ $(H\subset G)$ eine endliche auflösbare Gruppe mit antinormaler H ist; ferner sei $Ha^{-1}HaH$ eine maximale Dreifaktorisation. Es sei N ein minimaler Normalteiler von G. Man kann annehmen, daß $N\neq G$. Es gilt $G=HN$ $(H\cap N=1)$, weil man im Fall $HN\subset G$ die Dreifaktorisation $G=(HN)(a^{-1}HNa)HN$ erhalten würde, was der Maximalität der Dreifaktorisation widerspricht; außerdem widerspricht der Fall $H\cap N>1$ der antinormalen Eigenschaft von H.

Die Untergruppe $C_G(N)$ ist ein Normalteiler von G, also ist $N_G(H\cap C_G(N))\supseteq H$ und $N_G(H\cap C_G(N))\supseteq N$. Daraus folgt $N_G(H\cap C_G(N))=G$. H ist antinormal in G, also ist $H\cap C_G(N)=1$ oder $H\cap C_G(N)=H$. Im letzten Fall wäre H normal in G, was unmöglich ist. So bleibt der Fall $H\cap C_G(N)=1$, d.h. der Index von $C_G(N)$ in G stimmt mit $|H|$ überein. So folgt $C_G(N)=N$ und damit ist a) bewiesen.

Das Element a kann man in der Form $a=hb$ ($h\in H$, $b\in N$) schreiben, also gilt $G=Ha^{-1}HaH=Hb^{-1}HbH$. Es sei n ein beliebiges Element von N. Es gilt $n==h_1b^{-1}h_2bh_3$ ($h_1, h_2, h_3\in H$). N ist ein Normalteiler von G, also folgt aus $n=(h_1b^{-1}h_1^{-1})(h_1h_2bh_2^{-1}h_1^{-1})(h_1h_2h_3)$, daß $h_1h_2h_3\in N$ gilt. Wegen $h_1h_2h_3\in H$ folgt $h_1h_2h_3=1$. Es seien $h_1^{-1}=h_4$, $(h_1h_2)^{-1}=h_5$; so bekommt man

$$n=h_4^{-1}b^{-1}h_4h_5^{-1}bh_5=(h_4^{-1}bh_4)^{-1}h_5^{-1}bh_5,$$

d.h. $n=l_1^{-1}l_2$ mit $l_1=h_4^{-1}b\ h_4\in L$, $l_2=h_5^{-1}b\ h_5\in L$. Damit haben wir b) bewiesen.

Wir beweisen nun den Fall „nur dann" des Satzes. Wir nehmen an, daß a) und b) gelten, a ein Element von L ist, und für beliebiges $n\in N$ gilt: $n=l_1^{-1}l_2$, mit $l_1, l_2\in L$. Also folgt $n=(h_1^{-1}ah_1)^{-1}(h_2^{-1}ah_2)$ für geeignete h_1, h_2 von H. Deshalb gilt $n=h_1^{-1}a^{-1}h_1h_2^{-1}\ ah_2\in Ha^{-1}HaH$, und so ergibt sich

$$N\subseteqq Ha^{-1}HaH,\quad G=HN\subseteqq HHa^{-1}HaH=Ha^{-1}HaH,$$

d.h. G hat eine Dreifaktorisation.

Ist diese Dreifaktorisation nicht maximal, so gibt es eine Untergruppe $X\subset G$, $H\subset X$ mit $G=Xb^{-1}XbX$ ($b\in G$). In diesem Fall ist $D=X\cap N\neq 1$ ein Normalteiler von X und auch von N, d.h. $X\cap N$ ist ein Normalteiler von G. Es ist klar, daß $D\neq 1$, $D\neq N$ und daß N kein minimaler Normalteiler ist, was der früheren Annahme widerspricht, daß N ein minimaler Normalteiler in N ist. Also ist die Dreifaktorisation $G=Ha^{-1}HaH$ maximal. Somit ist der Satz bewiesen.

Literatur

[1] N. Ito—J. Szép, Über die Faktorisation von Gruppen, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 229—231.
[2] J. G. Thompson, Normal p-complements for finite groups, *J. of Algebra*, **1** (1964), 43—46.
[3] H. Wielandt, Zum Satz von Sylow, *Math. Zeitschr.*, **60** (1954), 407—409.
[4] G. Zappa—J. Szép, Sui gruppi trifattorizzabili. I, *Rend. Accad. Naz. Lincei*, Ser. VIII. Vol. XLV, fasc. 3—4 (1968).

(Eingegangen am 14. Dezember, 1968)