Compléments à l'étude des opérateurs de classe C_0

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

Dédié au 70ième anniversaire de M. László Rédei

Dans cette Note on poursuit l'étude des opérateurs de classe C_0, c'est-à-dire des contractions complètement non-unitaires T d'un espace de Hilbert telles que $u(T)=O$ pour une fonction convenable $u \in H^\infty$, $u \not\equiv 0$, et on réussit de compléter d'une manière essentielle certains résultats des Notes [2] et [3]. La clé en est fournie par le théorème 1 affirmant que pour tout $T \in C_0$ il existe un sous-espace invariant cyclique tel que la restriction de T à ce sous-espace ait la même fonction minimum que T. (On a démontré ce résultat dans [2] sous la condition additionnelle que T est de multiplicité μ_T finie.)[1])

On établit alors (théorème 2) une liste de conditions équivalentes à la condition $\mu_T=1$ (opérateurs „sans multiplicité"), en étendant de cette façon à la classe C_0 des résultats obtenus dans [2] pour les classes particulières $C_0(N)$. On démontre, entre autres, que si un opérateur T de classe C_0 admet un vecteur cyclique, il en est de même de T^* ainsi que de toute restriction de T à un sous-espace invariant.

Ensuite on considère les opérateurs T de classe C_0 tels que $\mu_T<\infty$, et en montrant qu'alors $\mu_{T*}=\mu_T$ (théorème 3) on parvient à étendre un résultat fondamental de [3], notamment on obtient que T est quasi-similaire à un „opérateur de Jordan" $S(m_1, \ldots, m_K)$ et un seul, avec $K=\mu_T$, et que par conséquent le second commutant de T est composé des fonctions $\varphi(T)$ de T.

1. Préliminaires

Lemme 1. *Soit $\mathscr{I}$ une famille de fonctions intérieures (scalaires) pour le disque unité ouvert D, jouissant des propriétés:* a) *pour $u, v \in \mathscr{I}$ on a aussi $u \vee v \in \mathscr{I}$,* b) *il y a un $\lambda_0 \in D$ tel que, pour u variable dans $\mathscr{I}$, $|u(\lambda_0)|$ ait un infimum $\gamma>0$. Dans*

[1]) Pour un opérateur T dans l'espace $\mathfrak{H}$ la multiplicité μ_T est définie comme la cardinalité minimum d'un ensemble $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{H}$ tel que $\mathfrak{S}, T\mathfrak{S}, T^2\mathfrak{S}, \ldots$ sous-tendent $\mathfrak{H}$.

ces conditions toute suite $u_n \in \mathcal{J}$, *telle que* $|u_n(\lambda_0)| \to \gamma$, *contient une suite partielle qui converge dans D vers* $\bigvee_{u \in \mathcal{J}} u$.[2])

(*Cf.* [4]; on applique le théorème de Vitali-Montel.)

Dans ce qui suit T désignera un opérateur défini dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, de classe C_0. La fonction minimum de T sera notée par m_T. Pour un ensemble non-vide $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{H}$ on écrit $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ pour le sous-espace, invariant pour T, défini par $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^n \mathfrak{A}$; la fonction minimum de $T|\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ sera notée aussi par $m_{\mathfrak{A}}$. En particulier, si $h \in \mathfrak{H}$, on écrira m_h pour la fonction minimum de la restriction de T au sous-espace invariant $\mathfrak{M}(h) = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n h$.

Lemme 2. *Pour* $h_h \to h$ $(h_h, h \in \mathfrak{H})$ *et* $\lambda_0 \in D$ *quelconques, on a*

$$|m_h(\lambda_0)| \geqq \liminf_{n \to \infty} |m_{h_n}(\lambda_0)|.$$

Dans la démonstration on fait usage, entre autres, de la propriété suivante du calcul fonctionnel pour les contractions complètement non-unitaires (*cf.* [1], théorème III. 2. 1 (c″)): Pour toute suite de fonctions $u_n \in H^\infty$ uniformément bornées et tendant vers 0 dans D, on a $u_n(T) \to O$. On applique ce fait notamment à une suite partielle des $m_{h_n} - m_h$, obtenu par le théorème de Vitali-Montel. (Pour les détails voir [4], n° 3.)

Lemme 3. (Sherman)[3]) *Soit* $\mathfrak{K}$ *un sous-espace de* $\mathfrak{H}$, *de dimension* 2. *Les* $h \in \mathfrak{K}$ *pour lesquels* $m_h = m_{\mathfrak{K}}$, *font un ensemble dense dans* $\mathfrak{K}$. *Notamment, les h exceptionnels sont compris dans la réunion d'un ensemble dénombrable de sous-espaces de* $\mathfrak{K}$ *de dimension* 1.

Démonstration. Pour $h_1, h_2 \in \mathfrak{K}$ de directions différentes on a $\mathfrak{K} = h_1 \vee h_2$, $\mathfrak{M}(\mathfrak{K}) = \mathfrak{M}(h_1) \vee \mathfrak{M}(h_2)$ et par conséquent $m_{\mathfrak{K}} = m_{h_1} \vee m_{h_2}$; *cf.* [1], proposition III. 6. 2. En posant $p_h = m_{\mathfrak{K}}/m_h$ la dernière relation est équivalente à la relation $p_{h_1} \wedge p_{h_2} = 1$. Or, pour la fonction intérieure $m_{\mathfrak{K}}$, une famille de diviseurs intérieurs

---

[2]) Pour une famille $\{\mathfrak{S}_\alpha\}$ de sous-ensembles non vides de l'espace $\mathfrak{H}$, on désigne par $\bigvee_\alpha \mathfrak{S}_\alpha$ le sous-espace sous-tendu par les vecteurs compris dans la réunion $\bigcup_\alpha \mathfrak{S}_\alpha$. — Pour une famille $\{u_\alpha\}$ de fonctions intérieures, on désigne par $\bigwedge_\alpha u_\alpha$ le plus grand diviseur intérieur commun et par $\bigvee_\alpha u_\alpha$ le plus petit multiple intérieur commun (si celui-ci existe).

[3]) Ce lemme est indiqué dans [6] et démontré dans un cas particulier. La démonstration ingénieuse pour le cas général (que nous allons esquisser) nous a été communiquée par M. J. Sherman.

propres, premiers deux à deux, est nécessairement dénombrable. Cela résulte en considérant la représentation de $m_{\mathfrak{K}}$ moyennant ses zéros dans D et la mesure singulière correspondante sur la circonférence unité.

2. L'existence de f vérifiant $m_f = m_T$

Théorème 1. *Pour tout opérateur T de classe C_0 dans l'espace $\mathfrak{H}$, il existe un $f \in \mathfrak{H}$ tel que $m_f = m_T$.*

Remarque. Ce théorème a été démontré auparavant pour le cas particulier où $\mu_T < \infty$; *cf.* [2], théorème 1 et la remarque à la fin du n° 4. Nous en ferons usage dans ce qui suit.*)

Démonstration. Choisissons $\lambda_0 \in D$ tel que $m_T(\lambda_0) \neq 0$ et posons

$$\gamma = |m_T(\lambda_0)| \quad \text{et} \quad \gamma' = \inf_{f \in \mathfrak{H}} |m_f(\lambda_0)|.$$

Comme chaque m_f est un diviseur intérieur de m_T, on a $\gamma' \geqq \gamma\ (>0)$; la famille des fonctions m_f ($f \in \mathfrak{H}$) vérifie donc la condition b) du lemme 1. Elle vérifie la condition b) aussi: il n'y a qu'à appliquer le théorème pour $T' = T|\mathfrak{M}(f_1, f_2)$ au lieu de T (cas établi dans [2] parce que $\mu_{T'} \leqq 2$), en observant aussi que $m_T' = m_{f_1} \vee m_{f_2}$ (*cf.* [1], proposition III. 6. 2).

Soit $\{f_n\}$ une suite minimisante pour γ'. En vertu du lemme 1 elle comprend une suite partielle $\{g_n\}$ convergeant dans D vers le plus petit multiple intérieur commun u des fonctions m_f ($f \in \mathfrak{H}$). Or on a évidemment $\bigvee_{f \in \mathfrak{H}} \mathfrak{M}(f) = \mathfrak{H}$, d'où $u = m_T$ (*cf.* [1], proposition III. 6. 2). On a donc en particulier $m_{g_n}(\lambda_0) \to m_T(\lambda_0)$, d'où $\gamma' = \gamma$.

Supposons que m_T ne coïncide avec aucune des fonctions m_f. Puisque m_f est un diviseur intérieur de m_T, cela veut dire que $|m_f(\lambda_0)| > |m_T(\lambda_0)|$ pour tout $f \in \mathfrak{H}$. En d'autres termes, on suppose donc que l'espace $\mathfrak{H}$ est la réunion des sous-ensembles

$$\sigma_k = \left\{ f : |m_f(\lambda_0)| \geqq \gamma + \frac{1}{k} \right\} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Chaque σ_k est *différent* de $\mathfrak{H}$ (autrement, on aurait $\gamma' \geqq \gamma + 1/k$ pour un k) et est

*) *(Ajouté dans les épreuves:)* M. DOMINGO A. HERRERO vient de nous signaler qu'il a trouvé, ily a plus d'une année, le résultat suivant plus fort que notre théorème: *Pour $T \in C_0$, l'ensemble des vecteurs $f \in \mathfrak{H}$ pour lesquels $m_f \neq m_T$ est un F_σ et de première catégorie.*

fermé (conséquence du lemme 2). En vertu du théorème de Baire l'un au moins des ensembles σ_k doit alors comprendre une boule

$$\mathfrak{B} = \{f: \|f-f_0\| < \varrho\} \qquad (\varrho > 0),$$

c'est-à-dire qu'on a

$$|m_f(\lambda_0)| \geqq \gamma_1 \text{ pour un } \gamma_1 > \gamma \text{ et pour tout } f \in \mathfrak{B}. \tag{1}$$

Or, comme $\gamma' = \gamma$, il existe un $g \in \mathfrak{H}$ tel que

$$|m_g(\lambda_0)| < \gamma_1; \tag{2}$$

f_0 et g sont linéairement indépendants (parce que $m_{f_0} \neq m_g$), donc déterminent un sous-espace $\mathfrak{A}$ de dimension 2. Puisque $\mathfrak{M}(g) \subset \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$, m_g est un diviseur de $m_{\mathfrak{A}}$ et par conséquent $|m_g(\lambda_0)| \geqq |m_{\mathfrak{A}}(\lambda_0)|$, donc vu (2) on a $|m_{\mathfrak{A}}(\lambda_0)| < \gamma_1$.

D'autre part, il s'ensuit de lemme 3 que les $f \in \mathfrak{A}$ pour lesquels $m_f = m_{\mathfrak{A}}$, sont denses dans $\mathfrak{A}$. Ainsi il existe un $f \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ tel que $m_f = m_{\mathfrak{A}}$; vu (1) on a donc $|m_{\mathfrak{A}}(\lambda_0)| \geqq \gamma_1$.

Les deux inégalités pour $|m_{\mathfrak{A}}(\lambda_0)|$ étant contradictoires, nous avons démontré par l'absurde l'assertion du théorème.

3. Vecteurs cycliques et quasi-similitude à un $S(m)$

Pour une fonction intérieure m on désigne par $S(m)$ l'opérateur de classe $C_0(1)$ défini dans l'espace $\mathfrak{H}(m) = H^2 \ominus mH^2$ par $(S(m)^*u)(\lambda) = \frac{1}{\lambda}[u(\lambda) - u(0)]$; *cf.* [3].

Proposition 1. *Soit T de classe C_0 dans $\mathfrak{H}$.* a) *Si T ou T^* admet un vecteur cyclique, il en est de même de l'autre et dans ce cas T est quasi-similaire à $S(m)$ (et T^* à $S(m^\sim)$), où $m = m_T$.*[4]) — b) *Inversement, si T est quasi-similaire ù un $S(m)$, T et T^* ont des vecteurs cycliques.*

Démonstration.

Ad a). Par raison de symétrie il suffit d'envisager le cas où T^* a un vecteur cyclique f_*. Choisissons alors un élément $f \in \mathfrak{H}$ tel que la restriction T_0 de T au sous-espace invariant $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{M}(f)$ ait la même fonction minimum que T (*cf.* théorème 1). Nous allons démontrer que f est cyclique pour T.

Soit $g \in \mathfrak{H}$, d'ailleurs quelconque, et désignons par T_g la restriction de T au sous-espace invariant $\mathfrak{H}_g = \mathfrak{M}(f, g)$. Puisque $T_0 \subset T_g \subset T$, la fonction minimum de T_g est aussi égale à m_T.

---

[4]) Dans [2] on a établi ce fait pour les classes particulières $C_0(N)$ seulement.

Il est évident que $\mu_{T_g} \leqq 2$. D'autre part, on a $\mu_{T_g^*}=1$ parce que la projection orthogonale de f_* à $\mathfrak{H}_g$ est un vecteur cyclique pour T_g^*.[5]) Puisque $\mu_{T_g} \leqq 2$ et $\mu_{T_g^*}=1$, on déduit du théorème 2 de [3] que ($\mu_{T_g}=1$ et) T_g est quasi-similaire à l'opérateur $S=S(m)$, $m=m_{T_g}=m_T$; cela subsiste en particulier pour T_0 (cas $g=0$).

Donc il y a des *quasi-affinités* X_g: $\mathfrak{H}_g \to \mathfrak{H}(m)$ et Y_g: $\mathfrak{H}(m) \to \mathfrak{H}_g$ telles que

(3) $$SX_g = X_g T_g \quad \text{et} \quad T_g Y_g = Y_g S.$$

Puisque $T_0 \subset T_g$, la quasi-affinité Y_0: $\mathfrak{H}(m) \to \mathfrak{H}_0$ induit une *injection* [6])

$$Y_g': \ \mathfrak{H}(m) \to \mathfrak{H}_g \quad \text{telle que} \quad \overline{Y_g' \mathfrak{H}(m)} = \mathfrak{H}_0.$$

Par conséquent, $Z_g = Y_g' X_g$ sera une injection de $\mathfrak{H}_g$ dans $\mathfrak{H}_g$ vérifiant

(4) $$\overline{Z_g \mathfrak{H}_g} = \mathfrak{H}_0.$$

On déduit aisément de (3) que $X_g Y_g$ et $X_g Z_g Y_g$ permutent à S. En vertu d'un théorème de SARASON [5] il existe donc des fonctions $u_g, v_g \in H^\infty$ telles que

$$X_g Z_g Y_g = u_g(S), \quad X_g Y_g = v_g(S).$$

Faisant usage de (3) on en déduit les relations

$$Y_g X_g Z_g Y_g = Y_g u_g(S) = u_g(T_g) Y_g, \quad Y_g X_g Y_g = Y_g v_g(S) = v_g(T_g) Y_g;$$

vu que $\overline{Y_g \mathfrak{H}(m)} = \mathfrak{H}_g$ il en dérive que

(5) $$Y_g X_g Z_g = u_g(T_g), \qquad Y_g X_g = v_g(T_g).$$

Les opérateurs Y_g, X_g, Z_g étant des injections, il en est de même de leur produit $u_g(T_g)$, donc aussi de $u_{gi}(T_g)$ où u_{gi} désigne le facteur intérieur de u_g.[7]) Cela entraîne que $u_{gi} \wedge m_{T_g} = 1$. [8]) Comme on a $m_{T_g} = m = m_S$, la fonction minimum de la re-

[5]) Si A est un opérateur dans $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{L}$ est un sous-espace invariant pour A, alors $A_{\mathfrak{L}} = A|\mathfrak{L}$ vérifie les équations $A_{\mathfrak{L}}^{*n} P_{\mathfrak{L}} = P_{\mathfrak{L}} A^{n*}$ $(n=0, 1, \ldots)$ où $P_{\mathfrak{L}}$ est la projection orthogonale à $\mathfrak{L}$. Si A^* admet un vecteur cyclique h, les vecteurs $P_{\mathfrak{L}} A^{*n} h$ $(n=0, 1, \ldots)$ sous-tendent le sous-espace $P_{\mathfrak{L}} \mathfrak{H} = \mathfrak{L}$ et on conclut que le vecteur $P_{\mathfrak{L}} h$ est cyclique pour $A_{\mathfrak{L}}^*$.

[6]) $Y_g' h = Y_0 h$ pour $h \in \mathfrak{H}(m)$. „Injection" veut dire une transformation biunivoque de l'espace de départ *dans* l'espace final.

[7]) Pour le facteur extérieur u_{ge}, l'opérateur $u_{ge}(T_g)$ est une quasi-affinité dans $\mathfrak{H}_g$; *cf.* [1] proposition III. 3. 1.

[8])—[9]) On applique ici les faits suivants, valables pour tout opérateur T de classe C_0 (dans $\mathfrak{H}$) et pour toute fonction intérieure w: *Les sous-espaces*

$$\mathfrak{H}_w = \{f : f \in \mathfrak{H}, w(T) f = 0\} \quad \textit{et} \quad \mathfrak{H}^w = \overline{w(T)\mathfrak{H}}$$

striction de S à $\overline{u_{gi}(S)\mathfrak{H}(m)}$ sera donc égale à m_S.[9]) Or on déduit de [2], théorème 2, que la restriction de l'opérateur $S(\in C_0(1))$ à un sous-espace invariant propre a sa fonction minimum différente de m_S. On conclut que $\overline{u_{gi}(S)\mathfrak{H}(m)}=\mathfrak{H}(m)$ et par conséquent $\overline{u_g(S)\mathfrak{H}(m)}=\mathfrak{H}(m)$, d'où il dérive par (3):

$$\overline{u_g(T_g)\mathfrak{H}_g}=\overline{u_g(T_g)Y_g\mathfrak{H}(m)}=\overline{Y_g u_g(S)\mathfrak{H}(m)}=\overline{Y_g\mathfrak{H}(m)}=\mathfrak{H}_g.$$

D'autre part il dérive de (4) et (5) que

$$\overline{u_g(T_g)\mathfrak{H}_g}=\overline{v_g(T_g)Z_g\mathfrak{H}_g}=\overline{v_g(T_g)\mathfrak{H}_0}=\overline{v_g(T_0)\mathfrak{H}_0}\subset\mathfrak{H}_0.$$

On a donc $\mathfrak{H}_g\subset\mathfrak{H}_0$ ce qui veut dire que tout élément g de $\mathfrak{H}$ est compris dans $\mathfrak{H}_0$. Donc $\mathfrak{H}_0=\mathfrak{H}$, T a le vecteur cyclique f et est quasi-similaire à $S(m)$.

Ad b). Si T est quasi-similaire à $S(m)$, T^* est quasi-similaire à $S(m^\sim)$ et inversement. Or $S(m)$ et $S(m^\sim)$ ont des vecteurs cycliques (tels sont $1-\overline{m(0)}\,m$ et $1-\overline{m^\sim(0)}\,m^\sim$). Grâce aux quasi-similitudes en question, T et T^* ont aussi des vecteurs cycliques.

La proposition 1 est démontrée.

Corollaire. *Si un opérateur T de classe C_0 admet un vecteur cyclique, il en est de même de la restriction de T à un sous-espace invariant $\mathfrak{L}$.*

En effet, T^* a alors un vecteur cyclique f_*; la projection de f_* à $\mathfrak{L}$ sera cyclique pour $(T|\mathfrak{L})^*$ (*cf.* [5])) ce qui entraîne à son tour que $T|\mathfrak{L}$ admet aussi un vecteur cyclique.

4. Opérateurs sans multiplicité

Nous sommes à même de montrer que le théorème 2 de [2], établi là pour les classes $C_0(N)$, s'étend à toute la classe C_0.

Théorème 2. *Pour un opérateur T de classe C_0 dans l'espace $\mathfrak{H}$, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\mu_T=1$ *(T admet un vecteur cyclique)*;

(i$_*$) $\mu_{T^*}=1$ *(T^* admet un vecteur cyclique)*;

---

sont invariants (même ultrainvariants) pour T et les restrictions correspondantes de T ont les fonctions minimum

$$m_{T_w}=m_T\wedge w \quad et \quad m_{T^w}=m_T/(m_T\wedge w).$$

Pour T^w c'est le lemme 2 dans [3], tandis que pour T_w c'est une conséquence immédiate du lemme 4. 5 et du théorème 6. 3 du chap. III de [1]. Notons que si $w(T)$ est une injection, on a $\mathfrak{H}_w=\{0\}$, $m_{T_w}=1$.

(ii) *T est quasi-similaire à $S(m)$, $m=m_T$;*

(iii) *pour tout diviseur intérieur m' de m_T il existe un sous-espace $\mathfrak{L}$ invariant pour T et un seul tel que $m_{T|\mathfrak{L}}=m'$, notamment le sous-espace ultrainvariant $\mathfrak{H}'=$ $=\{h\colon m'(T)h=0\}$;*

(iv) *il n'y a pas de sous-espace propre $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{H}$, invariant pour T et tel que $m_{T|\mathfrak{L}}=m_T$;*

(v) *il n'y a pas des sous-espaces différents $\mathfrak{L}_1$ et $\mathfrak{L}_2$, invariants pour T et tels que $T|\mathfrak{L}_1$ et $T|\mathfrak{L}_2$ soient quasi-similaires;*

(vi) *tout opérateur $X\in(T)'$ est une fonction de T: $X=\varphi(T)$ où $\varphi\in N_T$.*[10])

Démonstration. L'équivalence des conditions (i), (i_*) et (ii) a été déjà établie dans la proposition 1. Nous utiliserons la notation (o) pour indiquer l'une quelconque de ces conditions.

Ad (o)$\Rightarrow$(iii). Supposons que T vérifie (o) et soit m' un diviseur intérieur de m_T. On sait que le sous-espace $\mathfrak{H}'=\{h\colon m'(T)h=0\}$ est ultrainvariant pour T, et $T'=T|\mathfrak{H}'$ a la fonction minimum égale à m' (*cf.* [1], théorème III. 6. 3). Soit $\mathfrak{H}_0'$ un sous-espace quelconque de $\mathfrak{H}$, invariant pour T et tel que $T_0'=T|\mathfrak{H}_0'$ ait la fonction minimum égale à m'. Il est manifeste que $\mathfrak{H}_0'\subset\mathfrak{H}'$; il s'agit de montrer que $\mathfrak{H}_0'=\mathfrak{H}'$.

Considérons à cet effet le sous-espace invariant pour T, engendré par $\mathfrak{H}_0'$ et un vecteur $g'\in\mathfrak{H}$; désignons ce sous-espace par $\mathfrak{H}_g'$. Comme on a $T_0'\subset T_g'\subset T'$, la fonction minimum de T_g' est aussi égale à m'. Comme T vérifie (o), il en est de même de sa restriction T_g' (*cf.* le corollaire de la proposition 1), donc T_g' est quasi-similaire à l'opérateur $S(m)$ avec $m=m_{T_g'}=m'$.

A partir de ce point il n'y a qu'à répéter, dès les formules (3), les raisonnements de la démonstration de la proposition 1 a), en les appliquant à T_g' et $S(m')$ au lieu de T_g et $S(m)$. Il résulte que $\mathfrak{H}_g'=\mathfrak{H}_0'$ pour tout $g\in\mathfrak{H}'$, d'où $\mathfrak{H}_0'=\mathfrak{H}'$.

Ad (iii)$\Rightarrow$(iv). On prend $m'=m_T$ dans (iii).

Ad (iv)$\Rightarrow$(o). Soit f_0 tel que $m_{T|\mathfrak{M}(f_0)}=m_T$ (*cf.* theorème 1). Si T vérifie (iv), on doit avoir $\mathfrak{M}(f_0)=\mathfrak{H}$, donc f_0 est cyclique pour T.

Ad (iii)$\Rightarrow$(v). On note que deux opérateurs quasi-similaires de classe C_0 ont la même fonction minimum.

Ad (v)$\Rightarrow$(o). Soit f_0 tel que $T_0=T|\mathfrak{M}(f_0)$ ait la même fonction minimum que T (theorème 1). Il s'agit de montrer que $\mathfrak{M}(f_0)=\mathfrak{H}$. Or dans le cas contraire il existe un

[10]) $(T)'$ est constitué des opérateurs (linéaires bornés) qui permutent à T; $(T)''$ est constitué des opérateurs qui permutent à tout opérateur dans $(T)'$. — Pour la classe de fonctions N_T *cf.* [2], p. 7 ou [1], chap. IV (dans la variante anglaise).

$f_1 \neq 0$ orthogonal à $\mathfrak{M}(f_0)$. Posons $T_1 = T|\mathfrak{L}_1$ où $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{M}(f_1)$. Comme m_{T_1} et un diviseur de m_T, donc de m_{T_0}, il existe un sous-espace $\mathfrak{L}_2$ de $\mathfrak{M}(f_0)$, invariant pour T_0 et tel que $T_2 = T_0|\mathfrak{L}_2$ ($= T|\mathfrak{L}_2$) a la fonction minimum égale à m_{T_1}. Comme T_0 admet le vecteur cyclique f_0, sa restriction T_2 admet aussi un vecteur cyclique (*cf.* le corollaire à la proposition 1). En vertu de la proposition 1, T_1 et T_2 sont quasi-similaires au même opérateur $S(m)$, avec $m = m_{T_1} = m_{T_2}$, et par conséquent T_1 est quasi-similaire à T_2. Comme $\mathfrak{L}_1 \neq \mathfrak{L}_2$, nous sommes aboutis à une contradiction avec (v). Cela prouve que $\mathfrak{M}(f_0) = \mathfrak{H}$, c'est-à-dire que f_0 est cyclique pour T.

Ad (o)$\Rightarrow$(vi). En vertu de (o), T est quasi-similaire à $S(m_T)$. On applique alors le même raisonnement que dans [2], n^{0}7 ((i)$\to$(vi)).

Ad (vi)$\Rightarrow$(o). Comme nous avons à notre disposition le théorème 1, la proposition 1 et son corollaire, nous pouvons procéder par le même raisonnement que dans [2], n^{0}7 ((vi)$\to$(i)).

Voici le diagramme des implications démontrées:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \text{(v)} \\ & & & \swarrow & \Uparrow \\ \text{(vi)} & \Leftrightarrow & \text{(o)} & \Rightarrow & \text{(iii)} \\ & & & \nwarrow & \Downarrow \\ & & & & \text{(iv)} \end{array}$$

La démonstration du théorème est terminée.

5. Opérateurs de multiplicité finie

Pour une suite finie $m_1, \ldots, m_k$ de fonctions intérieures, dont chacune est un diviseur de la précédente, nous posons $S(m_1, \ldots, m_k) = S(m_1) \oplus \cdots \oplus S(m_k)$. Si de plus m_k (et par conséquent $m_{k-1}, \ldots, m_1$) sont non-constantes, nous appelons $S(m_1, \ldots, m_k)$ un *opérateur de Jordan; cf.* [3].

Dans [3] on a démontré le théorème 1: *si* $T \in C_0$ (*dans* $\mathfrak{H} \neq \{0\}$) *et* $\mu_T < \infty$, *alors il existe un opérateur de Jordan tel que* $T \succ S(m_1, \ldots, m_K)$, [11]) et le théorème 2: *si de plus* $\mu_{T*} < \infty$, *cet opérateur de Jordan est univoquement déterminé par* T, *est quasi-similaire à* T, *et on a* $K = \mu_T = \mu_{T*}$. Dans de dernier cas, $S(m_1, \ldots, m_K)$ est appelé *le modèle de Jordan de* T.

Faisant usage de ces résultats de [3] ainsi que de ceux que nous venons d'établir dans la Note présente, nous montrerons que la condition $\mu_{T*} < \infty$ dérive de la condition, $\mu_T < \infty$ ou, ce que revient au même par raison de symétrie, que $\mu_{T*} < \infty$ entraîne $\mu_T < \infty$.

[11]) $T_1 \succ T_2$ veut dire que T_2 est une transformée quasi-affine de T_1; *cf.* [3], p. 94.

A cet effet il faut d'abord observer que la proposition 1 de [3] est valable pour T quelconque:

Proposition 2. *Pour tout T de classe C_0 dans l'espace $\mathfrak{H}$, il existe un sous-espace invariant $\mathfrak{M}$ tel qu'on ait*

$$T \succ S(m_1) \oplus T_1 \quad \text{où} \quad m_1 = m_T, \quad T_1 = T|\mathfrak{M} \tag{6}$$

et que par conséquent m_{T_1} soit un diviseur de m_1.

Démonstration. D'après le théorème 1 il existe un sous-espace $\mathfrak{L}$ invariant pour T^* tel que $T^*|\mathfrak{L}$ admette un vecteur cyclique et ait la même fonction minimum que T^*. L'opérateur $T_{\mathfrak{L}} = (T^*|\mathfrak{L})^*$ admet alors aussi un vecteur cyclique, soit f, et on a $m_{T_{\mathfrak{L}}} = (m_{T^*})^{\sim} = m_T$, donc $T_{\mathfrak{L}}$ est quasi-similaire à $S(m_T)$; *cf.* proposition 1. En posant $\mathfrak{L}_1 = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^n f$ on montre (tout comme à la p. 99 de [3]) que $m_{T|\mathfrak{L}_1} = m_T$; comme $T|\mathfrak{L}_1$ admet un vecteur cyclique (notamment f), on déduit de la proposition 1 que $T|\mathfrak{L}_1$ est aussi quasi-similaire à $S(m_T)$. En particulier on a donc $T|\mathfrak{L}_1 \succ S(m_T) \succ$ $\succ T_{\mathfrak{L}}$. De ces relations on déduit (6), avec $\mathfrak{M} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{L}$, par le même raisonnement qu'on a employé dans [3], n°2. Cela conclut la démonstration.

Par application itérée de la proposition 2 on obtient que

$$T \succ S(m_1, \ldots, m_r) \oplus T_r \tag{7}$$

(où chaque m est un diviseur du précédent et m_{T_r} est un diviseur de m_r) et cela pour r quelconque ($r \geqq 1$) si l'on admet (à partir d'un certain rang) aussi des fonctions intérieures m constantes et des opérateurs T_r de l'espace banal $\{0\}$.

Cela étant, supposons que $\mu_{T^*} < \infty$. D'après le théorème 1 de [3] il existe un opérateur de Jordan $S(p_1^{\sim}, \ldots, p_K^{\sim})$ tel que

$$T^* \succ S(p_1^{\sim}, \ldots, p_K^{\sim}), \quad \text{donc} \quad T \prec S(p_1, \ldots, p_K). \tag{8}$$

De (7) et (8) on déduit que $S(p_1, \ldots, p_K) \succ S(m_1, \ldots, m_r) \oplus T_r$. Par conséquent il existe un sous-espace $\mathfrak{L}_r$ invariant pour $S(p_1, \ldots, p_K)$ tel qu'on ait

$$S(p_1, \ldots, p_K)|\mathfrak{L}_r \succ S(m_1, \ldots, m_r)$$

et cela pour tout $r \geqq 1$. Comme $S(p_1, \ldots, p_K)$ est compris dans la classe $C_0(K)$, sa restriction à $\mathfrak{L}_r$ est comprise dans une classe $C_0(K_r)$ avec $K_r \leqq K$. Si la fonction m_r n'est pas constante, il s'ensuit de la proposition 2 de [3] que $r \leqq K_r$. Donc la fonction m_{K+1} est certainement constante et par conséquent T_{K+1} est un opérateur dans l'espace banal $\{0\}$. On conclut qu'il existe un $R(\leqq K)$ tel que m_R est non-constante et $T \succ S(m_1, \ldots, m_R)$. Cela entraîne que

$$\mu_T \leqq \mu_{S(m_1, \ldots, m_R)} \leqq R,$$

donc $\mu_T < \infty$. En vertu du théorème 2 de [3] on a nécessairement $\mu_T = \mu_{T^*}$.

Vu que les conditions $T \in C_0$ et $T^* \in C_0$ sont équivalentes, les rôles de μ_T et μ_{T^*} sont symétriques, donc on a le

Théorème 3. *Pour tout T de classe C_0, de multiplicité μ_T finie, on a $\mu_T = \mu_{T^*}$.*

Il s'ensuit que les théorèmes 2 et 3 de [3] s'appliquent à tout opérateur T de classe C_0, de multiplicité μ_T finie: *T est quasi-similaire à un opérateur de Jordan, univoquement déterminé par T,* et *le second commutant $(T)''$ est composé de fonctions $\varphi(T)$ de T, $\varphi \in N_T$.*

Il s'ensuit aussi le complément suivant au théorème 2:

Corollaire. *Pour T de classe C_0 et de multiplicité finie, on a $\mu_T = 1$ si $(T)'$ est commutatif et dans ce cas seulement.*

En effet, si $\mu_T = 1$, $(T)'$ est commutatif parce qu'il est constitué de fonctions $\varphi(T)$ (*cf.* théorème 2). Inversement, si $(T)'$ est commutatif, on a $(T)' = (T)''$, et si de plus $\mu_T < \infty$, on a $(T)'' \subset \{\varphi(T)\}_{\varphi \in N_T}$ d'après ce qu'on vient d'énoncer; or la relation $(T)' \subset \{\varphi(T)\}_{\varphi \in N_T}$ entraîne $\mu_T = 1$ d'après le théorème 2.

Remarque. On ne sait pas encore s'il existe un T de classe C_0 avec $\mu_T = \infty$ et $(T)'$ commutatif.

Ouvrages cités

[1] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert* (Budapest, 1967); *Harmonic analysis of operators on Hilbert space* (Budapest, 1970).
[2] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, Opérateurs sans multiplicité, *Acta Sci. Math.*, **30** (1969), 1—18.
[3] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, Modèle de Jordan pour une classe d'opérateurs de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.*, **31** (1970), 91—115.
[4] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, Local characterization of operators of class C_0, *J. Functional Analysis* (to appear).
[5] D. Sarason, Generalized interpolation in H^∞, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **127** (1967), 179—203.
[6] M. J. Sherman, Invariant subspaces containing all analytic directions, *J. Functional Analysis*, **3** (1969), 164—173.

(Reçu le 28. mai 1970)