Zum globalen Saturationsproblem der Folge der Bernstein-operatoren

Von ROMAN SCHNABL in Wien (Austria)

G. G. LORENTZ [5] bestimmte 1963 die Saturationsklasse der Folge der Bernstein-operatoren. Im folgenden wird eine neue Methode zur Lösung dieses Problems angegeben. Sie beruht auf einer Modifizierung der Bernsteinoperatoren und auf der Verwendung der Theorie der stetigen Halbgruppen.

Bezeichnungen. Im folgenden bezeichne n eine natürliche Zahl, k eine nicht negative ganze Zahl, $C[0, 1]$ den Banachraum der auf $[0, 1]$ definierten, stetigen und reellen Funktionen, versehen mit der Supremumsnorm, und $C^{(k)}[0, 1]$ die Menge der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen aus $C[0, 1]$. Ferner sei $\mathrm{Lip}_M\, 1$ die Menge der Funktionen aus $C[0, 1]$, die auf $[0, 1]$ einer Lipschitzbedingung mit der Lipschitzkonstanten M genügen und Lip 1 die Vereinigung der Mengen $\mathrm{Lip}_M\, 1$, $M>0$. $\mathscr{P}_k$ ist der lineare Raum der Polynome höchstens k-ter Ordnung. Das n-te Bernsteinpolynom von f ist definiert durch $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$, und φ bezeichne im folgenden stets dir Funktion $\varphi(x) = \frac{1}{2}\, x(1-x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$.

Modifizierte Bernsteinoperatoren und zugeordnete Halbgruppe

Definition. Wir definieren durch

$$C_n(f) = \varphi^{-1} B_n(\varphi f)$$

den n-ten modifizierten Bernsteinoperator auf $C[0, 1]$.

Satz 1. *Die Folge* $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ *besitzt folgende Eigenschaften:*

(1.1) C_n *ist ein positiver, linearer Operator mit* $\|C_n\| = 1 - \dfrac{1}{n}$.

(1.2) $C_n(\mathscr{P}_k) \subseteqq \mathscr{P}_k$, $C_{k+2}(C[0,1]) \subseteqq \mathscr{P}_k$.

(1. 3) $C_n(1) = 1-\frac{1}{n}$, *und für* $y(t) \equiv t$ *gilt*

$$C_n(y)(x) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)x+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

$$C_n(y^2)(x) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)x^2+\frac{3}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)x+\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

(1. 4) $\lim_{n\to\infty} \|C_n(f)-f\| = 0,$ *für alle* $f\in C[0,1]$.

(1. 5) *Ist* $f\in C[0,1]$ *in* $x_0\in[0,1]$ *zweimal differenzierbar, dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} n\big(C_n(f)-f\big)(x_0) = (\varphi f)''(x_0).$$

Beweis. (1. 1)—(1. 3) folgt unmittelbar aus der obigen Definition und den entsprechenden Eigenschaften der Bernsteinpolynome [6]. (1. 4) folgt aus (1. 1) und (1. 3) nach dem Satz von BOHMAN—KOROVKIN [2], [4]. (1. 5) ist ein Satz vom Voronovskaja-Typ und folgt für $x_0\in(0, 1)$ aus dem Satz von VORONOVSKAJA für die Bernsteinpolynome [8]. Nach diesem Satz gilt $\lim_{n\to\infty} n\big(B_n(\varphi f)-\varphi f\big)(x_0) = \varphi(x_0)(\varphi f)''(x_0)$. Daraus folgt (1. 5), indem man mit $\varphi(x_0)^{-1}$ multipliziert. Für $x_0=0$ gilt $\lim_{n\to\infty} n\big(C_n(f)-f\big)(0) = \lim_{n\to\infty} n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)-f(0)\right) = f'(0)-f(0) = (\varphi f)''(0)$. Für $x_0=1$ schließt man analog.

Nach Satz 1 ist $\{C_n\}$ eine Folge von Approximationsoperatoren. Der folgende Satz zeigt, daß sie durch zwei Grenzwertsätze mit einer stetigen Halbgruppe von Operatoren verknüpft ist.

Satz 2. *Es existiert eine Familie* $\{W^t|0\leqq t\leqq\infty\}$ *von positiven, linearen Operatoren von* $C[0, 1]$ *in* $C[0, 1]$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(2. 1) $W^0 = I,\ W^\infty = 0,\ \|W^t\| = e^{-t},\ W^t(1) = e^{-t}$, *und für* $y(x)\equiv x$ *gilt*

$$W^t(y)(x) = e^{-3t}x+\frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t}),$$

$$W^t(y^2)(x) = e^{-6t}x^2+(e^{-3t}-e^{-6t})x+\frac{1}{10}(3e^{-t}-5e^{-3t}-2e^{-6t}).$$

(2. 2) $W^sW^t = W^{s+t}$ *für* $s, t\geqq 0$.

(2. 3) $\lim_{t\to 0+} \|W^t(f)-f\| = 0$ *für alle* $f\in C[0,1]$.

(2. 4) *Ist* $0\leqq\alpha\leqq\infty$ *und* $\{s(n)\}_{n=1}^\infty$ *eine Folge natürlicher Zahlen mit*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{n} = \alpha,\ \textit{dann gilt für } f\in C[0,1]\colon \lim_{n\to\infty}\|C_n^{s(n)}(f)-W^\alpha(f)\| = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{s(n)+1}(I+C_n+C_n^2+\cdots+C_n^{s(n)})(f)-\int_0^1 W^{\alpha t}(f)\,dt\right\|=0.$$

Beweis. Sei $0\leqq\alpha<\infty, f\in\mathscr{P}_k$, $D(f)=(\varphi f)''$ und $C_{n,k}=C_n|\mathscr{P}_k$ die Einschränkung von C_n auf $\mathscr{P}_k$. Dann gilt für $E_{n,k}=n(C_{n,k}-D)$ und $f\in\mathscr{P}_k$ nach (1. 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\|E_{n,k}(f)\|=0$. Da $\mathscr{P}_k$ endlichdimensional ist, folgt $\lim\limits_{n\to\infty}\|E_{n,k}\|=0$. Daraus folgt nach einem Satz des Verfassers ([7], Hilfssatz 1), $\lim\limits_{n\to\infty}\|C_{n,k}^{s(n)}-e^{\alpha D}\|=0$ und

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{s(n)+1}(I+C_{n,k}+\cdots+C_{n,k}^{s(n)})-\int_0^1 e^{\alpha tD}\,dt\right\|=0.$$

Damit ist (2. 2) und (2. 4) für $f\in\mathscr{P}_k$ mit $W^\alpha|\mathscr{P}_k=e^{\alpha D}$ gezeigt. Da mit C_n auch die Operatoren $e^{\alpha D}$ und $\int\limits_0^1 e^{\alpha tD}dt$ positive, lineare Operatoren sind und da

$$\|e^{\alpha D}\|\leqq\lim_{n\to\infty}\|C_{n,k}^{s(n)}\|\leqq\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{s(n)}=e^{-\alpha}$$

ist, existiert genau ein Operator W^α von $C[0, 1]$ in $C[0, 1]$ mit der Eigenschaft $W^\alpha|\mathscr{P}_k=e^{\alpha D}$. (2. 2) und (2. 4) folgt nun aus obigem durch Ausdehnung vom Raum der Polynome auf $C[0, 1]$. Für $\alpha=\infty$ folgt wegen $\|C_n^s\|\leqq\left(1-\frac{1}{n}\right)^s$ unmittelbar (2. 4) und $W^\infty=0$. (2. 1) errechnet man leicht aus (2. 4) und (1. 3). Mit dem Satz von BOHMAN—KOROVKIN ([2], [4]) folgt (2. 3) aus (2. 1).

Im folgenden Satz 3 werden der infinitesimale Erzeuger der Halbgruppe $\{W^t|t\geqq 0\}$ bestimmt und notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß für eine Funktion $f\in C[0, 1]$ ein globaler Satz von Voronovskaja-Typ gilt. Für den Beweis von Satz 3 benötigen wir folgenden Lemma:

Lemma. *Sei* $(J(g))(x)=\int\limits_0^x\left(\int\limits_0^u g(v)\,dv\right)du-x\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^u g(v)\,dv\right)du$ *und* $F_n(g)=$ $=n(C_n-I)(\varphi^{-1}J)(g)$ *für* $g\in C[0,1]$. *Dann gilt:*

(L 1) F_n *ist ein positiver, linearer Operator von* $C[0,1]$ *in* $C[0,1]$.

(L 2) $F_n(1)=1$, $\|F_n\|=1$, *und für* $y(x)\equiv x$ *gilt*

$$F_n(y)(x)=\left(1-\frac{2}{3n}\right)x+\frac{1}{3n},$$

$$F_n(y^2)(x)=\left(1-\frac{11}{6n}+\frac{1}{n^2}\right)x^2+\left(\frac{7}{6n}-\frac{1}{n^2}\right)x+\frac{1}{6n^2}.$$

(L 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\|F_n(g)-g\|=0$, *für alle* $g\in C[0,1]$.

Beweis. Ist $g \geqq 0$, dann ist $(J(g))'' = g \geqq 0$ und $J(g)(t) - J(g)(x) - (t-x) \cdot (J(g))'(x) \geqq 0$. Daraus folgt, indem man bei festgehaltenem x den n-ten Bernstein-operator B_n auf die letzte Ungleichung anwendet, $B_n(J(g)) - J(g) \geqq 0$. Daraus folgt unmittelbar $F_n(g) \geqq 0$. Damit ist (L1) gezeigt. (L2) errechnet man leicht aus (1. 3). (L3) folgt nun aus (L1) und (L2) nach dem Satz von BOHMAN—KOROVKIN [2], [4].

Satz 3. *Sei A mit dem Definitionsbereich $D(A)$ der infinitesimale Erzeuger der Halbgruppe $\{W^t | t \geqq 0\}$, und seien $f, g \in C[0, 1]$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(3. 1) $(\varphi f) \in C^{(2)}[0,1]$ *und* $(\varphi f)'' = g$.

(3. 2) $\lim\limits_{n \to \infty} \|n(C_n - I)(f) - g\| = 0$.

(3. 3) $\liminf\limits_{n \to \infty} \|n(C_n - I)(f) - g\| = 0$.

(3. 4) $f \in D(A)$ *und* $A(f) = g$.

Beweis. a) Sei (3. 1) erfüllt. Dann ist $\varphi^{-1} J(g) = f$ und aus dem obigen Lemma folgt (3. 2).

b) Aus (3.2) folgt unmittelbar (3.3).

c) Sei (3. 3) erfüllt und $\|n(C_n - I)(f) - g\| = z_n$. Dann ist $\liminf\limits_{r \to \infty} z_n = 0$, und es gilt, da $\|C_n\| \leqq 1$ ist:

$$\begin{aligned} &\|n(C_n^2 \quad - C_n)(f) - C_n(g)\| \leqq z_n, \\ &\|n(C_n^3 \quad - C_n^2)(f) - C_n^2(g)\| \leqq z_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\|n(C_n^{s+1} - C_n^s)(f) - C_n^s(g)\| \leqq z_n. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\|n(C_n^{s+1} - I)(f) - (I + C_n + C_n^2 + \cdots + C_n^s)(g)\| \leqq (s+1) z_n.$$

Sei nun $\alpha > 0$ fest gewählt und $s = s(n) = [\alpha n]$. Dann ist $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{s(n)}{n} = \alpha$ und

$$\liminf_{n \to \infty} \left\| \frac{n}{s(n)+1} (C_n^{s(n)+1} - I)(f) - \frac{1}{s(n)+1} (I + C_n + \cdots + C_n^{s(n)})(g) \right\| \leqq \liminf_{n \to \infty} z_n = 0.$$

Nach (2. 4) folgt daraus

$$\left\| \frac{1}{\alpha} (W^\alpha - I)(f) - \int_0^1 W^{\alpha t}(g)\, dt \right\| = 0 \quad \text{für alle} \quad \alpha > 0.$$

Daraus folgt nun ([3], Chap. 1) $f \in D(A)$ und $A(f) = g$, d.h. (3. 4).

d) Sei nun (3. 4) erfüllt, dann folgt aus dem Lemma und aus a)—c)

$$D(A) \supseteqq \{f \in C[0,1] | (\varphi f) \in C^{(2)}[0,1]\} \equiv \mathfrak{D}$$

und

$$A(\varphi^{-1}J(g)) = g \quad \text{für alle} \quad g \in C[0,1].$$

Damit ist A eine Abbildung von $\mathfrak{D}$ auf $C[0,1]$. Die Abbildung A ist eine eindeutige Abbildung, denn aus $A(f)=0$ folgt $W^t(f)=f$ für alle $t \geqq 0$ und daraus folgt $f=0$ wegen $\|f\| = \|W^t(f)\| \leqq e^{-t}\|f\|$. Daraus folgt $\mathfrak{D}=D$. Sei nun $f \in D(A)$ und $A(f)=g$. Dann folgt $(\varphi f) \in C^{(2)}[0,1]$ und $g = A(f) = A(\varphi^{-1}J((\varphi f)'')) = (\varphi f)''$, also (3. 1).

Damit ist Satz 3 bewiesen.

Bemerkung. Aus Teil c) des Beweises ergibt sich, daß in (3. 2) und (3. 3) die Normkonvergenz durch die schwache* Konvergenz ersetzt werden kann. Insbesondere folgt: Existiert eine Folge natürlicher Zahlen n_k mit $n_k \to \infty$ für $k \to \infty$ derart, daß die Folge $\{n_k(C_{n_k} - I)(f)\}$ schwach* gegen 0 konvergiert, dann ist $f \equiv 0$.

Aus Satz 3 folgt unmittelbar:

Folgerung 1. *$f \in C[0,1]$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} \|n(C_n - I)(f)\| = 0$ impliziert $f \equiv 0$.*

Folgerung 2. *Die Folge der Approximationsoperatoren $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist saturiert mit der Saturationsordnung $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. Die triviale Klasse besteht nur aus der Funktion $f \equiv 0$.*

Bestimmung der Saturationsklasse

Satz 4. *Sei A mit dem Definitionsbereich $D(A)$ der infinitesimale Erzeuger der Halbgruppe $\{W^t | t \geqq 0\}$, und $f \in C[0,1]$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(4. 1) $(\varphi f) \in C^{(1)}[0,1]$ *und* $(\varphi f)' \in \mathrm{Lip}_M 1$.

(4. 2) $|(\varphi f)(x+2h) - 2(\varphi f)(x+h) + (\varphi f)(x)| \leqq Mh^2$ *für alle Paare* (x,h) *für die* $x, x+2h \in [0,1]$.

(4. 3) $\|AC_n(f)\| \leqq \left(1 - \frac{1}{n}\right) M$ *für* $n = 1, 2, \ldots$.

(4. 4) $\liminf\limits_{n\to\infty} \|AC_n(f)\| \leqq M$.

(4. 5) $\|n(C_n - I)(f)\| \leqq M$.

(4. 6) $\liminf\limits_{n\to\infty} \|n(C_n - I)(f)\| \leqq M$.

(4. 7) $\|(W^t-I)(f)\| \leqq Mt$ *für alle* $t \geqq 0$.

(4. 8) *Es existiert eine Folge* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *mit* $f_n \in D(A)$, $\|A(f_n)\| \leqq M$ *für* $n=1, 2, \ldots$, *und* $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$.

Beweis. H. BERENS [1] bewies einen Saturationssatz für Folgen von paarweise kommutativen Approximationsoperatoren. Dieser Satz kann auf die Folge $\{C_n\}$, da die Operatoren C_n nicht paarweise kommutativ sind, nicht angewendet werden. Gewisse Teile des Beweises von H. BERENS, die die Kommutativität der Approximationsoperatoren nicht benützen, lassen sich aber übertragen. So sind die Einbeziehung von (4. 3) in den Satz 4 und die folgenden Beweisschritte d), g) durch den Beweis von H. BERENS angeregt.

a) Aus (4. 1) folgt mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, angewendet auf $(\varphi f)(x+h)-(\varphi f)(x)$, unmittelbar (4. 2).

b) Aus (4. 2) und $(B_n(g))'' = \left(1-\frac{1}{n}\right) n^2 B_{n-2}(\tilde{g})$ für $n=3, 4, \ldots,$ mit

$$\tilde{g}(x) = g\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)x+\frac{2}{n}\right) - 2g\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)x+\frac{1}{n}\right) + g\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)x\right), \quad 0 \leqq x \leqq 1,$$

und durch direktes Nachrechnen für $n=1, 2$ folgert man leicht (4. 3).

c) Aus (4. 3) folgt unmittelbar (4. 4).

d) Sei (4. 4) erfüllt. Dann gilt

$$\|n(C_n-I)(f)\| \leqq \|n(C_n-I)C_k(f)\| + \left\|n(C_n-I)(f-C_k(f))\right\| \leqq$$
$$\leqq \|n(C_n-I)(\varphi^{-1}JAC_k(f)\| + 2n\|f-C_k(f)\| =$$
$$= \left\|F_n(AC_k(f))\right\| + 2n\|f-C_k(f)\| \leqq \|F_n\|\,\|AC_k(f)\| + 2n\|f-C_k(f)\|.$$

Daraus folgt für $k\to\infty$, da $\|F_n\|=1$,

$$\|n(C_n-I)(f)\| \leqq \liminf_{k\to\infty} \|AC_k(f)\| \leqq M.$$

Damit ist (4. 5) gezeigt.

e) Aus (4. 5) folgt unmittelbar (4. 6).

f) Aus (4. 6) folgt (4. 7), indem man analog zu Teil c) des Beweises von Satz 3 schließt.

g) Sei (4. 7) erfüllt. Für $t>0$ sei $f_t = t^{-1}\int_0^t W^u(f)\,du$. Dann gilt

$$\lim_{s\to 0+} \frac{1}{s}(W^s-I)(f_t) = \frac{1}{t} \lim_{s\to 0+} \frac{1}{s} \int_0^t (W^{s+u}-W^u)(f)\,du =$$
$$= \frac{1}{t} \lim_{s\to 0+} \frac{1}{s} \int_0^s (W^{t+v}-W^v)(f)\,dv = \frac{1}{t}(W^t-I)(f).$$

Daraus folgt, daß $f_t \in D(A)$ und $A(f_t) = t^{-1}(W^t - I)(f)$. Da nun $\lim_{t\to\infty+} \|f_t - f\| = 0$ und $\|A(f_t)\| \leqq M$ ist, folgt (4. 8).

h) Sei (4. 8) erfüllt. Dann gilt mit geeignetem $R > 0$

$$\|(\varphi f_n)'\| \leqq \|A(f_n)\| + \|f_n\| < R.$$

Daraus folgt

$$|(\varphi f_n)(x+h) - (\varphi f_n)(x)| \leqq R|h| \quad \text{für} \quad x, x+h \in [0, 1],$$

und für $n \to \infty$

$$|(\varphi f)(x+h) - (\varphi f)(x)| \leqq R|h|.$$

Also ist (φf) absolut stetig und folglich existiert $(\varphi f)'(x)$ für fast alle $x \in [0, 1]$. Seien $x, x+h \in [0, 1]$ zwei Punkte, in denen $(\varphi f)'$ existiert. Dann gilt für hinreichend kleine t

$$|(\varphi f_n)(x+h+t) - (\varphi f_n)(x+h) - (\varphi f_n)(x+t) + (\varphi f_n)(x)| \leqq M|h|\,|t|,$$

und für $n \to \infty$

$$|(\varphi f)(x+h+t) - (\varphi f)(x+h) - (\varphi f)(x+t) + (\varphi f)(x)| \leqq M|h|\,|t|.$$

Für $t \to 0$ folgt daraus

$$|(\varphi f)'(x+h) - (\varphi f)'(x)| \leqq M|h|.$$

Es existiert also eine Funktion $g \in \mathrm{Lip}_M\, 1$ so, daß $g(x) = (\varphi f)'$ für fast alle $x \in [0, 1]$. Da nun (φf) eine Stammfunktion von g ist, folgt $(\varphi f) \in C^{(1)}[0, 1]$ und $g = (\varphi f)' \in \mathrm{Lip}_M\, 1$. Damit ist (4. 1), und Satz 4 vollständig bewiesen.

Folgerung 3. *Die Saturationsklasse der Folge der Approximationsoperatoren* $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ist identisch mit der Saturationsklasse der Halbgruppe* $\{W^t | t \geqq 0\}$, *nämlich die Funktionenklasse* $\{f \in C[0, 1] \,|\, (\varphi f) \in C^{(1)}[0, 1]$ und $(\varphi f)' \in \mathrm{Lip}\, 1\}$.

Beweis des Satzes von G. G. Lorentz

Satz 5 (G. G. Lorentz [5]). *Sei* $f \in C[0, 1]$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(5. 1) $f \in C^{(1)}[0, 1]$ *und* $f' \in \mathrm{Lip}_M\, 1$.

(5. 2) $|n(B_n - I)(f)(x)| \leqq \frac{1}{2} x(1-x) M, \quad 0 \leqq x \leqq 1, \quad n = 1, 2, \ldots .$

Beweis: a) Sei (5. 1) erfüllt. Dann erfüllt

$$g(x) = \frac{f(x) - (1-x)f(0) - xf(1)}{\varphi(x)}$$

die Bedingung (4. 1). Daraus folgt (4. 5) und, indem man mit φ multipliziert, auch (5. 2).

b) Sei (5. 2) erfüllt. Ist g wie in a) erklärt, dann gilt

$$\|\varphi^{-1}B_n(\varphi g)-g\| \leqq Mn^{-1} \quad \text{für} \quad n=1, 2, \dots .$$

Daraus folgt $g \in C[0, 1]$ und $\|n(C_n-I)(g)\| \leqq M$. Also ist für g (4. 5) erfüllt und daher auch (4. 1). Daraus folgt nun (5. 1). Damit ist Satz 5 bewiesen.

Literatur

[1] H. Berens, Interpolationsmethoden zur Behandlung von Approximationsprozessen auf Banach räumen, *Lecture Notes in Math.*, **64** (Berlin, 1968).

[2] H. Bohmann, On approximation of continuous and of analytic functions, *Ark. Mat.*, **2** (1952), 43—57.

[3] P. L. Butzer—H. Berens, *Semi-groups of operators and approximation* (Berlin, 1967).

[4] P. P. Korovkin, *Linear operators and approximation theory* (Delhi, 1960).

[5] G. G. Lorentz, Inequalities and the saturations clases of Bernstein polynomials, *On Approximation Theory*, Proc. Oberwolfach (Basel, 1964), 200—207.

[6] G. G. Lorentz, *Bernstein polynomials* (Toronto, 1953).

[7] R. Schnabl, Zum Saturationsproblem der verallgemeinerten Bernsteinoperatoren, *Abstract spaces and approximation*, Proc. Oberwolfach (Basel, 1969), 281—289.

[8] E. Voronovskaja, Détermination de la forme asymptotique des fonctions par les polynômes de M. Bernstein, *Doklady AN SSSR*, **4** (1932), 79—85.

(Eingegangen am 15. September 1969)