Noethersche Ringe, die artinsch sind

Von A. KERTÉSZ in Debrecen

Herrn L. Rédei anläßlich seines 70. Geburtstages in Verehrung und Zuneigung gewidmet

Unter einem *noetherschen Ring* versteht man einen (nicht notwendig kommutativen) Ring,[1]) der bezüglich seiner Rechtsideale der Maximalbedingung genügt. Als *artinsche Ringe* werden diejenigen Ringe bezeichnet, welche bezüglich ihrer Rechtsideale der Minimalbedingung genügen. Nach einem Satz von FUCHS und SZELE [1] (siehe auch [3]) ist ein artinscher Ring R dann und nur dann noethersch, wenn die additive Gruppe von R keine Untergruppe vom Typ $Z(p^\infty)$ besitzt. In dieser Arbeit fragen wir nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß ein noetherscher Ring artinsch ist. Ein wohlbekanntes Ergebnis in dieser Richtung ist der Satz von AKIZUKI (siehe etwa [4], S. 25 oder [5], Theorem 2, S. 203), nach welchem ein kommutativer noetherscher Ring mit Einselement genau dann artinsch ist, wenn er die Eigenschaft besitzt, daß jedes seiner Primideale maximal ist.

Wir wollen hier die folgende Verallgemeinerung dieses Satzes beweisen:

Satz. *Ein beliebiger noetherscher Ring R ist genau dann artinsch, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) *Jedes Primideal $P\,(\neq R)$ von R ist maximal und der Faktorring R/P ist artinsch.*

(b) *Der Linksannullator $(0:R')_l$ jedes Faktorringes R' von R ist endlich.*

Zum Beweis[2]) dieses Satzes brauchen wir den

Hilfssatz. *Jedes Ideal eines noetherschen Ringes R enthält ein Produkt von endlich vielen Primidealen $(\neq R)$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{M}$ die Menge der Ideale von R, die kein Produkt von endlich vielen Primidealen von R enthalten, und $\mathfrak{M}$ sei nicht leer. Dann besitzt die halb-

[1]) Ring bedeutet in dieser Arbeit stets einen assoziativen Ring. Was Bezeichnung und Terminologie betrifft, halten wir uns prinzipiell an diejenigen des Buches [3].

[2]) Die Grundidee des Beweises des Satzes geht zurück auf diejenige eines Satzes in [5] (S. 203, Theorem 2).

geordnete Menge $(\mathfrak{M}, \subseteqq)$ ein maximales Element, etwa M. Da M kein Primideal ist, gibt es Ideale A', B' $(\subseteqq R)$ mit

$$A' \subsetneqq M, \ B' \subsetneqq M \quad \text{und} \quad A'B' \subseteqq M.$$

Wir setzen $A = A' + M$ und $B = B' + M$. Dann folgt

$$M \subset A, \ M \subset B \quad \text{und} \quad AB \subseteqq M.$$

Wegen der Maximalität von M in $\mathfrak{M}$ gilt $A \notin \mathfrak{M}$ und $B \notin \mathfrak{M}$, folglich enthalten A und B und damit auch $(AB \subseteqq) M$ ein Produkt von Primidealen. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung, daß M ein Element von $\mathfrak{M}$ ist. Folglich ist $\mathfrak{M}$ leer, und damit ist der Beweis des Hilfssatzes erbracht.

Beweis des Satzes. Es sei R noethersch und artinsch, ferner sei $P\,(\neq R)$ ein Primideal von R. Dann ist R/P ein artinscher Primring, folglich einfach (vgl. etwa [3] Satz 5. 15 und 7. 15). Also ist P ein maximales Ideal in R. — Ist R' ein beliebiger Faktorring von R, so ist R' ebenfalls noethersch und artinsch. Da jede (additive) Untergruppe von $(0{:}R')_l$ ein Rechtsideal von R' ist, genügt $(0{:}R')_l$ bezüglich der Untergruppen der Maximal- und Minimalbedingung. Folglich ist $(0{:}R')_l$ endlich.

Es sei jetzt R ein noetherscher Ring mit den Eigenschaften (a) und (b). Nach Hilfssatz ist insbesondere das Nullideal (0) das Produkt etwa der Primideale $P_i\,(\neq R;\ i=1, \dots, n)$ von R. Dabei können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß

$$R = P_0 \supset P_1 \supset P_1 P_2 \supset \dots \supset P_1 P_2 \dots P_n = (0)$$

eine streng absteigende Kette ist.

Wir setzen

$$F_i = (P_1 \dots P_{i-1})/(P_1 \dots P_i) \qquad (i = 1, \dots, n).$$

F_i läßt sich in natürlicher Weise als ein (rechtsseitiger) R/P_i-Modul auffassen. Nach (a) ist R/P_i ein einfacher artinscher Primring, folglich radikalfrei. Nach dem Satz von Goldman [2] (siehe auch [3], Satz 9. 3) gibt es für den R/P_i-Modul F_i eine direkte Zerlegung

$$F_i = F_i^{(0)} \oplus F_i^{(1)},$$

wobei $F_i^{(1)}$ vollständig reduzibel und $F_i^{(0)}$ ein trivialer R/P_i-Modul ist. Dabei ist $F_i^{(1)}$ die direkte Summe von *endlich vielen* einfachen R-Moduln. ($R/(P_1 \dots P_i)$ ist nämlich ein noetherscher R-Modul. Als Untermodul von $R/(P_1 \dots P_i)$ ist F_i ebenfalls noethersch. F_i ist auch als R/P_i-Modul noethersch, da eine Untermenge H von F_i genau dann ein R-Untermodul von F_i ist, wenn H ein R/P_i-Untermodul von F_i ist.) Ferner gilt

$$F_i^{(0)} \subseteqq (0{:}\, R/(P_1 \dots P_i))_l,$$

folglich ist $F_i^{(0)}$ — nach (b) — *endlich.* F_i besitzt also als R-Modul für jedes $i=1, \ldots, n$ eine Kompositionsreihe. Daraus folgt, daß R als R-Modul ebenfalls eine Kompositionsreihe besitzt, folglich ist R ein artinscher Ring, q.e.d.

Weil ein artinscher Ring mit Rechtseinselement noethersch ist (siehe z. B. [3], Folgerung 10.12), ergeben sich von dem eben bewiesenen Satz

Folgerung 1. *Ein Ring mit Rechtseinselement ist genau dann artinsch, wenn er ein noetherscher Ring mit der Eigenschaft* (a) *ist.*

Folgerung 2. (AKIZUKI) *Ein kommutativer Ring mit Einselement ist dann und nur dann artinsch, wenn er noethersch und jedes seiner Primideale maximal ist.*

Literatur

[1] L. FUCHS—T. SZELE, On artinian rings, *Acta Sci. Math.*, **17** (1956), 30—40.
[2] O. GOLDMAN, A characterization of semi-simple rings with the descending chain condition, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 1021—1027.
[3] A. KERTÉSZ, *Vorlesungen über artinsche Ringe* (Budapest—Leipzig, 1968).
[4] M. NAGATA, *Local rings* (New York, 1962).
[5] O. ZARISKI—P. SAMUEL, *Commutative algebra*. I (Princeton, 1958).

(Eingegangen am 12. Juli 1969)