Über Gruppoid-Verbände. I

Von O. STEINFELD in Budapest

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor László Rédei zum 70. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung

Ein teilweise geordnetes Gruppoid L nennen wir kurz einen *Gruppoid-Verband*, wenn L bezüglich seiner teilweise Ordnung einen vollständigen Verband bildet, außerdem die Bedingungen

$$a^2 \leqq a, \quad 0 \cdot e = e \cdot 0 = 0 \qquad (a \in L; \ 0 \leqq a \leqq e)$$

erfüllt sind, wobei 0 und e das kleinste bzw. größte Element von L bezeichnen. Aus den in § 3 erwähnten Beispielen sieht man, daß alle Untergruppen einer Gruppe, alle Unterringe eines assoziativen Ringes und alle Unterhalbgruppen mit Nullelement einer Halbgruppe mit Nullelement je einen Gruppoid-Verband bilden.

In § 2 definieren wir die Absorbenten, die Links-, Rechts-, und Quasiabsorbenten eines Elementes a des Gruppoid-Verbands[1]) L. Diese Begriffe sind Verallgemeinerungen der Ideale, der Links-, Rechts- und Quasiideale eines Ringes (einer Halbgruppe).

Voraussetzend gewisse bedingte Assoziativitäts- und Distributivitätsregeln beweisen wir einige Ergebnisse bezüglich der erwähnten Begriffe. In Behauptung 2. 3 charakterisieren wir das *Divisionselement*, welches eine gemeinsame Verallgemeinerung des Schiefkörpers und der Gruppe mit Nullelement ist. Verallgemeinernd einige Ergebnisse über die regulären Ringe und Halbgruppen charakterisieren wir im Satz 4. 1 die *regulären* Elemente mit Hilfe der Links-, Rechts- und Quasiabsorbenten. In § 5 beweisen wir einen Satz über die Menge aller Absorbenten eines Elementes des Gruppoid-Verbands L, der eine Verallgemeinerung eines bekannten Satzes über die Menge aller Ideale eines Ringes (einer Halbgruppe) ist (siehe Satz 5. 2).

Da der Begriff des Absorbenten eine gemeinsame Verallgemeinerung des Ideals

[1]) In [11] und [12] beschäftigten wir uns mit diesen Begriffen für gewisse teilweise geordnete *Halbgruppen*.

eines Ringes (einer Halbgruppe) und des Normalteilers einer Gruppe ist, dadurch kann man eine neuere Analogie zwischen diesen „analogen" Begriffen ausbauen. (Siehe Behauptung 3.1, Satz 3. 2 und Beispiel 5.4.)

Die Begriffe und einige Ergebnisse dieser Arbeit werden wir in dem zweiten Teil für die Zerlegungssätze bezüglich des größten Elementes e von L anwenden.

2. Grundbegriffe

Unter einem *teilweise geordneten Gruppoid* verstehen wir eine nichtleere Menge H, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

$\mathbf{B}_1$: H ist ein Gruppoid bezüglich einer (binären) Multiplikation;

$\mathbf{B}_2$: H ist eine teilweise geordnete Menge;

$\mathbf{B}_3$: Aus $a \leqq b$ folgt $ac \leqq bc$ und $ca \leqq cb$ für jedes $c \in H$.

Es bezeichne $\langle L; \leqq \rangle$ ein teilweise geordnetes Gruppoid mit den folgenden Eigenschaften:

$\mathbf{B}_4$: $a^2 \leqq a$ für jedes $a \in L$;

$\mathbf{B}_5$: L ist ein vollständiger Verband bezüglich der partiellen Ordnung $\leqq$ (die Verbandsoperationen werden durch $\wedge$ und $\vee$ bezeichnet);

$\mathbf{B}_6$: ist 0 das kleinste und e das größte Element des vollständigen Verbands L, so gilt $0 \cdot e = e \cdot 0 = 0$.

Ein teilweise geordnetes Gruppoid L mit den Eigenschaften $\mathbf{B}_4$, $\mathbf{B}_5$ und $\mathbf{B}_6$ wird ein *Gruppoid-Verband* genannt. Mit L bezeichnen wir immer einen Gruppoid-Verband. Ist L eine teilweise geordnete *Halbgruppe*, in der die Bedingungen $\mathbf{B}_4$, $\mathbf{B}_5$ und $\mathbf{B}_6$ erfüllt sind, so heißt L ein *Halbgruppe-Verband*.

Aus $\mathbf{B}_3$ und $\mathbf{B}_6$ folgt unmittelbar

$$(2.1) \qquad 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0 \quad \text{für jedes } a \in L.$$

Bezeichnet a_γ $(\gamma \in \Gamma)$ ein beliebiges Elementensystem des Gruppoid-Verbands L, so gelten infolge $\mathbf{B}_3$

$$(2.2) \qquad b\Big(\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma\Big) \leqq \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} b a_\gamma, \quad \Big(\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma\Big) b \leqq \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma b \quad (b \in L),$$

und

$$(2.3) \qquad b\Big(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma\Big) \geqq \bigvee_{\gamma \in \Gamma} b a_\gamma, \quad \Big(\bigvee_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma\Big) b \geqq \bigvee_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma b \quad (b \in L).$$

Die erwähnten Eigenschaften der Gruppoid-Verbände zeigen, daß dieser Begriff eine Verallgemeinerung der in den Arbeiten [11], [12] definierten H-Halbgruppen ist. Man wird sehen, daß viele Ergebnisse aus [11] und [12] sich für die Gruppoid-Verbände verallgemeinern lassen.

Wir sagen, daß das Element $b\,(\in L)$ ein *Absorbent* eines Elementes $a\,(\in L)$ ist, wenn

$$b \leqq a \tag{2.4}$$

und

$$ab \leqq b, \quad ba \leqq b \tag{2.5}$$

bestehen. b heißt ein *Linksabsorbent (Rechtsabsorbent)* von a, wenn (2. 4) und (2. 5_1) [(2. 4) und (2. 5_2)] gelten.

Ein Element k von L heißt ein *Quasiabsorbent* des Elementes a von L, wenn

$$k \leqq a \quad \text{und} \quad ka \wedge ak \leqq k \tag{2.6}$$

bestehen.

Der Durchschnitt $r \wedge l$ eines Rechtsabsorbenten r und eines Linksabsorbenten l von $a(\in L)$ ist wegen

$$(r \wedge l)a \wedge a(r \wedge l) \leqq ra \wedge al \leqq r \wedge l \tag{2.7}$$

ein Quasiabsorbent von a.

Aus (2. 1) sieht man, daß das Element 0 ein Absorbent jedes Elementes von L ist. Wegen $\mathbf{B}_4$ ist jedes Element ein Absorbent von sich selbst. Den Absorbenten (Links-, Rechts-, Quasiabsorbenten) b des Elementes a von L nennen wir *trivial*, wenn $b=0$ oder $b=a$ gilt.

Behauptung 2. 1. *Sind die Elemente $b_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ von L Absorbenten (Links-, Rechts-, Quasiabsorbenten) des Elementes a von L, so ist der Durchschnitt $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$ ein Absorbent (Links-, Rechts-, Quasiabsorbent) von a.*

Wir zeigen die Behauptung nur für die Quasiabsorbenten, da der Beweis in den anderen Fällen noch leichter ist. Infolge (2. 2) und (2. 6) gilt

$$\Big(\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda\Big)a \wedge a\Big(\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda\Big) \leqq \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} (ab_\lambda \wedge b_\lambda a) \leqq \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda .$$

Behauptung 2. 2. *Ist r ein Rechtsabsorbent, l ein Linksabsorbent des Elementes $a(\in L)$, so besteht $rl \leqq r \wedge l$.*

Beweis. Da $rl \leqq al \leqq l$ und $rl \leqq ra \leqq r$ gelten, ist unsere Behauptung richtig.

Von jetzt an schreiben wir einige „bedingte" Assoziativitäts- und Distributivitätsregeln vor, die zu den verschiedenen Untersuchungen nötig sind.

Voraussetzung ($\mathbf{A}_1$). Ist l bzw. r ein Linksabsorbent bzw. ein Rechtsabsorbent des Elementes a von L, so sei für jedes Element $x(\leqq a)$ lx bzw. xr ein Links- bzw. Rechtsabsorbent von a.

Behauptung 2. 3. *Gilt die Voraussetzung* $(\mathbf{A}_1)$ *für das Element a des Gruppoid-Verbandes L, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(I) *a besitzt nur triviale Quasiabsorbenten, und* $a^2 \neq 0$;

(II) *a besitzt nur triviale Rechts- und Linksabsorbenten, und* $a^2 \neq 0$;

(III) *für jedes Element* $x(\in L, 0 \neq x \leqq a)$ *gilt* $ax = xa = a$;

(IV) *jeder Rechts- und Linksabsorbent von a ist idempotent, und für die von Null verschiedenen Rechtsabsorbenten* r, r_1, r_2 *von a gilt die Implikation* $rr_1 = rr_2 \Rightarrow \Rightarrow r_1 = r_2$, *für die von Null verschiedenen Linksabsorbenten* l, l_1, l_2 *von a gilt die Implikation* $l_1 l = l_2 l \Rightarrow l_1 = l_2$.

Beweis. (I)$\Rightarrow$(II): trivial.

(II)$\Rightarrow$(III): Infolge der Voraussetzung $(\mathbf{A}_1)$ ist ax für jedes Element $x(\neq 0, x \leqq a)$ von L ein Linksabsorbent von a. Wegen (II) gilt entweder $ax = 0$ oder $ax = a$. Der Fall $ax = 0$ ist unmöglich. Das Element $x(\neq 0)$ wäre nämlich in diesem Fall ein Linksabsorbent von a, und infolge (II) bestände $x = a$, was der Bedingung $a^2 \neq 0$ widerspricht. Ähnlich kann man die Gültigkeit von $xa = a$ einsehen.

(III)$\Rightarrow$(I): Bezeichne $k(\neq 0)$ einen Quasiabsorbenten des Elementes a. Wegen (III) und (2. 6) gilt $a = ak \wedge ka \leqq k$ also $k = a$.

(II)$\Rightarrow$(IV): trivial.

(IV)$\Rightarrow$(II): Ist $l(\neq 0)$ ein Linksabsorbent von a, so gilt wegen $l^2 = l$ und $l^2 \leqq al \leqq l$ die Gleichung $ll = al$, woraus $l = a$ folgt. Dasselbe gilt für jeden Rechtsabsorbenten $r(\neq 0)$ von a. Damit ist der Beweis beendet.

Das Element a von L heißt ein *Divisionselement*, wenn für a die Voraussetzung $(\mathbf{A}_1)$ und eine der Bedingungen (I)—(IV) gelten.

Voraussetzung $(\mathbf{A}_2)$: Sind k_1, k_2, k_3 Quasiabsorbenten des Elementes $a(\in L)$, so sei $(k_1 k_2) k_3 = k_1 (k_2 k_3)$.

Aus der Voraussetzung $(\mathbf{A}_2)$ und aus $\mathbf{B}_4$ bekommt man, daß es für jeden Quasiabsorbenten k des Elementes a von L

$$a(ak) = (a^2)k \leqq ak \quad \text{und} \quad (ka)a = k(a^2) \leqq ka$$

gilt. Dies bedeutet, daß ak bzw. ka ein Linksabsorbent bzw. ein Rechtsabsorbent von a ist.

Der Rechtsabsorbent $r(\neq 0)$ des Elementes $a(\in L)$, heißt *minimal*, wenn a keinen Rechtsabsorbenten r mit $0 < r' < r$ besitzt. Ähnlich definiert man die minimalen Links- und Quasiabsorbenten.

Behauptung 2. 4. *Wird* $(\mathbf{A}_1)$ *oder* $(\mathbf{A}_2)$ *für ein Element a von L vorausgesetzt, so ist der Durchschnitt eines minimalen Linksabsorbenten l und eines minimalen Rechtsabsorbenten r des Elementes a entweder* 0 *oder ein minimaler Quasiabsorbent von a.*

Beweis. Es sei $r \wedge l = k \neq 0$. Nach (2. 7) ist k ein Quasiabsorbent von a. Wir setzen voraus, daß es — im Widerspruch zu unserer Behauptung — einen Quasiabsorbenten k' von a mit $0 < k' < k$ gibt. Infolge der Voraussetzung $(\mathbf{A}_1)$ oder $(\mathbf{A}_2)$ ist ak' ein Linksabsorbent von a mit der Eigenschaft $0 \leqq ak' \leqq l$. Wegen der Minimalität von l gilt entweder $ak' = 0$ oder $ak' = l$. Im Fall $ak' = 0$ wäre k' ein Linksabsorbent von a mit $0 < k' < k \leqq l$, was aber wegen der Definition von l unmöglich ist. Folglich ist $ak' = l$. Ebenso folgt $k'a = r$. Daraus ergibt sich $k = l \wedge r = ak' \wedge k'a \leqq k'$, was der Bedingung $k' < k$ widerspricht. Damit ist Behauptung 2. 4 bewiesen.

Ein Element a von L mit der Voraussetzung $(\mathbf{A}_2)$ nennen wir *radikalfrei,* wenn a weder nilpotente Linksabsorbenten $(\neq 0)$, noch nilpotente Rechtsabsorbenten $(\neq 0)$ besitzt.

Im radikalfreien Fall gilt die Umkehrung der Behauptung 2. 4.

Behauptung 2. 5. *Ist a $(\in L)$ ein radikalfreies Element, so ist jeder minimale Quasiabsorbent k von a der Durchschnitt eines geeigneten minimalen Linksabsorbenten und eines geeigneten minimalen Rechtsabsorbenten von a.*

Beweis. Wegen der Voraussetzung $(\mathbf{A}_2)$ ist ak bzw. ka ein Links- bzw. Rechtsabsorbent von a. Da nach (2. 7) der Durchschnitt $ak \wedge ka$ $(\leqq k)$ ein Quasiabsorbent von a ist, sind wegen der Minimalität von k nur die folgenden zwei Fälle möglich:

$$ak \wedge ka = \begin{cases} 0, \\ k. \end{cases}$$

Es sei zuerst $ak \wedge ka = 0$. Gilt außerdem $ak = 0$, so ist k $(\neq 0)$ ein nilpotenter Linksabsorbent von a, was unmöglich ist. Im Falle $ak \neq 0$ betrachten wir das Produkt $k(ak)$. Infolge der Voraussetzung $(\mathbf{A}_2)$ gilt $k(ak) = (ka)k \leqq ak \wedge ka = 0$, woraus $(ak)(ak) = 0$ folgt. Dies widerspricht wegen $ak \neq 0$ der Radikalfreiheit von a.

Es sei dann $ak \wedge ka = k$. Wir behaupten, daß ak bzw. ka ein minimaler Links- bzw. ein minimaler Rechtsabsorbent von a ist. Es genügt die Behauptung für ak zu beweisen. Ist ak nicht minimal, so hat a einen Linksabsorbenten l mit der Eigenschaft

$$0 < l < ak. \tag{2. 8}$$

Da der Durschnitt $al \wedge ka$ ein Quasiabsorbent von a ist, muß wegen der Voraussetzungen

$$\text{entweder} \quad al \wedge ka = 0 \quad \text{oder} \quad al \wedge ka = k \tag{2. 9}$$

bestehen. Im Falle $al \wedge ka = 0$ gilt wegen $kl \leqq al \wedge ka = 0$ auch $kl = 0$. Dies impliziert infolge der Voraussetzung $(\mathbf{A}_2)$, daß $(ak)l = a(kl) = 0$, woraus wegen (2. 8) $l^2 = 0$, $l \neq 0$ folgt, was unmöglich ist. Im Fall $al \wedge ka = k$ gilt wegen $k \leqq al \leqq l$ auch $ak \leqq$ $\leqq a(al) \leqq al \leqq l$, was der Annahme (2. 8) widerspricht. Damit ist der Beweis beendet.

3. Beispiele

Wir geben jetzt einige Beispiele für die oben erwähnten Begriffe, Voraussetzungen und Ergebnisse.

Beispiel 3. 1. Es sei C_0 ein Gruppoid mit Nullelement 0. Es bezeichne L_1 die Menge aller Untergruppoide mit Nullelement 0 von C_0. Definiert man das Produkt $A \cdot B$ von $A, B \in L_1$ als das durch alle Elemente $ab (a \in A; b \in B)$ erzeugtes Untergruppoid von C_0, so bildet L_1 einen Gruppoid-Verband bezüglich dieser Multiplikation und des mengentheoretischen Enthaltenseins. 0 bzw. C_0 ist das kleinste bzw. das größte Element des vollständigen Verbandes L_1. Die Links-, Rechtsabsorbenten usw. des Elementes C_0 von L_1 entsprechen den Links-, Rechtsidealen usw. des Gruppoids C_0.

Beispiel 3. 2. Es sei H_0 eine Halbgruppe mit Nullelement 0. Ähnlich zum Beispiel 3. 1 bilden alle Unterhalbgruppen mit 0 von H_0 einen Gruppoid-Verband L_2. Es ist zu bemerken, daß L_2 im allgemeinen keine Halbgruppe ist. Sind nämlich A, B, C drei Unterhalbgruppen mit Nullelement von H_0, so gilt für die Elemente $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B$ und $c \in C$: $d = (a_1 b_1 a_2 b_2)c \in (A \cdot B) \cdot C$, aber im allgemeinen $d \notin A \cdot (B \cdot C)$.

Die Links-, Rechtsideale usw. von H_0 werden in L_2 die Links-, Rechtsabsorbenten usw. des Elementes H_0 von L_2. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß die Voraussetzungen $(\mathbf{A}_1)$ und $(\mathbf{A}_2)$ für jedes Element von L_2 gelten.

Beispiel 3. 3. Es bezeichne L_3 die Menge aller Untergruppen einer Gruppe G. Es ist bekannt, daß L_3 ein vollständiger Verband bezüglich des mengentheoretischen Enthaltenseins $\subseteqq$ ist, und $A \cap B (A, B \in L_3)$ den mengentheoretischen Durchschnitt, $A \cup B$ die durch A, B erzeugte Untergruppe von G bezeichnen. Wird das „Produkt" von $A, B \in L_3$ als der Kommutator $[A, B]$ von A und B definiert, so bildet L_3 einen Gruppoid-Verband bezüglich dieser Multiplikation und der Relation $\subseteqq$. Offenbar ist L_3 ein kommutatives Gruppoid, da $[A, B] = [B, A]$ für alle $A, B \in L_3$ gilt. Das kleinste Element von L_3 ist das Einselement der Gruppe G, und selbst G ist das größte Element von L_3. Es ist nicht schwer die folgende Behauptung zu beweisen, welche eine Aufklärung über die Beziehung der Normalteiler und Absorbenten gibt.

Behauptung 3. 1. *Für zwei Untergruppen A, B der Gruppe G, d.h. für $A, B \in L_3$ ist A dann und nur dann ein Normalteiler von B, wenn A ein Absorbent von B ist, d.h. wenn*

$$A \subseteqq B \quad \text{und} \quad [A, B] = [B, A] \subseteqq A \tag{3. 1}$$

gelten.

Ein ähnliches Ergebnis wurde von STELLECKIĬ [14] bewiesen.

Da die „Multiplikation" $[A, B]$ $(A, B \in L_3)$ kommutativ ist, stimmen die Begriffe: Absorbent, Links-, Rechts- und Quasiabsorbent in L_3 überein. Für die Normalteiler A, B, C einer beliebigen Gruppe G gilt $[[A, B], C] = [A, [B, C]]$ im allgemeinen nicht, also ist die Voraussetzung $(\mathbf{A}_2)$ in L_3 im allgemeinen nicht gültig.

Man nennt eine Gruppe G *metaabelsch*, wenn jeder Kommutator $[x, y]$ $(x, y \in G)$ im Zentrum von G liegt. In [13] haben wir u.a. folgendes Resultat bewiesen:

Satz 3. 2. ([13] Satz 5. 4) *Ist G eine metaabelsche Gruppe, so gelten die Aussagen:*

(A) *Für die Untergruppen A, B, C von G bestehen*

$$[[A, B], C] = [A, [B, C]] \tag{3. 2}$$

$$[A \cup [A, G], B] = [A, B] \cup [[A, G], B]; \tag{3. 3}$$

(B) *Der durch die Untergruppe A erzeugte Normalteiler*[2]) *von G ist* $A \cup [A, G]$.

Beispiel 3. 4. Ähnlich zum Beispiel 3. 2 kann man einsehen, daß die Menge L_4 aller Unterringe eines assoziativen Ringes R einen Gruppoid-Verband bildet, wenn die folgenden Operationen in L_4 definiert sind:

a) $A \cap B$ ist der mengentheoretische Durchschnitt der Unterringe $A, B (\in L_4)$;

b) $A \cup B$ bezeichnet den durch A und B erzeugten Unterring von R;

c) das Produkt $A \cdot B$ bezeichnet den durch alle Elemente $ab (a \in A, b \in B)$ erzeugten Unterring von R.

Die Ideale, Links-, Rechts- und Quasiideale des Ringes R entsprechen den Absorbenten, Links-, Rechts- und Quasiabsorbenten des Elementes R von L_4.

Die Multiplikation $A \cdot B (A, B \in L_4)$ ist im allgemeinen *nicht assoziativ*[3]), aber die Voraussetzungen $(\mathbf{A}_1)$ und $(\mathbf{A}_2)$ gelten für jedes Element von L_4.

Beispiel 3. 5. Unter einem *Halbring S_0 mit Nullelement* 0 verstehen wir eine nichtleere Menge S_0 mit den folgenden Eigenschaften. In S_0 sind eine assoziative, kommutative Addition und eine assoziative Multiplikation definiert, für welche die Distributivitätsregel

$$a(b+c) = ab+ac, \quad (a+b)c = ac+bc \qquad (a, b, c \in S_0)$$

gilt. Ferner besitzt S_0 ein Element 0 mit

$$0+x = x+0 = x \quad \text{und} \quad 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0 \qquad (x \in S_0).$$

Man kann zeigen, daß die Menge L_5 aller Unterhalbringe mit Nullelement 0 von S_0 ähnlich zum Beispiel 3. 4 einen Gruppoid-Verband bildet.

---

[2]) Herr Dr. György Pollák machte mich darauf aufmerksam, daß diese Tatsache auch für jede Gruppe G gilt.

[3]) Nach dem obigen Beispiel haben wir in [11] und [12] (ohne Beweis) falsch behauptet, daß die Multiplikation in L_2 und L_4 assoziativ sei.

Die Ideale, Rechtsideale usw. von S_0 lassen sich ähnlich wie im Ringe definieren, und diese Begriffe entsprechen den Absorbenten, Rechtsabsorbenten usw. in L_5. Die Voraussetzungen $(\mathbf{A}_1)$ und $(\mathbf{A}_2)$ gelten auch für jedes Element von L_5.

Wenn die von Null verschiedenen Elemente von S_0 bezüglich der Multiplikation eine Gruppe bilden, so heißt S_0 ein *Divisionshalbring.*

Beispiel 3. 6. Wir betrachten wieder einen assoziativen Ring R. Da die Voraussetzung $(\mathbf{A}_1)$ für das Element R von L_4 gültig ist, impliziert die Behauptung 2. 3 das folgende

Korollar 3. 3. *Ein assoziativer Ring R ist dann (und nur dann) ein Schiefkörper, wenn für jeden Unterring $X(\neq 0)$ von R die Relation $RX=XR=R$ gilt.*

Ähnlicherweise kann man eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angeben, daß eine Halbgruppe (ein Halbring) mit Nullelement eine Gruppe mit Nullelement (ein Divisionshalbring) sei.

Das Divisionselement ist also eine gemeinsame Verallgemeinerung des Schiefkörpers, der Gruppe mit 0 und des Divisionshalbringes.

Beispiel 3. 7. Die Behauptungen 2. 4 und 2. 5 verallgemeinern unsere Ergebnisse über die Quasiideale von Ringen und Halbgruppen. (Siehe [8], [9], [10].)

Die erwähnten Behauptungen lassen sich auch für die Quasiideale von Halbringen mit Nullelement spezialisieren. (Vgl. Iséki [3].)

4. Über die regulären Elemente

Ein assoziativer Ring (eine Halbgruppe) R heißt *regulär,* wenn für jedes Element a von R gilt:

$$a \in aRa.$$

Wir werden einige Ergebnisse über die regulären Ringe und Halbgruppen für die Elemente eines Gruppoid-Verbands verallgemeinern. Wir schicken eine Distributivitätsbedingung voraus.

Voraussetzung $(\mathbf{D}_v)$. Für das Element a eines Gruppoid-Verbands L seien die Distributivitätsregeln

$$x(y \vee ay) = xy \vee x(ay) \quad \text{und} \quad (y \vee ay)x = yx \vee (ay)x,$$

$$x(y \vee ya) = xy \vee x(ya) \quad \text{und} \quad (y \vee ya)x = yx \vee (ya)x$$

mit allen Elementen $x(\leqq a)$ und $y(\leqq a)$ von L erfüllt.

Wenn die Voraussetzungen $(\mathbf{A}_1)$ und $(\mathbf{D}_v)$ für das Element a von L gelten, so besteht $a(x \vee ax) = ax \vee a(ax) = ax \leqq x \vee ax$ für jedes $x(\in L;\, x \leqq a)$. Das Element

$x \vee ax$ ist also ein Linksabsorbent von a mit der Eigenschaft $x \leqq x \vee ax$. Ist l ein Linksabsorbent von a mit $l \geqq x$, so gilt $x \vee ax \leqq l \vee al \leqq l$. Dem entsprechend ist das Element $x \vee ax$ $(x \vee xa)$ *der durch* x *erzeugte Linksabsorbent (Rechtsabsorbent)* von a.

Bezeichne $(\mathbf{D}_v^*)$ jener Spezialfall der Voraussetzung $(\mathbf{D}_v)$, wo die Elemente $x, y(\leqq a)$ nur beliebige Quasiabsorbenten von a sein können.

Setzen wir voraus, daß die Voraussetzungen $(\mathbf{A}_2)$ und $(\mathbf{D}_v^*)$ für das Element a von L gelten. Es sei l bzw. r ein Links- bzw. Rechtsabsorbent von a. Infolge (2. 5) gelten

$$
\begin{aligned}
&a(l \vee la) = al \vee a(la) = al \vee (al)a \leqq l \vee la,\\
(4.\ 1)\qquad &(l \vee la)a = la \vee (la)a = la \vee la^2 \leqq l \vee la,\\
&(r \vee ar)a = ra \vee (ar)a = ra \vee a(ra) \leqq r \vee ar,\\
&a(r \vee ar) = ar \vee a(ar) = ar \vee a^2 r \leqq r \vee ar.
\end{aligned}
$$

Die Elemente $l \vee la$ und $r \vee ar$ sind also Absorbenten von a. Es gilt

Satz 4. 1. *Für das Element a des Gruppoid-Verbands L seien die Voraussetzungen* $(\mathbf{A}_2)$ *und* $(\mathbf{D}_v^*)$ *erfüllt. Die folgenden drei Bedingungen sind für a äquivalent:*

(i) *für jeden Rechtsabsorbenten r und Linksabsorbenten l von a gilt*

$$(4.\ 2)\qquad rl = r \wedge l;$$

(ii) *für jeden Rechtsabsorbenten r und Linksabsorbenten l von a gelten:* a) *r ist idempotent, d. h. $r^2 = r$;* b) *l ist idempotent;* c) *rl ist ein Quasiabsorbent von a;*

(iii) *die Quasiabsorbenten von a bilden eine reguläre Unterhalbgruppe K von L.*

Beweis. (i)⇒(ii). Die Bedingung c) folgt aus (4. 2) und der Tatsache, daß $r \wedge l$ ein Quasiabsorbent von a ist. Wegen (4. 2) gilt $ra = r \wedge a = r$, woraus infolge der Voraussetzungen $(\mathbf{A}_2)$ und $(\mathbf{D}_v^*)$

$$r = r \wedge (r \vee ar) = r(r \vee ar) = r^2 \vee r(ar) = r^2 \vee (ra)r = r^2$$

folgt, was die Bedingung a) impliziert. Ähnlich kann man die Gültigkeit von b) einsehen.

(ii)⇒(i). Es sei k ein Quasiabsorbent von a. Wir zeigen zuerst

$$(4.\ 3)\qquad k = ka \wedge ak.$$

Wegen a) und der Voraussetzungen $(\mathbf{A}_2)$ und $(\mathbf{D}_v^*)$ gelten

$$k \leqq k \vee ka = (k \vee ka)^2 = k^2 \vee k^2 a \vee kak \vee kaka \leqq ka.$$

Ähnlich gilt $k \leqq ak$. Aus $k \leqq ka$, $k \leqq ak$ und (2. 6) folgt eben (4. 3).

Wegen (4. 3) und c) gilt

$$rl = (rl)a \wedge a(rl), \tag{4. 4}$$

wo r ein Rechtsabsorbent, l ein Linksabsorbent von a ist. Aus (4. 3), (4. 4), der Voraussetzung $(\mathbf{A}_2)$ und a), b) bekommt man

$$r \wedge l = k = ka \wedge ak = (ka)(ak)a \wedge a(ka)(ak) = (ka)(ak) = kak \leqq ral \leqq rl,$$

was wegen der Behauptung 2. 2 die Gültigkeit von (4. 2) sichert.

(i)$\Rightarrow$(iii). Wir zeigen zuerst, daß das Produkt der Quasiabsorbenten k_1, k_2 von a ein Quasiabsorbent von a ist. Wegen (4. 2) und der Voraussetzung $(\mathbf{A}_2)$ gilt

$$a(k_1k_2) \wedge (k_1k_2)a = k_1k_2aak_1k_2 \leqq k_1 \cdot k_2ak_2 \leqq k_1(k_2a \wedge ak_2) \leqq k_1k_2.$$

Somit bilden die Quasiabsorbenten von a infolge der Voraussetzung $(\mathbf{A}_2)$ eine Unterhalbgruppe K von L. Weiterhin bekommt man wegen der Voraussetzungen $(\mathbf{A}_2)$ und $(\mathbf{D}_v^*)$ für einen beliebigen Quasiabsorbenten k von a

$$k \leqq (k \vee ka) \wedge (k \vee ak) = (k \vee ka)(k \vee ak) = k^2 \vee kak \leqq ka \wedge ak = ka^2k,$$

woraus wegen $ka^2k = ka \wedge ak \leqq k$

$$k = ka^2k \in kKk,$$

d.h. die Regularität der Halbgruppe K folgt.

(iii)$\Rightarrow$(i). Da der Durchschnitt $r \wedge l$ eines Rechtsabsorbenten r und eines Linksabsorbenten l von a ein Quasiabsorbent von a ist, existiert wegen (iii) und der Voraussetzung $(\mathbf{A}_2)$ ein Quasiabsorbent x von a mit der Eigenschaft

$$r \wedge l = (r \wedge l)x(r \wedge l) \leqq (r \wedge l)a(r \wedge l) \leqq ral \leqq rl.$$

Damit ist der Beweis beendet.

Wir nennen das Element a des Gruppoid-Verbands L *regulär*, wenn die Voraussetzungen $(\mathbf{A}_2)$ und $(\mathbf{D}_v^*)$, ferner (mindestens) eine der Bedingungen (i), (ii) und (iii) für a erfüllt sind.

Aus Behauptung 2. 3 und Satz 4. 1 bekommt man:

Behauptung 4. 2. *Jedes Divisionselement a von L ist ein reguläres Element.*

Beweis. Infolge der Behauptung 2. 3 besitzt a nur zwei Quasiabsorbenten 0 und a. Nach (2. 1) und der Behauptung 2. 3 gelten $0^2 = 0$, $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, außerdem gilt $xa = ax = a$ für alle $x (\in L)$ mit $0 < x \leqq a$. Daraus sieht man, daß die Voraussetzungen $(\mathbf{A}_2)$ und $(\mathbf{D}_v^*)$ für a erfüllt sind. Weiterhin impliziert Bedingung (II) der Behauptung 2. 3 die Bedingung (i) des Satzes 4. 1.

Aus der Bedingung (iii) des Satzes 4. 1 folgt, daß für jeden Quasiabsorbenten k des regulären Elementes a von L gilt $k^2 = k^2yk^2 \leqq k^2ak^2 = k \cdot kak \cdot k \leqq k^3$ $(y \in K)$. Dies impliziert:

Behauptung 4. 3. *Ist $a(\in L)$ ein reguläres Element, so gilt $k^2=k^3$ für jeden Quasiabsorbenten k von a.*

Wir werden sofort sehen, daß $k^2=k$ im allgemeinen falsch ist.[4])

Korollar 4. 4. *Sind die Voraussetzungen* $(\mathbf{A}_2)$ *und* $(\mathbf{D}_v^*)$ *für das Element a von L erfüllt, so sind die folgenden zwei Bedingungen äquivalent:*

(1) *für jeden Rechtsabsorbenten r und Linksabsorbenten l von a gilt* $rl = r\wedge l \leqq lr$;

(2) *jeder Quasiabsorbent von a ist idempotent.*

Beweis. (1)$\Rightarrow$(2). Gilt die Bedingung (1) für a, so gilt die Bedingung (i) des Satzes 4. 1 noch mehr. Wie wir im Beweis des Satzes 4. 1 gesehen haben, läßt sich jeder Quasiabsorbent k von a in der Form $k=ka^2k$ darstellen. Dies impliziert nach der Bedingung (1) $k = ka\cdot ak \leqq ak\cdot ka$, woraus wegen $a^2 = a\wedge a = a$ und der Voraussetzung $(\mathbf{A}_2)$ die Relation

$$k = kak = kak\cdot a\cdot kak = ka\cdot kak\cdot ak \leqq ka\cdot akka\cdot ak = kak\cdot kak = k^2$$

folgt.

(2)$\Rightarrow$(1). Es sei r ein Rechtsabsorbent, l ein Linksabsorbent von a. Da $r\wedge l$ ein Quasiabsorbent von a ist, so gilt nach (2)

$$r\wedge l = (r\wedge l)^2 \leqq rl\wedge lr,$$

woraus wegen $rl \leqq r\wedge l$ die Behauptung (1) folgt.

Beispiel 4. 1. Wieder betrachten wir den Gruppoid-Verband L_4 aller Unterringe eines assoziativen Ringes R. (Siehe Beispiel 3. 4.) Sind A und B zwei Unterringe von R, so bezeichne $A+B$ die Menge aller Elemente $a+b$ mit $a\in A$ und $b\in B$. ($A+B$ ist im allgemeinen kein Unterring von R.) Es ist klar, daß im Fall $B=R\cdot A$ bzw. $B=A\cdot R$ gilt:

$$A+R\cdot A = A\cup R\cdot A \quad \text{bzw.} \quad A+A\cdot R = A\cup A\cdot R.$$

Hieraus folgt unschwer, daß die Voraussetzung $(\mathbf{D}_v)$ für jedes Element von L_4 besteht.

Beispiel 4. 2. Ähnlich kann man einsehen, daß die Voraussetzung $(\mathbf{D}_v)$ auch für jedes Element von L_2 und L_5 gilt. (Siehe Beispiele 3. 2 und 3. 5.)

Beispiel 4. 3. Zu den Bedingungen (i) und (ii) von Satz 4. 1 ähnliche Charakterisierungen der regulären Ringe und Halbgruppen sind in den Arbeiten von L. Kovács [5], K. Iséki [4] und J. Calais [1] enthalten.

---

[4]) Z. B. ist der volle Matrizenring K_n ($n\geqq 2$) der n-reihigen quadratischen Matrizen über einem Schiefkörper K ein regulärer Ring, welcher auch nichtidempotente Quasiideale besitzt.

Die Äquivalenz der Bedingungen (i) und (iii) für Ringe und Halbgruppen ist im wesentlichen von S. LAJOS [6], J. LUH [7] und O. STEINFELD [12] bewiesen.

Behauptungen 4. 2 und 4. 3 lassen sich für Ringe und Halbgruppen spezialisieren.

Ein zum Korollar 4. 4 ähnliches Ergebnis wurde im Satz 2 von L. KOVÁCS [5] über Ringe bewiesen. Es ist eine offene Frage, wie sich die übrigen äquivalenten Bedingungen dieses Satzes für die regulären Elemente eines Gruppoid-Verbandes verallgemeinern lassen.

Beispiel 4. 4. Wieder betrachten wir den Gruppoid-Verband L_3 aller Untergruppen einer *metaabelschen* Gruppe G. Die Relation (3. 3) in Satz 3. 2 zeigt, daß die Voraussetzung $(\mathbf{D}_v)$ für das Element G von L_3 erfüllt ist.

5. Über die Menge aller Absorbenten eines Elementes

Es sei L ein Gruppoid-Verband mit der folgenden Eigenschaft: für alle $a, b \in L$ existiert ein Element $a:b$ von L derart, daß

(5. 1) $$x \leqq a:b \ (x \in L) \quad \text{mit} \quad xb \leqq a \ (x \in L) \quad \text{äquivalent ist.}$$

Dann sagen wir, daß $a:b$ der *Linksquotient von a durch b*, und L ein *Gruppoid-Verband mit Linksquotienten* ist. Der *Rechtsquotient von a durch b* wird ähnlich als ein Element $a::b$ von L definiert, für welches

(5. 2) $$x \leqq a::b \ (x \in L) \Leftrightarrow bx \leqq a \qquad (x \in L)$$

gilt. Ein Gruppoid-Verband L, der sowohl Links- als auch Rechtsquotienten hat, heißt ein *Gruppoid-Verband mit Quotienten*[5]).

Wenn die unendlichen Distributivitätsregeln

(5. 3) $$x\big(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} y_\lambda\big) = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} xy_\lambda \quad \text{und} \quad \big(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} y_\lambda\big)x = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} y_\lambda x \quad (x, y_\lambda \in L)$$

in einem Gruppoid-Verband L gelten, heißt L ein *Gruppoid-Verband mit volldistributiver Multiplikation.*

Behauptung 5. 1. (Vgl. FUCHS [2].) *L ist dann und nur dann ein Gruppoid-Verband mit Quotienten, wenn L ein Gruppoid-Verband mit volldistributiver Multiplikation ist.*

Beweis. Es sei L ein Gruppoid-Verband mit Quotienten. Für die Elemente $x, y_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ von L gilt offensichtlich $xy_\lambda \leqq x\big(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} y_\lambda\big)$. Nun nehmen wir an, daß $xy_\lambda \leqq z \in L$

[5]) Die Links- und Rechtsquotienten können in beliebigen teilweise geordneten Gruppoiden definiert werden. Siehe L. FUCHS [2], wo die umgekehrten Benennungen benützt sind.

für jedes $\lambda\ (\in \Lambda)$ gilt. Nach Definition (5. 2) besteht $y_\lambda \leqq z::x$ für jedes λ, woraus $\bigvee_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda \leqq z::x$ folgt. Dies impliziert wieder nach (5. 2)

$$x(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda) \leqq z.$$

Damit ist gezeigt, daß $x(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda)$ die kleinste obere Schranke der Elemente $xy_\lambda\ (\lambda\in\Lambda)$ ist, d.h. die Aussage (5. 3_1) gilt. Ähnlich kann man (5. 3_2) beweisen.

Umgekehrt, setzen wir woraus, daß (5. 3) in dem Gruppoid-Verband L gilt. Wir betrachten zwei beliebige Elemente a, b von L. Es bezeichne $a{:}b$ die Vereinigung aller Elemente $z_\delta\ (\delta\in\Delta)$ von L, für welche $z_\delta b \leqq a\ (\delta\in\Delta)$ besteht. Für das Element 0 von L besteht nach (2. 1) $0\cdot b = 0 \leqq a$, deshalb existiert das Element $a{:}b = \bigvee_{\delta\in\Delta} z_\delta$ stets. Infolge der Voraussetzung (5. 3_2) kann man leicht einsehen, daß $a{:}b = \bigvee_{\delta\in\Delta} z_\delta\ (\in L)$ die Bedingung (5. 1) befriedigt. Das Element $a{:}b = \bigvee_{\delta\in\Delta} z_\delta$ ist also der Linksabsorbent von a durch b, folglich ist L ein Gruppoid-Verband mit Linksquotienten. Ähnlich kann man zeigen, daß L ein Gruppoid-Verband mit Rechtsquotienten ist, w. z. b. w.

Ein Gruppoid-Verband L heißt *negativ geordnet*, wenn für alle $a, b (\in L)$ die Bedingung gilt:

(5. 4) $$ab \leqq a \wedge b.$$

Die folgende Voraussetzung ermöglicht, daß die Vereinigung beliebiger Linksabsorbenten (Rechtsabsorbenten) eines Elementes $a\ (\in L)$ ein Linksabsorbent (Rechtsabsorbent) von a sei.

Voraussetzung ($\mathbf{D}_\infty$). Sind $m_\lambda (\lambda\in\Lambda)$ beliebige Linksabsorbenten (Rechtsabsorbenten) des Elementes $a (\in L)$ und ist $x\ (\leqq a)$ ein beliebiges Element von L, so sollen

$$(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda)x = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda x \quad \text{und} \quad x(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda) = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} x m_\lambda$$

bestehen.

Wenn die $r_\lambda\ (\lambda\in\Lambda)$ Rechtsabsorbenten des Elementes $a (\in L)$ sind, so bekommt man aus (2. 5_2) und der Voraussetzung ($\mathbf{D}_\infty$)

$$(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda)a = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda a \leqq \bigvee_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda,$$

also ist $\bigvee_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda$ ein Rechtsabsorbent von a. Ähnlich ist die Vereinigung $\bigvee_{\delta\in\Delta} l_\delta$ der Linksabsorbenten $l_\delta\ (\delta\in\Delta)$ von a ein Linksabsorbent von a.

Satz 5. 2. *Gelten die Voraussetzungen* ($\mathbf{A}_2$) *und* ($\mathbf{D}_\infty$) *für das Element a des Gruppoid-Verbands L, so bildet die Menge A aller Absorbenten von a einen negativ geordneten Unterhalbgruppen-Verband mit Quotienten von L.*

Beweis. Betrachten wir zwei Absorbenten b, c des Elementes a. Nach der Voraussetzung $(\mathbf{A}_2)$ bestehen

$$a(bc)=(ab)c\leqq bc \quad \text{und} \quad (bc)a=b(ca)\leqq bc,$$

also ist das Element bc ein Absorbent von a. Diese Tatsache und die Voraussetzung $(\mathbf{A}_2)$ implizieren, daß die Menge A aller Absorbenten von a eine Unterhalbgruppe von L ist. Bezeichnen b_γ $(\gamma\in\Gamma)$ beliebige Absorbenten von a, so ist $\bigwedge_{\gamma\in\Gamma} b_\gamma$ nach (2. 2) und (2. 5) ein Absorbent von a. Infolge (2. 5) und der Voraussetzung $(\mathbf{D}_\infty)$ bestehen

$$\Big(\bigvee_{\gamma\in\Gamma} b_\gamma\Big)a = \bigvee_{\gamma\in\Gamma} b_\gamma a \leqq \bigvee_{\gamma\in\Gamma} b_\gamma \quad \text{und} \quad a\Big(\bigvee_{\gamma\in\Gamma} b_\gamma\Big) = \bigvee_{\gamma\in\Gamma} ab_\gamma \leqq \bigvee_{\gamma\in\Gamma} b_\gamma,$$

also ist das Element $\bigvee_{\gamma\in\Gamma} b_\gamma$ ein Absorbent von a. Damit ist bewiesen, daß A ein Unterhalbgruppe-Verband von L ist.

Nach der Behauptung 2. 2 besteht $bc\leqq b\wedge c$ für alle Absorbenten b, c von a, also ist A negativ geordnet.

Aus der Voraussetzung $(\mathbf{D}_\infty)$ folgt, daß in A die Distributivitätsregeln (5. 3) gelten. Dies impliziert nach Behauptung 5. 1, daß A ein Unterhalbgruppe-Verband mit Quotienten ist.

Damit ist Satz 5.2 bewiesen.

Beispiel 5. 1. Wieder betrachten wir den Gruppoid-Verband L_4 aller Unterringe eines assoziativen Ringes R. Bezeichnet M_λ $(\lambda\in\Lambda)$ ein Linksidealsystem (Rechtsidealsystem) von R, so gilt offenbar $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß für einen beliebigen Unterring X von R die distributiven Regeln

$$\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\Big)\cdot X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\cdot X \quad \text{und} \quad X\cdot\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X\cdot M_\lambda$$

gelten. Dies bedeutet, daß für das Element R von L_4 die Voraussetzung $(\mathbf{D}_\infty)$ besteht.

Satz 5. 2 ist eine Verallgemeinerung des bekannten Ergebnisses, daß die Menge aller Ideale eines assoziativen Ringes eine negativ und verbandsgeordnete Halbgruppe ist, in der die links- und rechtsseitigen Idealquotienten definiert sind.

Beispiel 5. 2. Die Gültigkeit der Voraussetzung $(\mathbf{D}_\infty)$ kann man für einen Halbring S_0 mit Nullelement ähnlich wie für einen Ring einsehen. Auch Satz 5. 2 läßt sich für S_0 spezialisieren.

Beispiel 5. 3. Es bezeichne L_2 wieder den Gruppoid-Verband aller Unterhalbgruppen mit Nullelement 0 der Halbgruppe H_0 mit Nullelement. Da die Operation

$\cup$ in L_2 für die Linksideale (Rechtsideale) von H_0 mit der mengentheoretischen Vereinigung übereinstimmt, ist die Gültigkeit der Voraussetzung ($\mathbf{D}_\infty$) für das Element H_0 $(\in L_2)$ offenbar erfüllt.

Satz 5. 2 läßt sich auch für H_0 anwenden.

Beispiel 5. 4.a) Wieder betrachten wir den Gruppoid-Verband L_3 aller Untergruppen einer Gruppe G. Es bezeichne $\bar{L}_3$ die Menge aller Normalteiler von G. Bekanntlich bildet $\bar{L}_3$ ein Untergruppoid und einen vollständigen Teilverband von L_3; d.h. $\bar{L}_3$ ist ein Untergruppoid-Verband von L_3. Sind $A, B\,(\in \bar{L}_3)$ zwei Normalteiler von G, so besteht

$$[A, B] \subseteqq A \cap B,$$

$\bar{L}_3$ ist also negativ geordnet. Man kann in $\bar{L}_3$ auch die Quotienten $A:B$ und $A::B$ $(A, B \in \bar{L}_3)$ definieren, die wegen der Kommutativität der Verknüpfung $[X, Y]$ $(X, Y \in L_3)$ miteinander übereinstimmen. Die Existenz von $A:B\,(=A::B)$ $(A, B \in \bar{L}_3)$ impliziert infolge der Behauptung 5. 1, daß $\bar{L}_3$ ein Gruppoid-Verband mit volldistributiver Multiplikation ist. Die erwähnten Eigenschaften von $\bar{L}_3$ sind zu den Aussagen im Satz 5. 2 analog, obwohl die Voraussetzung ($\mathbf{A}_2$) für die Gruppe G im allgemeinen unerfüllt ist.

b) Jetzt setzen wir voraus, daß G eine Gruppe ist, deren beliebige Normalteiler A, B die Eigenschaft

$$[A, B] = A \cap B \qquad (A, B \in \bar{L}_3) \tag{5. 5}$$

haben. Wegen der Behauptung 3. 1 und der Eigenschaften von $\bar{L}_3$ sind die Voraussetzungen ($\mathbf{A}_2$) und ($\mathbf{D}_v^*$), ferner die Bedingung (i) des Satzes 4. 1 für das Element G von L_3 erfüllt. Dies bedeutet, daß eine Gruppe G mit der Eigenschaft (5. 5) ein Analogon der regulären Ringe (Halbgruppen) darstellt.

Literaturverzeichnis

[1] J. Calais, Demi-groupes quasi inversifs, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **252** (1961), 2357—2359.
[2] L. Fuchs, *Partially ordered algebraic systems* (Oxford—London—New York—Paris, 1963).
[3] K. Iséki, Quasiideals in semirings without zero, *Proc. Japan Acad.*, **34** (1958), 79—81.
[4] ——— A characterization of regular semi-groups, *Proc. Japan Acad.*, **32** (1956), 676—677.
[5] L. Kovács, A note on regular rings, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), 465—468.
[6] S. Lajos, A félcsoportok ideálelméletéhez, *MTA III. Oszt. Közl.*, **11** (1961), 57—66.
[7] J. Luh, A characterization of regular rings, *Proc. Japan Acad.*, **39** (1963), 741.
[8] O. Steinfeld, Über die Quasiideale von Halbgruppen, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), 262—275.
[9] ——— Über die Quasiideale von Ringen, *Acta Sci. Math.*, **17** (1956), 170-180.
[10] ——— Über die Quasiideale von Halbgruppen mit eigentlichem Suschkewitsch-Kern, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 235—242.

[11] O. STEINFELD, Verbandstheoretische Betrachtung gewisser idealtheoretischer Fragen, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 136—149.
[12] ——— Über Zerlegungssätze für teilweise geordnete Halbgruppen mit bedingten Distributivitätsregeln, *MTA Mat. Kutató Int. Közl.*, **9** (1964), 313—330.
[13] ——— Primelemente und Primradikale in gewissen verbandsgeordneten algebraischen Strukturen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **19** (1968), 243—261.
[14] И. В. Стеллецкий, Нилпотентные структуры, *Труды Московского Матем. Общ.*, **9** (1960), 211—235.

(Eingegangen am 17. September 1968)