Über die unbedingte Konvergenz der Orthogonalreihen

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

1. In der Arbeit [5] haben wir eine notwendige und hinreichende Bedingung für die unbedingte Konvergenz der Orthogonalreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

angegeben, wobei $\{a_n\}$ eine reelle Koeffizientenfolge und $\{\varphi_n(x)\}$ ein orthonormiertes Funktionensystem (kurz ONS) ist; in Folgendem — wenn es nichts anderes gesagt wird — nehmen wir für das Orthogonalitätsintervall immer das Intervall (0, 1). Die Reihe (1) konvergiert fast überall unbedingt, wenn sie in jeder Anordnung

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{n(l)} \varphi_{n(l)}(x) \tag{2}$$

fast überall konvergiert (die Menge der Divergenzpunkte kann von der Anordnung abhängen, darum folgt aus der „unbedingten Konvergenz fast überall" die „absolute Konvergenz fast überall" nicht).

Zur Abfassung des erwähnten Resultates bilden wir die Summe

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=\nu(k)+1}^{\nu(k+1)} a_n^{*2} \log^2 n \right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei $\nu(k) = 2^{2^k}$ $(k = 0, 1, \dots)$ ist, und $\{a_n^*\}$ eine derartige Anordnung der Folge $\{a_n\}$ bezeichnet, für die $|a_1^*| \geqq \dots \geqq |a_n^*| \geqq \dots$ gilt. (Ist $\{a_n\} \in l^2$, d.h. gilt $\Sigma a_n^2 < \infty$, dann existiert eine solche im absoluten Betrag monoton abnehmende Anordnung; im Falle $\{a_n\} \notin l^2$ soll man $S = \infty$ setzen. Es ist möglich, daß für eine Folge $\{a_n\}$ verschiedene solche Anordnungen existieren; für verschiedene solche Anordnungen sind aber die Werte S dieselben.) Die erwähnte Bedingung lautet folgenderweise.

A. *Dafür, daß die Reihe* (1) *für jedes* ONS $\{\varphi_n(x)\}$ *fast überall unbedingt konvergiert, ist* $S < \infty$ *notwendig und hinreichend.*

Die Notwendigkeit der Bedingung $S<\infty$ ergibt sich aus der folgenden Behaptung.

B. *Ist* $S=\infty$, *dann gibt es ein ONS* $\{\Phi_n(x)\}$ *derart, daß die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x) \tag{3}$$

in gewisser Anordnung ihrer glieder fast überall divergiert.

2. Der Beweis dieser Behauptung geht mit einer direkten Konstruktion, und das entsprechende ONS ist unbeschränkt. In dieser Arbeit werden wir zeigen, daß in dieser Behauptung das ONS $\{\Phi_n(x)\}$ beschränkt angewählt werden kann. Genauer zeigen wir den folgenden Satz.

Satz I. *Es sei* $K>1$. *Ist* $S=\infty$, *dann gibt es ein* ONS $\{\Phi_n(x)\}$ *mit*

$$|\Phi_n(x)| \leqq K \qquad (0 \leqq x \leqq 1;\ n=1,2,\ldots) \tag{4}$$

derart, daß die Reihe (3) *in gewisser Anordnung ihrer Glieder in* (0, 1) *fast überall divergiert.*

Ein Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ mit der Eigenschaft (4) nennen wir ein *K-beschränktes* System.

Da nach der Behauptung *A* aus $S<\infty$ folgt, daß die Reihe (1) für jedes ONS $\{\Phi_n(x)\}$ fast überall unbedingt konvergiert, erhalten wir nun unmittelbar auch den folgenden Satz.

Satz II. *Es sei* $K>1$. *Dafür, daß die Reihe* (1) *für jedes K-beschränkte* ONS $\{\varphi_n(x)\}$ *fast überall unbedingt konvergiert, ist* $S<\infty$ *notwendig und hinreichend.*

Die allen ONS-e und die K-beschränkten ONS-e verhalten sich also vom Gesichtspunkt der unbedingten Konvergenz ähnlicherweise. Für den Fall der gewöhnlichen Konvergenz wurde es auf diese Erscheinung mehrmals aufmerksam gemacht (s. [2], [4], [8]).

Aus dem Satz II und aus der Behauptung *A* ergibt sich z. B. folgendes. *Ist die Reihe* (1) *für jedes* $K(>1)$*-beschränkte* ONS $\{\varphi_n(x)\}$ *fast überall unbedingt konvergent, dann konvergiert die Reihe* (1) *auch für jedes ONS fast überall unbedingt.*

Es soll betont werden, daß für den Fall $K=1$ der Satz I noch nicht bewiesen ist. Für 1-beschränkte, oder m.a.W. vorzeichensartige ONS-e anstatt des Satzes I ist nur ein schwächeres Resultat bekannt [9]. Da für vorzeichensartige ONS-e konnte man bisher auch die hinreichende Bedingung $S<\infty$ nicht abschwächen, ist also die „genaue" Bedingung der unbedingten Konvergenz für die Entwicklungen nach vorzeichensartigen ONS-en noch unbekannt.

Der originallen Beweis der Behauptung B ist sehr kompliziert und langwierig. Den stärkeren Satz I werden wir im Folgenden ziemlich einfacher beweisen.

3. Der Beweis des Satzes I beruht auf einem Hilfssatz. Im Folgenden bezeichnen $A_1, A_2, \ldots$ positive, absolute Konstante und $C_1(K), C_2(K), \ldots$ nur von K abhängige positive Konstante. Eine Funktion nennen wir Treppenfunktion in einem Intervall I, wenn es eine Zerlegung von I in endlich viele Teilintervalle derart gibt, daß die Funktion in jedem Teilintervall konstant ist; eine Menge nennen wir einfach, wenn sie die Vereinigung endlichvieler Intervalle ist. Das Lebesguesche Maß einer meßbaren Menge H bezeichnen wir mit $m(H)$. Unter log verstehen wir im Folgenden den Logarithmus mit der Basis 2. Der erwähnte Hilfssatz lautet folgenderweise.

Hilfssatz I. *Es seien $K>1$, $(C_0(K)\leqq)k_1<k_2$ ganze Zahlen (die positive nur von K abhängige ganze Zahl $C_0(K)$ wird später bestimmt) und*

$$\{a_n\} \quad (n=\nu(k_1)+1, \ldots, \nu(k_2))$$

eine im absoluten Betrag monoton abnehmende Folge. Dann gibt es ein K-beschränktes ONS von Treppenfunktionen $\psi_n^*(x)$ $(n=\nu(k_1)+1, \ldots, \nu(k_2))$ und eine einfache Menge $E^*(\subseteqq(0,1))$ mit $m(E^*)\geqq C_1(K)$ derart, daß die Summe $\sum_{n=\nu(k_1)+1}^{\nu(k_2)} a_n\psi_n^*(x)$ eine Anordnung $\sum_{l=1}^{\nu(k_2)-\nu(k_1)} a_{m(l)}\psi_{m(l)}^*(x)$ besitzt, für die

$$\max_{1\leqq\lambda\leqq\nu(k_2)-\nu(k_1)} \left|\sum_{l=1}^{\lambda} a_{m(l)}\psi_{m(l)}^*(x)\right| \geqq \tag{5}$$

$$\geqq C_2(K)\sum_{k=k_1}^{k_2}\left(a_{\nu(k)+1}^2+\sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)} a_{\nu(k)+l}^2\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (x\in E^*)$$

erfüllt ist.

4. Für eine Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ bilden wir die „Norm”

$$\|\{a_n\};\infty\|^* = \sup_P \sup_{\{\varphi_n\}}\left\{\int_0^1\left(\sup_{1\leqq i\leqq j}(a_i\varphi_i(x)+\cdots+a_j\varphi_j(x))^2\right)dx\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$=\lim_{N\to\infty}\max_P\sup_{\{\varphi_n\}}\left\{\int_0^1\left(\max_{1\leqq i\leqq j\leqq N}(a_i\varphi_i(x)+\cdots+a_j\varphi_j(x))^2\right)dx\right\}^{\frac{1}{2}},$$

wobei $\sup_P$, bzw. $\max_P$ bedeutet, daß das Supremum, bzw. das Maximum des entsprechenden Ausdruckes für jede Anordnung der Folge $\{a_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$, bzw. der Folge $\{a_n\}$ $(n=1,\ldots,N)$ gebildet ist, weiterhin $\sup_{\{\varphi_n\}}$ bedeutet, das das Supremum des entsprechenden Ausdruckes für jedes ONS $\{\varphi_n(x)\}$ gebildet ist.

Es sei $K \geqq 1$. Für eine Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ können wir auch eine andere „Norm" bilden:

$$\|\{a_n\}; K\|^* = \sup_P \sup_{|\varphi_n| \leqq K} \left\{ \int_0^1 \Big(\sup_{1 \leqq i \leqq j} (a_i \varphi_i(x) + \cdots + a_j \varphi_j(x))^2 \Big) dx \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \max_P \sup_{|\varphi_n| \leqq K} \left\{ \int_0^1 \Big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} (a_i \varphi_i(x) + \cdots + a_j \varphi_j(x))^2 \Big) dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

wobei $\sup\limits_{|\varphi_n| \leqq K}$ bedeutet, daß das Supremum für jedes K-beschränkte ONS $\{\varphi_n(x)\}$ gebildet wird. Offensichtlich gilt

$$\|\{a_n\}; K\|^* \leqq \|\{a_n\}; \infty\|^*. \tag{6}$$

Für eine Koeffizintenfolge $\{a_n\}$ setzen wir weiterhin

$$S_1 = |a_1^*| + |a_2^*| + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=\nu(k)+1}^{\nu(k+1)} a_n^{*2} \log^2 n \right)^{\frac{1}{2}}$$

(zur Definition von dieser Grösse siehe die Bemerkung nach der Definition von S). In der Arbeit [7] haben wir

$$A_1 S_1 \leqq \|\{a_n\}; \infty\|^* \leqq A_2 S_1 \tag{7}$$

bewiesen.

Nun beweisen wir die Ungleichung

$$\|\{a_n\}; K\|^* \geqq C_3(K) S_1 \qquad (K > 1). \tag{8}$$

Darum einführen wir einige Bezeichnungen. Für eine Funktion $f(x)$ und für ein endliches Intervall $I = (a, b) \big(\subseteqq (0, 1) \big)$ setzen wir

$$f(I; x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right) & (a < x < b), \\ 0 & \text{sonst}; \end{cases}$$

weiterhin für eine Menge H $\big(\subseteqq (0, 1) \big)$ bezeichnet $H(I)$ diejenige Untermenge von (a, b), die aus H mit der linearen Transformation $y = (b-a)x + a$ entsteht. Aus dem Hilfssatz I folgt

Hilfssatz I'. *Es seien $K > 1$, $k_0 \big(\geqq C_0(K) \big)$ eine ganze Zahl und*

$$\{a_n\} \; (n = 1, \ldots, \nu(k_0))$$

eine im absoluten Betrag monoton abnehmende Folge. Dann gibt es ein K-beschränktes ONS von Treppenfunktionen $\psi_n(x)$ $\big(n = 1, \ldots, \nu(k_0)\big)$ und eine einfache Menge

$E(\subseteqq(0,1))$ mit $m(E)\geqq C_4(K)$ derart, daß die Summe $\sum_{n=1}^{\nu(k_0)} a_n\psi_n(x)$ eine Anordnung $\sum_{l=1}^{\nu(k_0)} a_{n(l)}\psi_{n(l)}(x)$ besitzt, für die

$$\max_{1\leqq\lambda\leqq\nu(k_0)} \sum_{l=1}^{\lambda} a_{n(l)}\psi_{n(l)}(x) \geqq \tag{9}$$

$$\geqq C_5(K)\left(|a_1|+|a_2|+\sum_{k=0}^{k_0-1}\left(a_{\nu(k)+1}^2+\sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)} a_{\nu(k)+l}^2\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}}\right) \qquad (x\in E)$$

erfüllt ist.

Beweis des Hilfssatzes I'. Wir setzen $\psi_n(x) = \operatorname{sign} a_n\cdot r_n(x)$

$$\big(r_n(x)=\operatorname{sign}\sin 2^n\pi x;\quad n=1,\ldots,\nu(C_0(K))\big).$$

Es ist

$$\sum_{n=1}^{\nu(C_0(K))} a_n\psi_n(x) = \sum_{n=1}^{\nu(C_0(K))} |a_n| \qquad \big(x\in(0,\,1/2^{\nu(C_0(K))})\big). \tag{10}$$

Wir wenden den Hilfssatz I für die Folge $\{a_n\}$ $\big(n=\nu(C_0(K))+1,\ldots,\nu(k_0)\big)$ im Falle $k_1=C_0(K)$, $k_2=k_0$ an. Dann ergibt sich ein K-beschränktes ONS von Treppenfunktionen $\psi_n^*(x)$ $\big(n=\nu(C_0(K))+1,\ldots,\nu(k_0)\big)$, eine einfache Menge $E^*(\subseteqq(0,1))$ mit $m(E^*)\geqq C_1(K)$ derart, daß die Summe $\sum_{n=\nu(C_0(K))+1}^{\nu(k_0)} a_n\psi_n^*(x)$ eine Anordnung $\sum_{l=1}^{\nu(k_0)-\nu(C_0(K))} a_{m(l)}\psi_{m(l)}^*(x)$ besitzt, für die

$$\max_{1\leqq\lambda\leqq\nu(k_0)-\nu(C_0(K))} \sum_{l=1}^{\lambda} a_{m(l)}\psi_{m(l)}^*(x) \geqq \tag{11}$$

$$\geqq C_2(K)\sum_{k=C_0(K)}^{k_0-1}\left(a_{\nu(k)+1}^2+\sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)} a_{\nu(k)+l}^2\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (x\in E^*)$$

erfüllt wird. Wir setzen

$$\psi_n(x) = \sum_{s=1}^{2^{\nu(C_0(K))}} \psi_n^*\left(\left(\frac{s-1}{2^{\nu(C_0(K))}},\ \frac{s-1}{2^{\nu(C_0(K))}}+\frac{1}{2^{\nu(C_0(K))+1}}\right);x\right)-$$

$$-\sum_{s=1}^{2^{\nu(C_0(K))}} \psi_n^*\left(\left(\frac{s-1}{2^{\nu(C_0(K))}}+\frac{1}{2^{\nu(C_0(K))+1}},\ \frac{s}{2^{\nu_0(C(K))}}\right);x\right)$$

$\big(n=\nu(C_0(K))+1,\ldots,\nu(k_0)\big)$. Offensichtlich bilden die Treppenfunktionen $\psi_n(x)$ $\big(n=1,\ldots,\nu(k_0)\big)$ ein K-beschränktes ONS. Es sei $E=E^*\big((0,1/2^{\nu(C_0(K))+1})\big)$; E ist einfach, und gilt $m(E)=m(E^*)/2^{\nu(C_0(K))+1}\geqq C_4(K)$ auf Grund des Hilfssatzes I. Wir definieren eine Anordnung der Folge $1,\ldots,\nu(k_0)$; es sei $n(l)=l$

$(l=1, \ldots, \nu(C_0(K)))$, $n(l) = m(l-\nu(C_0(K)))$ $(l = \nu(C_0(K))+1, \ldots, \nu(k_0))$. Aus (10) und (11) folgt

$$(12)\qquad \max_{1\leqq\lambda\leqq\nu(k_0)} \sum_{l=1}^{\lambda} a_{n(l)}\psi_{n(l)}(x) \geqq$$

$$\geqq C_6(K)\left(\sum_{n=1}^{\nu(C_0(K))}|a_n| + \sum_{k=C_0(K)}^{k_0-1}\left(a^2_{\nu(k)+1} + \sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)} a^2_{\nu(k)+l}\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}}\right) \qquad (x\in E).$$

Durch einfacher Rechnung erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\nu(C_0(K))}|a_n| + \sum_{k=C_0(K)}^{k_0-1}\left(a^2_{\nu(k)+1} + \sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)} a^2_{\nu(k)+l}\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}} \geqq$$

$$\geqq C_7(K)\left(|a_1|+|a_2|+\sum_{k=0}^{k_0-1}\left(\sum_{n=\nu(k)+1}^{\nu(k+1)} a_n^2\log^2 n\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

und so aus (12) ergibt sich (9).

Aus dem Hilfssatz I′ erhalten wir (8) unmittelbar. Aus (6), (7) und (8) folgt

$$(3)\qquad C_3(K)S_1 \leqq \|\{a_n\}; K\|^* \leqq A_2 S_1 \qquad (K>1).$$

Eine ähnliche genaue Abschätzung für $\|\{a_n\}; K\|^*$ ist im Falle $K=1$ noch nicht bekannt (s. die Bemerkung in 2). Nach (7) und (13) haben also $\|\{a_n\}; \infty\|^*$ und $\|\{a_n\}; K\|^*$ $(K>1)$ dieselbe „Grössenordnung". Diese Tatsache spricht der folgende, aus (6), (7) und (13) sich ergebende Satz aus.

Satz III. *Ist $K>1$, dann besteht für jede Koeffizientenfolge $\{a_n\}$*

$$C_8(K)\sup_P\sup_{\{\varphi_n\}}\int_0^1\left(\sup_{1\leqq i\leqq j}(a_i\varphi_i(x)+\cdots+a_j\varphi_j(x))^2\right)dx \leqq$$

$$\leqq \sup_P\sup_{|\varphi_n|\leqq K}\int_0^1\left(\sup_{1\leqq i\leqq j}(a_i\varphi_i(x)+\cdots+a_j\varphi_j(x))^2\right)dx \leqq$$

$$\leqq \sup_P\sup_{\{\varphi_n\}}\int_0^1\left(\sup_{1\leqq i\leqq j}(a_i\varphi_i(x)+\cdots+a_j\varphi_j(x))^2\right)dx.$$

5. Zum Beweis des Hilfssatzes I soll es einige Vorbereitungen vorausschicken. In der Arbeit [8] haben wir für eine Koeffizientenfolge $\{b_n\}$ noch eine weitere „Norm" definiert.

Es sei $K\geqq 1$. Für eine endliche Folge $\{b_n\}$ $(n=p, \ldots, q;\ 1\leqq p\leqq q)$ setzen wir die Funktion

$$I(b_p, \ldots, b_q; K) = \sup_{|\varphi_n|\leqq K}\int_0^1\left(\max_{p\leqq i\leqq j\leqq q}(b_i\varphi_i(x)+\cdots+b_j\varphi_j(x))^2\right)dx,$$

und für eine beliebige Folge $\{b_n\}$ sei

$$\|\{b_n\}; K\| = \sup \sum_{k=0}^{\infty} I^{\frac{1}{2}}(b_{\mu(k)+1}, \ldots, b_{\mu(k+1)}; K),$$

wobei das Supremum für jede unendliche Indexfolge $(0=)\mu(0)<\cdots<\mu(k)<\cdots$ gebildet wird.

Wir haben bewiesen, daß im Falle $\|\{b_n\}; K\|<\infty$

$$\|\{b_n\}; K\| = \lim_{N\to\infty} I^{\frac{1}{2}}(b_1, \ldots, b_N; K)$$

gilt. (Siehe [8], S. 135.) Da für eine endliche Folge $\{b_n\}$ $(n=1, \ldots. N)$ $\|\{b_n\}; K\|<\infty$ offensichtlich besteht, ergibt sich also

$$\|\{b_n\}_1^N; K\| = I^{\frac{1}{2}}(b_1, \ldots, b_N; K). \tag{14}$$

Weiterhin wurde die folgende Behauptung gezeigt ([8], Satz II): Ist $K>1$ und $|b_1|\geqq\cdots\geqq|b_n|\geqq\cdots$, dann besteht

$$C_9(K)\left(b_1^2+\sum_{n=2}^{\infty} b_n^2\log^2 n\right)^{\frac{1}{2}} < \|\{b_n\}; K\|. \tag{15}$$

Aus (14) und (15) ergibt sich also:

Hilfssatz II. *Ist $K>1$, und gilt $|b_1|\geqq\cdots\geqq|b_N|$, dann besteht*

$$\sup_{|\varphi_n|\leqq K}\left\{\int_0^1 \left(\max_{1\leqq i\leqq N}(b_1\varphi_1(x)+\cdots+b_i\varphi_i(x))^2\right)dx\right\}^{\frac{1}{2}} > \tag{16}$$
$$> C_{10}(K)\left(b_1^2+\sum_{l=2}^{N} b_l^2\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (C_{10}(K)<1).$$

Hilfssatz III. *Es seien $K>1$ und $\{b_n\}$ $(n=1, \ldots, N)$ eine Zahlenfolge. Dann gibt es ein K-beschränktes ONS von Treppenfunktionen $\psi_n(x)$ $(n=1, \ldots, N)$ und eine einfache Menge $G(\subseteqq(0,1))$ mit $m(G)\geqq C_{11}(K)$ derart, daß*

$$\max_{1\leqq i\leqq N}\sum_{n=1}^{i} b_n\psi_n(x) > A_3 I^{\frac{1}{2}}(b_1, \ldots, b_N; K) \qquad (x\in G;\quad A_3<1)$$

erfüllt wird.

Beweis des Hilfssatzes III. Mit einer in der Arbeit [8] angewandten Methode bekommen wir ein K-beschränktes ONS von Treppenfunktionen $\chi_n(x)$ $(n=1, \ldots, N)$, für welches

$$A = \left\{\int_0^1 \left(\max_{1\leqq i\leqq N}(b_1\chi_1(x)+\cdots+b_i\chi_i(x))^2\right)dx\right\}^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2} I^{\frac{1}{2}}(b_1, \ldots, b_N; K) \tag{17}$$

gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir

$$A=\sqrt{2} \tag{18}$$

annehmen; im entgegengesetzten Falle beweisen wir nähmlich den Hilfssatz III für die Folge $\{\sqrt{2}b_n/A\}$, woraus die Behauptung auch für die Folge $\{b_n\}$ sich ergibt. Weiterhin, auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir

$$F(x)=\max_{1\le i\le N}|b_1\chi_1(x)+\dots+b_i\chi_i(x)|=\max_{1\le i\le N}(b_1\chi_1(x)+\dots+b_i\chi_i(x)) \tag{19}$$

annehmen. Im entgegengesetzten Falle betrachten wir das System $\chi_n^{(0)}(x)=\chi_n(x)G(x)$ $(n=1,\dots,N)$, wobei $G(x)$ folgenderweise definiert ist: es sei $i(x)$ die kleinste positive ganze Zahl, für die

$$\max_{1\le i\le N}|b_1\chi_1(x)+\dots+b_i\chi_i(x)|=|b_1\chi_1(x)+\dots+b_{i(x)}\chi_{i(x)}(x)|$$

gilt, und wir setzen

$$G(x)=\operatorname{sign}(b_1\chi_1(x)+\dots+b_{i(x)}\chi_{i(x)}(x)).$$

Da die Funktionen $\chi_n(x)$ Treppenfunktionen sind, sind auch die Funktionen $\chi_n^{(0)}(x)$ dieselben. Diese Funktionen bilden offensichtlich ein K-beschränktes ONS, und für diese bestehen schon (17) und (19).

Da die Funktionen $\chi_n(x)$ Treppenfunktionen sind, gibt es eine Zerlegung von $(0,1)$ auf endlich viele Intervalle $J_1,\dots,J_\varrho$ derart, daß jede Funktion $\chi_n(x)$ in jedem J_r konstant ist. Den Wert von $F(x)$ im Intervall $J_r=(a_r,\bar{a}_r)$ bezeichnen wir mit w_r $(r=1,\dots,\varrho)$. Aus (17) und (18) folgt

$$\sum_{r=1}^{\varrho} w_r^2 m(J_r)=2. \tag{20}$$

Es seien $(1\le)r_1<\dots<r_k(\le\varrho)$ diejenige Indizes $(1\le r\le\varrho)$, für die $w_r\ge 1$ gilt; die übrigen Indizes r $(1\le r\le\varrho)$ bezeichnen wir mit $s_1<\dots<s_\varkappa$. Aus (20) erhalten wir

$$\sum_{l=1}^{\varkappa} m(J_{s_l})\le 1,\quad (2\ge)\sum_{l=1}^{k} w_{r_l}^2 m(J_{r_l})>1. \tag{21}$$

Wir setzen

$$u_l=\sum_{p=1}^{l} w_{r_p}^2 m(J_{r_p})\qquad (l=0,\dots,k),$$

$$u_{k+l}=u_k+\sum_{p=1}^{l} m(J_{s_p})\qquad (l=1,\dots,\varkappa),$$

$$\bar{\chi}_n(x)=\begin{cases} w_{r_l}^{-1}\chi_n((x-u_{l-1})/w_{r_l}^2+a_{r_l}) & (x\in(u_{l-1},u_l);\ l=1,\dots,k),\\ \chi_n(x-u_l+a_{s_l}) & (x\in(u_l,u_{l+1});\ l=k,\dots,k+\varkappa-1),\end{cases}$$

$(n=1, \ldots, N)$. Offensichtlich bilden die Treppenfunktionen $\bar{\chi}_n(x)$ $(n=1, \ldots, N)$ ein K-beschränktes ONS im Intervall $(0, u_{k+\varkappa})$, weiterhin gilt nach (17) und (18)

$$\max_{1 \leq i \leq N} \left(b_1 \bar{\chi}_1(x) + \cdots + b_i \bar{\chi}_i(x)\right) = 1 (= A/\sqrt{2}) \qquad (x \in (0, u_k)). \tag{22}$$

Es sei nun $D(K)$ diejenige positive Zahl, für die

$$D^{-1}(K) u_{k+\varkappa}^{-1} + \left(1 - D^{-1}(K)\right) K^2 = 1 \tag{23}$$

besteht. Offensichtlich hat dieser von K, aber auch von der Folge $\{b_n\}$ und von dem System $\{\chi_n(x)\}$ abhängige Wert eine nur von K abhängige obere Schranke:

$$(1 <) D(K) \leq C_{12}(K). \tag{24}$$

Wir setzen

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \bar{\chi}_n(D(K) u_{k+\varkappa} x) & (x \in (0, D^{-1}(K))), \\ K r_n((x - D^{-1}(K))/(1 - D^{-1}(K))) & (x \in (D^{-1}(K), 1)) \end{cases}$$

$(n=1, \ldots, N)$. Nach (23) bilden diese Treppenfunktionen ein K-beschränktes ONS. Da nach (21) $u_{k+\varkappa} < 3$ ist, folgt es aus (17), (22) und (24), daß alle Erforderungen des Hilfssatzes III mit $G = (0, 1/3D(K))$ und $A_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ erfüllt sind.

Hilfssatz IV. *Unter der Bedingung des Hilfssatzes III gibt es ein K-beschränktes ONS von Treppenfunktionen $\psi_n(x)$ $(n=1, \ldots, N)$, Indizes $(1 \leq) i(1) \leq \cdots \leq i(N) (\leq N)$ und paarweise disjunkte, einfache Mengen $E_l(\subseteq (0, 1))$ mit $m(E_l) = C_{11}(K)/16N$ $(l=1, \ldots, N)$ und*

$$\sum_{n=1}^{i(l)} b_n \psi_n(x) > A_3 I^{\frac{1}{2}}(b_1, \ldots, b_N; K) \qquad (x \in E_l; \quad l=1, \ldots, N),$$

wobei A_3 und $C_{11}(K)$ die Konstanten im Hilfssatz III sind.

Beweis des Hilfssatzes IV. Wir brauchen die Bezeichnungen vom Hilfssatz III. Es sei $G'(\subseteq G)$ eine einfache Menge mit $m(G') = C_{11}(K)$. Weiterhin bezeichnen wir mit E'_i die Menge derjenigen Punkte $x(\in G')$, für die $i(x) = i$ besteht $(i=1, \ldots, N)$. Es seien $(1 \leq) j(1) < \cdots < j(\nu) (\leq N)$ diejenige Indizes i, für die $m(E'_i) \geq$ $\geq C_{11}(K)/2N$ gilt. Dann ist

$$\sum_{l=1}^{\nu} m(E'_{j(l)}) \geq C_{11}(K)/2,$$

und gibt es positive ganze Zahlen $\bar{\alpha}_l$ mit

$$\bar{\alpha}_l C_{11}(K)/2N \leq m(E'_{j(l)}) < (\bar{\alpha}_l + 1) C_{11}(K)/2N \qquad (l=1, \ldots, \nu).$$

Es sei $E''_{j(l)}$ eine einfache Untermenge von $E'_{j(l)}$ mit $m(E''_{j(l)}) = \bar{\alpha}_l C_{11}(K)/2N$ $(l=1, \ldots, \nu)$. Dann gilt

$$\sum_{l=1}^{\nu} m(E''_{j(l)}) = \frac{C_{11}(K)}{4N} \sum_{l=1}^{\nu} 2\bar{\alpha}_l \geqq C_{11}(K)/4.$$

Nach Verminderung gewisser $2\bar{\alpha}_l$ erhalten wir positive ganze Zahlen α_l $(l=1, \ldots, N)$ mit $\alpha_1 + \cdots + \alpha_\nu = N$. Es sei $\bar{E}_{j(l)}$ eine einfache Untermenge von $E''_{j(l)}$ mit $m(\bar{E}_{j(l)}) = \alpha_l C_{11}(K)/16N$ $(l=1, \ldots, N)$. Wir teilen die Menge $\bar{E}_{j(l)}$ in α_l einfache Untermenge vom Mass $C_{11}(K)/16N$ $(l=1, \ldots, \nu)$ ein; die soeben sich ergebenden Mengen bezeichnen wir mit E_l $(l=1, \ldots, N)$. Offensichtlich werden die Behauptungen des Hilfssatzes IV mit gewissen $i(l)$ erfüllt.

Hilfssatz V. *Es sei $K>1$, $\{b_n\}$ $(n=1, \ldots, N)$ eine Zahlenfolge mit $|b_1| \geqq \cdots \geqq |b_N|$ und*

$$\sqrt{C_{11}(K)/2}\, C_{10}(K) A_3 \left(b_1^2 + \sum_{n=2}^{N} b_n^2 \log^2 n\right)^{\frac{1}{2}} \Big/ 2 \geqq \left(\sum_{n=1}^{N} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{25}$$

wobei $C_{10}(K)$ die Konstante im Hilfssatz II, A_3 und $C_{11}(K)$ aber die Konstanten im Hilfssatz III bedeuten. Dann gibt es ein K-beschränktes ONS von Treppenfunktionen $\psi_n(x)$ $(n=1, \ldots, N)$. Indizes $(1 \leqq) i(1), \ldots, i(2N) (\leqq N)$ und eine Zerlegung des Intervalls $(0, C_{11}(K)/8)$ auf paarweise disjunkte Intervalle $I_1, \ldots, I_{2N}$, für die

$$\int_0^{C_{11}(K)/8} \psi_n(x)\,dx = 0, \qquad \int_{C_{11}(K)/8}^{1} \psi_n(x)\,dx = 0 \qquad (n=1, \ldots, N), \tag{26}$$

$$m(I_m) = C_{11}(K)/16N \qquad (m=1, \ldots, 2N), \tag{27}$$

und

$$b_1\psi_1(x) + \cdots + b_{i(m)}\psi_{i(m)}(x) > C_{13}(K)\left(b_1^2 + \sum_{n=2}^{N} b_n^2 \log^2 n\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$(x \in I_m;\quad m=1, \ldots, N),$$

$$b_{i(m)}\psi_{i(m)}(x) + \cdots + b_N\psi_N(x) > C_{13}(K)\left(b_1^2 + \sum_{n=2}^{N} b_n^2 \log^2 n\right)^{\frac{1}{2}} \tag{28}$$
$$(x \in I_m;\quad m = N+1, \ldots, 2N)$$

erfüllt sind.

Beweis des Hilfssatzes V. Durch Anwendung der Hilfssätze II und III ergibt sich ein K-beschränktes ONS von Treppenfunktionen $\chi_n(x)$ $(n=1, \ldots, N)$ und eine einfache Menge G mit

$$m(G) \geqq C_{11}(K) \tag{29}$$

derart, dass

$$\max_{1\leqq i\leqq N}\sum_{n=1}^{i} b_n\chi_n(x) > C_{10}(K)A_3\left(b_1^2+\sum_{n=2}^{N} b_n^2\log^2 n\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (x\in G) \tag{30}$$

erfüllt ist. Wir setzen zur Abkürzung:

$$B=\left(b_1^2+\sum_{n=2}^{N} b_n^2\log^2 n\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Es sei

$$G_1=\left\{x:0\leqq x\leqq 1, \left|\sum_{n=1}^{N} b_n\chi_n(x)\right| > C_{10}(K)A_3B/2\right\}.$$

Da

$$m(G_1)C_{10}^2(K)A_3^2B^2/4\leqq\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{N} b_n\chi_n(x)\right)^2dx\leqq\sum_{u=1}^{N} b_n^2$$

gilt, erhalten wir auf Grund von (25)

$$m(G_1)\leqq C_{11}(K)/2. \tag{31}$$

Offensichtlich ist $G_2=G\setminus G_1$ einfach, und gilt nach (29) und (31)

$$m(G_2)\geqq C_{11}(K)/2. \tag{32}$$

Weiterhin aus (25), (30) und aus der Definition der Menge G_1 erhalten wir:

$$\max_{1\leqq i<N}\sum_{n=1}^{i} b_n\chi_n(x) > C_{10}(K)A_3B \qquad (x\in G_2), \tag{33}$$

$$\min_{1<i\leqq N}\sum_{n=i}^{N} b_n\chi_n(x) < -C_{10}(K)A_3B/2 \qquad (x\in G_2). \tag{34}$$

Es sei $i(x)$ die kleinste positive ganze Zahl $(<N)$, für die

$$\max_{1\leqq i<N}\sum_{n=1}^{i} b_n\chi_n(x)=\sum_{n=1}^{i(x)} b_n\chi_n(x) \qquad (x\in G_2)$$

besteht; witerhin bezeichnen wir mit $H_i(\subseteqq G_2)$ die Menge derjenigen Punkte x, für die $i(x)=i$ $(i=1,\dots,N-1)$ ist. Seien $(1\leqq)j(1)<\dots<j(v)(<N)$ diejenige Indizes i, für die $m(H_i)\geqq C_{11}(K)/4N$ besteht. Weiterhin anstatt der Menge $H_{j(l)}$ nehmen wir eine einfache Menge $\bar{H}_{j(l)}(\subseteqq H_{j(l)})$ mit

$$m(\bar{H}_{j(l)})=\bar{\alpha}_lC_{11}(K)/4N \qquad (l=1,\dots,v),$$

wobei die positiven ganzen Zahlen $\bar{\alpha}_l$ mit

$$\bar{\alpha}_lC_{11}(K)/4N\leqq m(H_{j(l)})<(\bar{\alpha}_l+1)C_{11}(K)/4N \qquad (l=1,\dots,v)$$

bestimmt sind. Für die Mengen $\overline{H}_{j(l)}$ gilt

$$\sum_{l=1}^{\nu} m(\overline{H}_{j(l)}) = \frac{C_{11}(K)}{4N} \sum_{l=1}^{\nu} \bar{\alpha}_l = \frac{C_{11}(K)}{8N} \sum_{l=1}^{\nu} 2\bar{\alpha}_l \geqq C_{11}(K)/8$$

auf Grund von (32) und der Definition von $\bar{\alpha}_l$. Nach Verminderung gewisser $2\bar{\alpha}_l$ erhalten wir positive ganze Zahlen α_l $(l=1, \ldots, \nu)$ mit

(35) $$(\alpha_1 + \cdots + \alpha_\nu)/N = 1.$$

Es sei nun F_l eine einfache Untermenge von $\overline{H}_{j(l)}$ mit

(36) $$m(F_l) = \alpha_l C_{11}(K)/8N \qquad (l=1, \ldots, \nu).$$

Die Menge F_l teilen wir in α_l einfache Mengen vom Mass $C_{11}(K)/8N$ $(l=1, \ldots, \nu)$. Nach (35) und (36) bekommen wir also paarweise disjunkte, einfache Mengen; bezeichnen wir diese in Reihe nach mit F_l' $(l=1, \ldots, N)$.

Wir setzen

$$\overline{\psi}_n(x) = \chi_n((0, 1/2); x) - \chi_n((1/2, 1); x) \qquad (n=1, \ldots, N),$$

$$\overline{F}_l = F_l'((0, 1/2)) \qquad (l=1, \ldots, N), \qquad \overline{F}_l = F_l'((1/2, 1)) \qquad (l=N+1, \ldots, 2N).$$

Diese Treppenfunktionen bilden ein K-beschränktes ONS; diese einfachen Mengen sind paarweise disjunkt; nach (33) und (34) gelten

(37) $$\sum_{n=1}^{i(m)} b_n \overline{\psi}_n(x) > C_{10}(K) A_3 B \qquad (x \in \overline{F}_m; \quad m=1, \ldots, N),$$

(38) $$\sum_{n=i(m)}^{N} b_n \overline{\psi}_n(x) > C_{10}(K) A_3 B/2 \qquad (x \in \overline{F}_m; \quad m=N+1, \ldots, 2N)$$

mit gewissen Indizes $i(m)$, weiterhin gelten

(39) $$m(\overline{F}_m) = C_{11}(K)/16N,$$

(40) $$\sum_{m=1}^{2N} m(\overline{F}_m) = C_{11}(K)/8.$$

Die Menge

$$G_3 = (0, 1) \setminus \bigcup_{l=1}^{2N} \overline{F}_l$$

ist auch einfach, also gilt eine Darstellung

$$G_3 = \bigcup_{s=1}^{\sigma} J_s,$$

wobei $\bar{J}_s$ paarweise disjunkte Intervalle sind. Weiterhin gilt

$$\bar{F}_l = \bigcup_{s=1}^{\sigma_l} \bar{I}_s(l) \qquad (l=1, \ldots, 2N)$$

mit paarweise disjunkten Intervallen $\bar{I}_s(l)$. Wir setzen

$$I_m = \left(\sum_{l=1}^{m-1} \sum_{s=1}^{\sigma_l} m(\bar{I}_s(l)),\ \sum_{l=1}^{m} \sum_{s=1}^{\sigma_l} m(\bar{I}_s(l))\right) \qquad (m=1, \ldots, 2N),$$

$$I_s(l) = \left(\sum_{p=1}^{l-1} \sum_{q=1}^{\sigma_p} m(\bar{I}_q(p)) + \sum_{j=1}^{s-1} m(\bar{I}_j(l)),\ \sum_{p=1}^{l-1} \sum_{q=1}^{\sigma_p} m(\bar{I}_q(p)) + \sum_{j=1}^{s} m(\bar{I}_j(l))\right)$$

$(s=1, \ldots, \sigma\,;\ l=1, \ldots, 2N)$. Weiterhin seien J_s paarweise disjunkte Intervalle mit

$$\bigcup_{s=1}^{\sigma} J_s = \left(C_{11}(K)/8, 1\right), \quad m(J_s) = m(\bar{J}_s) \qquad (s=1, \ldots, \sigma);$$

auf Grund von (40) können wir die Intervalle J_s derart anwählen. Auf Grund von (39) ergibt sich (27), und nach (40) folgt, daß die Intervalle I_m eine Zerlegung des Intervalls $\left(0, C_{11}(K)/8\right)$ bilden.

Mit T bezeichnen wir diejenige umkehrbar eindeutige Transformation, die die Intervalle $\bar{J}_s$ auf J_s und die Intervalle $\bar{I}_s(l)$ auf $I_s(l)$ linear abbildet; die inverze Transformation von T bezeichnen wir mit T^{-1}. Wir setzen endlich

$$\psi_n(x) = \bar{\psi}_n(T^{-1}x) \qquad (n=1, \ldots, N).$$

Offensichtlich bilden diese Treppenfunktionen ein K-beschränktes ONS, und auf Grund von (37), (38) sind auch die Ungleichungen (28) erfüllt, wobei $C_{13}(K) = C_{10}(K)A_3/2$. (26) ist nach der Konstruktion offensichtlich. Damit haben wir Hilfssatz V bewiesen.

Wir werden noch einen Hilfssatz anwenden.

Hilfssatz von Menchoff. ([2], S. 104.) *Es seien d und q positive ganze Zahlen $0<d<q$. Zu jedem Indexpaar (i, j) mit $1 \leqq i, j \leqq q$ und $|i-j| = d$ soll eine von Null verschiedene Zahl $\alpha_{i,j}$ zugeordnet werden; wir bezeichnen mit β_d das Maximum der absoluten Beträge der Zahlen $\alpha_{i,j}$. In jedem Intervall (u, v) mit $v-u > 2\beta_d$ können dann Treppenfunktionen $\varphi_l(x)$ $(l=1, \ldots, q)$ derart definiert werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$$|\varphi_l(x)| = 1 \qquad (u<x<v;\ \ l=1, \ldots, q),$$

$$\int_u^v \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = -\alpha_{i,j} \qquad (|i-j| = d;\ \ 1 \leqq i, j \leqq q),$$

$$\int_u^v \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = 0 \qquad (i \neq j;\ \ |i-j| \neq d;\ \ 1 \leqq i, j \leqq q).$$

Die positive ganze Zahl $C_0(K)$, die im Hilfssatz I erwähnt wurde, bestimmen wir folgenderweise: $C_0(K)$ sei die kleinste positive ganze Zahl, für die

$$\sqrt{C_{11}(K)}\, C_{10}(K) A_3 2^{C_0(K)}/4 \geqq 1 \tag{41}$$

besteht (für die Bedeutung der Konstanten A_3, $C_{10}(K)$, $C_{11}(K)$ siehe den Hilfssatz V).

Bei dem Beweis des Hilfssatzes I werden wir zwei Fälle unterscheiden.

6. Erstens nehmen wir

(42)
$$\frac{1}{2}\sum_{k=k_1+1}^{k_2-1}\left(a_{\nu(k)+1}^2+\sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)} a_{\nu(k)+l}^2 \log^2 l\right)^{\frac{1}{2}} \geqq \sum_{k=k_1+1}^{k_2-1} |a_{\nu(k+1)}| \left(1+\sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)} \log^2 l\right)^{\frac{1}{2}}$$

an. Wir setzen

$$c_n = a_n \quad (n = \nu(k_1)+1, \dots, \nu(k_1+1)),$$
$$c_n = a_{\nu(k+1)} \quad (n = \nu(k)+1, \dots, \nu(k+1);\quad k = k_1+1, \dots, k_2-1).$$

Aus (42) folgt

$$\frac{1}{2}\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\left(a_{\nu(k)+1}^2+\sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)} a_{\nu(k)+l}^2 \log^2 l\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \tag{43}$$
$$\leqq \sum_{k=k_1}^{k_2-1}\left(c_{\nu(k)+1}^2+\sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)} c_{\nu(k)+l}^2 \log^2 l\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dann gibt es eine ganze Zahl s $(0 \leqq s \leqq 2)$ mit

$$\sum_{\substack{i\\ k_1 \leqq 3i+s \leqq k_2-1}} \left(c_{\nu(3i+s)+1}^2+\sum_{l=2}^{\nu(3i+s+1)-\nu(3i+s)} c_{\nu(3i+s)+l}^2 \log^2 l\right)^{\frac{1}{2}} \geqq \tag{44}$$
$$\geqq \frac{1}{3}\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\left(c_{\nu(k)+1}^2+\sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)} c_{\nu(k)+l}^2 \log^2 l\right)^{\frac{1}{2}};$$

die Indizes $(k_1 \leqq)\, 3i+s\, (<k_2)$ bezeichnen wir der Reihe nach mit $r_1 < \dots < r_{j_0}$, weiterhin sei $r_0 = k_1$, $r_{j_0+1} = k_2$.

Durch vollständige Induktion werden wir zeigen, daß für jedes i $(1 \leqq i \leqq j_0)$ kann man ein K-beschränktes ONS von Treppenfunktionen $\psi_n(x)$ $(n = \nu(r_0)+1, \dots, \nu(r_{i+1}))$ im Intervall $(0, 3)$ mit folgenden Eigenschaften bilden: gibt es paarweise disjunkte, einfache Mengen $E_l(i) (\subseteqq (0, 1))$ $(l = 1, \dots, \nu(r_i+1)-\nu(r_i))$ mit

$$m(E_l(i)) = C_{11}(K)/16(\nu(r_i+1)-\nu(r_i)) \qquad (l = 1, \dots, \nu(r_i+1)-\nu(r_i)), \tag{45}$$

weiterhin gibt es eine Anordnung

$$\sum_{t=1}^{\nu(r_{i+1})-\nu(r_0)} c_{n(t,i)}\psi_{n(t,i)}(x)$$

der Summe $\sum_{n=r_0+1}^{\nu(r_{i+1})} c_n\psi_n(x)$ derart, daß

$$(46)\qquad \sum_{t=i'(l,i)}^{i''(l,i)} c_{n(t,i)}\psi_{n(t,i)}(x) > \frac{C_{13}(K)}{32}\sum_{j=1}^{i}\left(c^2_{\nu(r_j)+1}+\sum_{l=2}^{\nu(r_{j+1})-\nu(r_j)} c^2_{\nu(r_j)+l}\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(x\in E_l(i))$$

mit gewissen Indizes

$$(1 \leqq)\, i'(l,i) \leqq i''(l,i)(\leqq \nu(r_{i+1})-\nu(r_0)) \qquad (l=1,\dots,\nu(r_i+1)-\nu(r_i))$$

besteht. $(C_{13}(K) = C_{10}(K)A_3/2)$.

Es sei

$$\psi_n(x) = \begin{cases} r_n(x-2) & (x\in(2,3)),\\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \qquad (n=\nu(r_0)+1,\dots,\nu(r_1)).$$

(Im Falle $r_0=r_1$ ist dieser Schritt überflüssig.) Dann wenden wir den Hilfssatz IV mit $b_n=c_{\nu(r_1)+n}$ $(n=1,\dots,\nu(r_1+1)-\nu(r_1))$. So bekommen wir ein K-beschränktes ONS von Treppenfunktionen $\bar\Phi_n(x)$ $(n=\nu(r_1)+1,\dots,\nu(r_1+1))$ im Intervall $(0,1)$ und paarweise disjunkte einfache Mengen $E_l(1)(\subseteqq(0,1))$ mit $m(E_l(1)) = C_{11}(K)/16(\nu(r_1+1)-\nu(r_1))$ $(l=1,\dots,\nu(r_1+1)-\nu(r_1))$ derart, daß mit gewissen Indizes $i(l)$ $(\nu(r_1)<i(l)\leqq \nu(r_1+1))$

$$\sum_{n=\nu(r_1)+1}^{i(l)} c_n\bar\Phi_n(x) > A_3 I^{\frac{1}{2}}(c_{\nu(r_1)+1},\dots,c_{\nu(r_1+1)};K)$$

$$(x\in E_l(1);\quad l=1,\dots,\nu(r_1+1)-\nu(r_1)),$$

oder nach dem Hilfssatz II

$$(47)\qquad \sum_{n=\nu(r_1)+1}^{i(l)} c_n\bar\Phi_n(x) > C_{10}(K)A_3\left(c^2_{\nu(r_1)+1}+\sum_{l=2}^{\nu(r_1+1)-\nu(r_1)} c^2_{\nu(r_1)+l}\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(x\in E_l(1);\quad l=1,\dots,\nu(r_1+1)-\nu(r_1))$$

erfüllt sind. Wir setzen

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \bar\Phi_n(x)/\sqrt{3} & (x\in(0,1)),\\ r_n(x-1)/\sqrt{3} & (x\in(1,2)),\\ r_n(x-2)/\sqrt{3} & (x\in(2,3))\end{cases} \qquad (n=\nu(r_1)+1,\dots,\nu(r_1+1)),$$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} r_n(x-2) & (x\in(2,3)),\\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \qquad (n=\nu(r_1+1)+1,\dots,\nu(r_2)).$$

Die Treppenfunktionen $\psi_n(x)$ $\big(n = \nu(r_0)+1, \dots, \nu(r_2)\big)$ bilden offensichtlich ein K-beschränktes ONS in $(0, 3)$; und aus (47), wegen $C_{13}(K) = \dfrac{C_{10}(K)A_3}{2}$ folgt

$$\sum_{n=\nu(r_1)+1}^{i(l)} c_n\psi_n(x) > C_{13}(K)\left(c^2_{\nu(r_1)+1} + \sum_{l=2}^{\nu(r_1+1)-\nu(r_1)} c^2_{\nu(r_1)+l}\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}} >$$

$$> \frac{C_{13}(K)}{32}\left(c^2_{\nu(r_1)+1} + \sum_{l=2}^{\nu(r_2+1)-\nu(r_1)} c^2_{\nu(r_1)+l}\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\big(x\in E_l(1);\quad l = 1, \dots, \nu(r_1+1)-\nu(r_1)\big)$$

mit gewissen Indizes $i(l)$ $\big(\nu(r_1) < i(l) \leqq \nu(r_1+1)\big)$. Damit haben wir die Treppenfunktionen $\psi_n(x)$ $\big(n = \nu(r_0)+1, \dots, \nu(r_2)\big)$ und die paarweise disjunkte einfache Mengen $E_l(1)$ $\big(\subseteqq(0, 1)\big)$ derart definiert, daß diese Funktionen ein K-beschränktes ONS in $(0, 3)$ bilden, weiterhin (45) und (46) — in origineller Anordnung — im Falle $i=1$ erfüllt werden.

Es sei i $(1\leqq i<j_0)$ ein Index, und wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\psi_n(x)$ $\big(n = \nu(r_0)+1, \dots, \nu(r_{i+1})\big)$ und die paarweise disjunkte einfache Mengen $E_l(i)\big(\subseteqq(0, 1)\big)$ $\big(l = 1, \dots, \nu(r_i+1)-\nu(r_i)\big)$ schon definiert sind, derart, daß diese Funktionen ein K-beschränktes ONS in $(0, 3)$ bilden, weiterhin (45) und (46) in gewisser Anordnung für i erfüllt werden.

Es seien

$$\overline{N} = \big(\nu(r_{i+1}+1)-\nu(r_{i+1})\big)/2\big(\nu(r_i+1)-\nu(r_i)\big)\nu(r_i+1),$$

$$M = \big(\nu(r_{i+1})-\nu(r_{i+1}-1)\big)/2\big(\nu(r_i+1)-\nu(r_i)\big)\nu(r_i+1), \tag{48}$$

$$P = \big(\nu(r_{i+1}+1)-\nu(r_{i+1})\big)/\big(\nu(r_{i+1})-\nu(r_{i+1}-1)\big);$$

diese sind ganze Zahlen, und gilt $PM=\overline{N}$. Es sei

$$b_n = c_{\nu(r_{i+1})+(p-1)(\nu(r_{i+1})-\nu(r_{i+1}-1))+1} \qquad \big(n=(p-1)M+1, \dots, pM;\quad p=1, \dots, P\big).$$

(In diesem Falle sind die Koeffizienten c_n $\big(n = \nu(r_{i+1})+1, \dots, \nu(r_{i+1}+1)\big)$ gleich. Solche Definition von b_n ist darum zweckmässig, weil wir den Fall (79) ganz ähnlicherweise betrachten können; dann werden aber nur die Koeffizienten c_n $\big(n = \nu(r_{i+1})+(p-1)\big(\nu(r_{i+1})-\nu(r_{i+1}-1)\big)+1, \dots, \nu(r_{i+1})+p\big(\nu(r_{i+1})-\nu(r_{i+1}-1)\big)\big)$ gleich $(p=1, \dots, P)$; im Folgenden werden wir nur diese Tatsache ausnützen.) Wir wenden den Hilfssatz V für die Folge $\{b_n\}$ $(n=1, \dots, \overline{N})$ im Falle $N=\overline{N}$ an.

Auf Grund der Definition der Folgen $\{c_n\}$, $\{b_n\}$ und M gilt

$$\sqrt{C_{11}(K)/2}\,C_{10}(K)A_3\left(b_1^2+\sum_{n=2}^{N} b_n^2\log^2 n\right)^{\frac{1}{2}}\Big/2 \geqq \sqrt{C_{11}(K)/2}\,C_{10}(K)A_3\cdot$$

$$\cdot\left(b_1^2+\sum_{n=2}^{M/2} b_n^2\log^2 n+\log^2\frac{M}{2}\sum_{n=M/2+1}^{M} b_n^2+\log^2 M\sum_{n=M+1}^{N} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big/2 \geqq$$

$$\geqq \sqrt{C_{11}(K)/2}\,C_{10}(K)A_3\left(\frac{1}{2}\log^2\frac{M}{2}\sum_{n=1}^{M} b_n^2+\log^2 M\sum_{n=M+1}^{N} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big/2 \geqq$$

$$\geqq \sqrt{C_{11}(K)}\,C_{10}(K)A_3\frac{1}{4}\log\frac{M}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}} >$$

$$> \sqrt{C_{10}(K)}\,C_{10}(K)A_3\frac{1}{4}2^{C_0(K)}\left(\sum_{n=1}^{N} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

und wegen (41) besteht (25). Den Hilfssatz V können wir also anwenden. Dann bekommen wir ein K-beschränktes ONS von Treppenfunktionen $\chi_n(x)$ $(n=1, \ldots, \overline{N})$ und paarweise disjunkte Intervalle $I_m(\subseteqq(0, C_{11}(K)/8)$ $(m=1, \ldots, 2\overline{N})$ derart, daß

$$\int_0^{C_{11}(K)/8} \chi_n(x)\,dx = 0, \qquad \int_{C_{11}(K)/8}^{1} \chi_n(x)\,dx = 0 \qquad (n=1, \ldots, \overline{N}), \tag{49}$$

$$m(I_m) = C_{11}(K)/16\overline{N} \qquad (m=1, \ldots, 2\overline{N}) \tag{50}$$

und

$$b_1\chi_1(x)+\cdots+b_{i(m)}\chi_{i(m)}(x) > C_{13}(K)\left(b_1^2+\sum_{n=2}^{N} b_n^2\log^2 n\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$(x\in I_m;\quad m=1, \ldots, \overline{N}),$$

$$b_{i(m)}\chi_{i(m)}(x)+\cdots+b_N\chi_N(x) > C_{13}(K)\left(b_1^2+\sum_{n=2}^{N} b_n^2\log^2 n\right)^{\frac{1}{2}} \tag{51}$$
$$(x\in I_m;\quad m=\overline{N}+1, \ldots, 2\overline{N})$$

mit gewissen Indizes $i(m)$ $(1\leqq i(m)\leqq\overline{N})$ erfüllt werden.

Wir setzen

$$\psi_n^{(1)}(x)=\begin{cases}\chi_n(x) & (x\in(0, C_{11}(K)/8)),\\ 0 & \text{sonst},\end{cases}\qquad \psi_n^{(2)}(x)=\begin{cases}\chi_n(x) & (x\in(C_{11}(K)/8, 1),\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$(n=1, \ldots, \overline{N})$. Da die Funktionen $\psi_n(x)$ $(n = v(r_0)+1, \ldots, v(r_{i+1}))$ Treppenfunktionen, und die Mengen $E_l(i)$ $\big(l = 1, \ldots, \nu(r_i+1)-\nu(r_i)\big)$ einfach sind, gibt es Zerlegungen

$$E_l(i) = \bigcup_{p=1}^{q_l} I_p(l) \qquad \big(l = 1, \ldots, \nu(r_i+1)-\nu(r_i)\big),$$

$$(1,2) = \bigcup_{p=1}^{q} J_p, \quad (2,3) = \bigcup_{p=1}^{\bar q} \bar J_p$$

auf paarweise disjunkte Intervalle derart, daß in jedem Teilintervall jede Funktion $\psi_n(x)$ $\big(n = \nu(r_0)+1, \ldots, \nu(r_{i+1})\big)$ konstant ist. Für jedes p seien $J_p(l)$ paarweise disjunkte Teilintervalle von J_p mit der Länge $\dfrac{m(J_p)}{\nu(r_i+1)-\nu(r_i)}$. Es sei weiterhin $J'_p(l)(\subseteqq J_p(l))$ ein Intervall mit

$$m\big(J'_p(l)\big) = C_{11}(K)m(J_p)/16\big(\nu(r_i+1)-\nu(r_i)\big)$$

$\big(p=1, \ldots, q;\ l = 1, \ldots, \nu(r_i+1)-\nu(r_i)\big)$. Wir setzen die Funktionen

$$\bar\psi_{2(l-1)\bar N\nu(r_i+1)+(v-1)\nu(r_i+1)+n}(x) = \sum_{p=1}^{q_l} \psi_v^{(1)}(I_p(l); x) + \sum_{p=1}^{q} \psi_v^{(2)}(J'_p(l); x)$$

$$\big(n = 1, \ldots, \nu(r_i+1)\big),$$

$$\bar\psi_{2(l-1)\bar N\nu(r_i+1)+\bar N\nu(r_i+1)+(v-1)\nu(r_i+1)+n}(x) = \sum_{p=1}^{q_l} \psi_v^{(1)}(I_p(l); x) + \sum_{p=1}^{q} \psi_v^{(2)}(J'_p(l); x)$$

$$\big(n = 1, \ldots, \nu(r_i+1)\big)$$

$\big(l = 1, \ldots, \nu(r_i+1)-\nu(r_i);\ v = 1, \ldots, \bar N\big)$. Nach (49) ist

$$\text{(52)} \qquad \int_0^2 \bar\psi_k(x)\psi_l(x)\,dx = 0 \qquad \big(1 \leqq k \leqq \nu(r_{i+1}+1)-\nu(r_{i+1});\ \nu(r_0) < l \leqq \nu(r_{i+1})\big).$$

Offensichtlich gilt

$$\text{(52)} \qquad \int_0^2 \bar\psi_t(x)\bar\psi_\tau(x)\,dx = 0$$

$$\big(2(l-1)\bar N\nu(r_i+1) < t \leqq 2l\bar N\nu(r_i+1),\ 2(\lambda-1)\bar N\nu(r_i+1) < \tau \leqq 2\lambda\bar N\nu(r_i+1),\ l \neq \lambda\big).$$

Für ein l bilden wir

$$\alpha_{t,\tau}(l) = \int_0^2 \bar\psi_t(x)\bar\psi_\tau(x)\,dx \qquad \big(2(l-1)\bar N\nu(r_i+1) < t,\ \tau \leqq 2lN\nu(r_i+1)\big).$$

Dann gilt

(54)

$$\alpha_{t,\tau}(l)=\begin{cases} C_{11}(K)/8(\nu(r_i+1)-\nu(r_i)) \\ \quad (t,\tau\in(2(l-1)\bar{N}\nu(r_i+1)+(v-1)\nu(r_i+1),2(l-1)\bar{N}\nu(r_i+1)+v\nu(r_i+1)]\cap \\ \quad \cap(2(l-1)\bar{N}\nu(r_i+1)+\bar{N}\nu(r_i+1)+(v-1)\nu(r_i+1),\ 2(l-1)\bar{N}\nu(r_i+1)+ \\ \quad +\bar{N}\nu(r_i+1)+v\nu(r_i+1)];\ v=1,\dots,\bar{N}), \\ 0 \quad \text{sonst.}\end{cases}$$

Da $\dfrac{C_{11}(K)3\nu(r_i+1)}{8(\nu(r_i+1)-\nu(r_i))}<1$ ist, können wir auf Grund des Menchoffschen Hilfssatzes Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ $\big(n=1,\dots,\nu(r_{i+1}+1)-\nu(r_{i+1})\big)$ in $(2,3)$ definieren, derart, daß

(55) $\quad |\varphi_n(x)|=1 \qquad \big(x\in(2,3);\quad n=2(l-1)\bar{N}\nu(r_i+1)+1,\dots,2l\bar{N}\nu(r_i+1)\big),$

(56)
$$\int_2^3 \varphi_t(x)\varphi_\tau(x)\,dx=-\alpha_{t,\tau}(l)$$
$$\big(2(l-1)\bar{N}\nu(r_i+1)<t,\ \tau\leqq 2l\bar{N}\nu(r_i+1)\big)$$

erfüllt sind $\big(l=1,\dots,\nu(r_i+1)-\nu(r_i)\big)$.

Durch Rekursion definieren wir Treppenfunktionen

$$\bar{\varphi}_n(x) \qquad \big(n=1,\dots,\nu(r_{i+1}+1)-\nu(r_{i+1})\big),$$

für die

(57) $\qquad |\bar{\varphi}_n(x)|=1 \qquad \big(x\in(2,3);\ n=1,\dots,2l\bar{N}\nu(r_i+1)\big),$

(58)

$$\int_2^3 \bar{\varphi}_t(x)\bar{\varphi}_\tau(x)\,dx=\begin{cases}-\alpha_{t,\tau}(\lambda) & \big(2(\lambda-1)\bar{N}\nu(r_i+1)<t,\ \tau\leqq 2\lambda\bar{N}\nu(r_i+1);\ \lambda=1,\dots,l\big),\\ 0 & \big(2(\lambda-1)\bar{N}\nu(r_i+1)<t\leqq 2\lambda\bar{N}\nu(r_i+1),\\ & \ 2(\bar{\lambda}-1)\bar{N}\nu(r_i+1)<\tau\leqq 2\bar{\lambda}\bar{N}\nu(r_i+1);\\ & \ \lambda\neq\bar{\lambda},\ 1\leqq\lambda,\ \bar{\lambda}\leqq l\big),\end{cases}$$

(59) $\qquad \displaystyle\int_2^3 \psi_k(x)\bar{\varphi}_n(x)\,dx=0 \quad \big(\nu(r_0)<k\leqq\nu(r_{i+1});\ 1\leqq n\leqq 2l\bar{N}\nu(r_i+1)\big)$

für jedes l $\big(l=1,\dots,\nu(r_i+1)-\nu(r_i)\big)$ erfüllt sind.

Die zwei Hälfte von $\bar{J}_p$ bezeichnen wir mit $\bar{J}'_p$, bzw. mit $\bar{J}''_p$ $(p=1,\dots,\bar{q})$. Wir setzen

$$\bar{\varphi}_n(x)=\sum_{p=1}^{\bar{q}}\varphi_n(\bar{J}'_p;x)-\sum_{p=1}^{\bar{q}}\varphi_n(\bar{J}''_p;x) \qquad \big(n=1,\dots,2\bar{N}\nu(r_i+1)\big).$$

Aus (55) und (56) folgt, daß (57), (58), (59) für $l=1$ erfüllt sind. Es sei l_0 $\big(1\leqq l_0<\nu(r_i+1)-\nu(r_i)\big)$ eine ganze Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\bar{\varphi}_n(x)$ $(n = 1, \ldots, 2l_0\bar{N}\nu(r_i+1))$ schon definiert sind derart, daß (57), (58), (59) für $l=l_0$ erfüllt sind. Dann gibt es für jedes p $(p=1, \ldots, \bar{q})$ eine Zerlegung

$$\bar{J}_p = \bigcup_{s=1}^{\sigma_p} J_s^*(p)$$

auf paarweise disjunkte Intervalle derart, daß jede Funktion

$$\bar{\varphi}_n \; (n = 1, \ldots, 2l_0\bar{N}\nu(r_i+1))$$

in jedem $J_s^*(p)$ konstant ist; die zwei Hälfte von $J_s^*(p)$ bezeichnen wir mit $J_s^{*\prime}(p)$, bzw. mit $J_s^{*\prime\prime}(p)$). Wir setzen

$$\bar{\varphi}_n(x) = \sum_{p=1}^{\bar{q}} \sum_{s=1}^{\sigma_p} \varphi_n(J_s^{*\prime}(p); x) - \sum_{p=1}^{\bar{q}} \sum_{s=1}^{\sigma_p} \varphi_n(J_s^{*\prime\prime}(p); x)$$

$$(n = 2l_0\bar{N}\nu(r_i+1)+1, \ldots, 2(l_0+1)\bar{N}\nu(r_i+1)).$$

Auf Grund von (55) und (56) erhalten wir, daß (57), (58), (59) auch für $l = l_0+1$ bestehen. Durch vollständiger Induktion bekommen wir also Treppenfunktionen $\bar{\varphi}_n(x)$ $(n = 1, \ldots, \nu(r_{i+1}+1)-\nu(r_{i+1}))$ für die (57), (58) und (59) bei jedem $l = 1, \ldots$ $\ldots, \nu(r_i+1)-\nu(r_i)$ erfüllt werden.

Wir setzen

$$\tilde{\psi}_n(x) = \begin{cases} \bar{\psi}_n(x) & (x \in (0, 2)), \\ \bar{\varphi}_n(x) & (x \in (2, 3)) \end{cases} \quad (n=1, \ldots, \nu(r_{i+1}+1)-\nu(r_{i+1})).$$

Auf Grund von (52), (53), (54), (57), (58) und (59) folgt

$$(60) \qquad \int_0^3 \psi_k(x)\tilde{\psi}_l(x)\,dx = 0 \qquad (\nu(r_0)<k\leqq\nu(r_{i+1});\ 1\leqq l\leqq\nu(r_{i+1}+1)-\nu(r_{i+1})),$$

$$(61) \qquad \int_0^3 \tilde{\psi}_k(x)\tilde{\psi}_l(x)\,dx = \begin{cases} 0 & (k\neq l;\ 1\leqq k, l\leqq\nu(r_{i+1}+1)-\nu(r_{i+1})), \\ 1+C_{11}(K)/8(\nu(r_i+1)-\nu(r_i)) & \\ & (k=l;\ 1\leqq k, l\leqq\nu(r_{i+1}+1)-\nu(r_{i+1})). \end{cases}$$

Es sei $n(k)$ $(k = 1, \ldots, \nu(r_{i+1}+1)-\nu(r_{i+1}))$ eine Anordnung der Folge $\nu(r_{i+1})+1, \ldots, \nu(r_{i+1}+1)$, die später definiert wird. Wir setzen endlich

$$\psi_{n(k)}(x) = \tilde{\psi}_k(x)/\sqrt{1+C_{11}(K)/8(\nu(r_i+1)-\nu(r_i))} \qquad (k=1, \ldots, \nu(r_{i+1}+1)-\nu(r_{i+1})).$$

Aus (60) und (61) folgt, daß die Treppenfunktionen

$$\psi_n(x) \; (n = \nu(r_0)+1, \ldots, \nu(r_{i+1}+1))$$

ein K-beschränktes ONS im Intervall (0, 3) bilden.

Mit $T(p, l)$ bezeichnen wir diejenige lineare Transformation, die das Intervall $(0, C_{11}(K)/8)$ auf $I_p(l)$ abbildet; die Bildmenge von I_m mit dieser Transformation bezeichnen wir mit $I_p(l, m)$. Es sei

$$\bar{E}_{(l-1)2\bar{N}+m} = \bigcup_{p=1}^{q_l} I_p(l; m) \qquad (l = 1, \ldots, \nu(r_i+1)-\nu(r_i);\ m = 1, \ldots, 2\bar{N}).$$

Nach (45) und (50) ist

$$m(\bar{E}_{(l-1)2\bar{N}+m}) = C_{11}(K)/32\bar{N}\big(\nu(r_i+1)-\nu(r_i)\big).$$

Wir teilen jede einfache Menge $\bar{E}_{(l-1)2\bar{N}+m}$ in $\nu(r_i+1)$ paarweise disjunkte einfache Teilmenge vom gleichen Mass; diese bezeichnen wir der Reihe nach mit

$$E_{(l-1)2\bar{N}\nu(r_i+1)+(m-1)\nu(r_i+1)+s}(i+1)$$

$$(l = 1, \ldots, \nu(r_i+1)-\nu(r_i);\ m = 1, \ldots, 2\bar{N};\ s = 1, \ldots, \nu(r_i+1)).$$

Auf Grund von (48) ergibt sich

$$m(E_l(i+1)) = C_{11}(K)/16\big(\nu(r_{i+1}+1)-\nu(r_{i+1})\big) \qquad (l = 1, \ldots, \nu(r_{i+1}+1)-\nu(r_{i+1})).$$

Also ist für die einfachen, paarweise disjunkten Mengen $E_l(i+1)$ (45) auch für $i+1$ erfüllt. Weiterhin aus (51) und aus der Definition der Funktionen $\psi_n(x)$ $\big(\nu(r_{i+1}) < n \leqq \nu(r_{i+1}+1)\big)$ und der Mengen $E_l(i+1)$ $\big(1 \leqq l \leqq \nu(r_{i+1}+1)-\nu(r_{i+1})\big)$ wegen $\sqrt{1+C_{11}(K)/8\big(\nu(r_i+1)-\nu(r_i)\big)} < 2$ folgt, daß

(62)

$$\sum_{v=1}^{j'(l,m)} b_v \psi_{n(2(l-1)\bar{N}\nu(r_i+1)+\bar{N}\nu(r_i+1)+(v-1)\nu(r_i+1)+1)}(x) \geqq \frac{C_{13}(K)}{2}\left(b_1^2+\sum_{n=2}^{\bar{N}} b_n^2 \log^2 n\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(x \in \bigcup_{m=1}^{\bar{N}\nu(r_i+1)} E_{(l-1)2\bar{N}\nu(r_i+1)+m}(i+1)\right),$$

(63)

$$\sum_{v=j''(l,m)}^{\bar{N}} b_v \psi_{n(2(l-1)\bar{N}\nu(r_i+1)+(v-1)\nu(r_i+1)+1)}(x) \geqq \frac{C_{13}(K)}{2}\left(b_1^2+\sum_{n=2}^{\bar{N}} b_n^2 \log^2 n\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(x \in \bigcup_{m=\bar{N}\nu(r_i+1)+1}^{2\bar{N}\nu(r_i+1)} E_{(l-1)2\bar{N}\nu(r_i+1)+m}(i+1)\right)$$

mit gewissen Indizes $1 \leqq j'(l, m), j''(l, m) \leqq \bar{N}$ $\big(l = 1, \ldots, \nu(r_i+1)-\nu(r_i)\big)$ erfüllt sind.

Aus der Definition der Folge $\{b_n\}$ und aus (48) ergibt sich durch einfacher Rechnung

(64) $$16\nu(r_i+1)\left(b_1^2+\sum_{n=2}^{\bar N} b_n^2\log^2 n\right)^{\frac12} \geqq$$

$$\geqq \left(c^2_{\nu(r_{i+1})+1}+\sum_{l=2}^{\nu(r_{i+1}+1)-\nu(r_{i+1})} c^2_{\nu(r_{i+1})+l}\log^2 l\right)^{\frac12} = C_{i+1}.$$

Wir setzen

(65) $$n(k) = (p-1)\big(\nu(r_{i+1})-\nu(r_{i+1}-1)+2(l-1)M\nu(r_i+1)+j$$

für

$$k = 2(l-1)\bar N\nu(r_i+1)+2(p-1)M\nu(r_i+1)+j$$

$$\big(l=1, \dots, \nu(r_i+1)-\nu(r_i);\ p = 1, \dots, P;\ j = 1, \dots, 2M\nu(r_i+1)\big).$$

Nach (48), weiterhin nach der Definition der Folgen $\{b_n\}$, $\{n(k)\}$ und von $\psi_n(x)$ erhalten wir aus (62), (63) und (64), daß

$$\sum_{k=2(l-1)\bar N\nu(r_i+1)+\bar N\nu(r_i+1)+1}^{2(l-1)\bar N\nu(r_i+1)+\bar N\nu(r_i+1)+j'(l,m)\nu(r_i+1)} c_{n(k)}\psi_{n(k)}(x) =$$

$$= \nu(r_i+1)\sum_{v=1}^{j'(l,m)} b_v\psi_{n(2(l-1)\bar N\nu(r_i+1)+\bar N\nu(r_i+1)+(v-1)\nu(r_i+1)+1)}(x) \geqq \frac{C_{13}(K)}{32}C_{i+1}$$

$$\left(x\in \bigcup_{m=1}^{\bar N\nu(r_i+1)} E_{(l-1)2\bar N\nu(r_i+1)+m}(i+1)\right),$$

$$\sum_{k=2(l-1)\bar N\nu(r_i+1)+j''(l,m)\nu(r_i+1)+1}^{2(l-1)\bar N\nu(r_i+1)+\bar N\nu(r_i+1)} c_{n(k)}\psi_{n(k)}(x) =$$

$$= \nu(r_i+1)\sum_{v=j''(l,m)}^{\bar N} b_v\psi_{n(2(l-1)\bar N\nu(r_i+1)+(v-1)\nu(r_i+1)+1)}(x) \geqq \frac{C_{13}(K)}{32}C_{i+1}$$

$$\left(x\in \bigcup_{m=\bar N\nu(r_i+1)+1}^{2\bar N\nu(r_i+1)} E_{(l-1)2\bar N\nu(r_i+1)+m}(i+1)\right),$$

also sind

(66) $$\sum_{k=2(l-1)\bar N\nu(r_i+1)+\bar N\nu(r_i+1)+1}^{i_m(l)} c_{n(k)}\psi_{n(k)}(x) > \frac{C_{13}(K)}{32}C_{i+1}$$

$$\left(x\in \bigcup_{m=1}^{\bar N\nu(r_i+1)} E_{(l-1)2\bar N\nu(r_i+1)+m}(i+1)\right),$$

(67) $$\sum_{k=i_m^*(l)}^{2(l-1)\bar N\nu(r_i+1)+\bar N\nu(r_i+1)} c_{n(k)}\psi_{n(k)}(x) > \frac{C_{13}(K)}{32}C_{i+1}$$

$$\left(x\in \bigcup_{m=\bar N\nu(r_i+1)+1}^{2\bar N\nu(r_i+1)} E_{(l-1)2\bar N\nu(r_i+1)+m}(i+1)\right)$$

mit gewissen Indizes $2(l-1)\bar{N}\nu(r_i+1)+\bar{N}\nu(r_i+1) < i_m(l) \leqq 2l\bar{N}\nu(r_i+1)$,

$2(l-1)\bar{N}\nu(r_i+1) < i_m^*(l) \leqq 2(l-1)\bar{N}\nu(r_i+1)+\bar{N}\nu(r_i+1)$ erfült sind.

Da die Funktionen $\psi_n(x)$ $\big(n = \nu(r_0)+1, \ldots, \nu(r_{i+1}+1)\big)$ Treppenfunktionen sind, gibt es eine Zerlegung

$$(2,3) = \bigcup_{t=1}^{\tau} \tilde{I}_t$$

des Intervalls (2, 3) auf paarweise disjunkte Intervalle $\tilde{I}_t$ derart, daß jede Funktion $\psi_n(x)$ $\big(n = \nu(r_0)+1, \ldots, \nu(r_{i+1}+1)\big)$ in jedem $\tilde{I}_t$ konstant ist. Wir setzen endlich

$$\psi_n(t) = \sum_{t=1}^{\tau} r_n(\tilde{I}_t; x) \qquad \big(n = \nu(r_{i+1}), \ldots, \nu(r_{i+2})\big).$$

Offensichtlich bilden die Treppenfunktionen $\psi_n(x)$ $\big(n = \nu(r_0)+1, \ldots, \nu(r_{i+2})\big)$ ein K-beschränktes ONS in (0, 3).

Durch Rekursion werden wir zeigen folgendes: für jedes λ

$$\big(\lambda = 1, \ldots, \nu(r_i+1)-\nu(r_i)\big)$$

gibt es eine Anordnung

$$\sum_{k=1}^{\nu(r_{i+1})-\nu(r_0)+2\lambda\bar{N}\nu(r_i+1)} c_{m(k,\lambda)}\psi_{m(k,\lambda)}(x) \tag{68}$$

der Summe

$$\sum_{n=\nu(r_0)+1}^{\nu(r_{i+1})+2\lambda\bar{N}\nu(r_i+1)} c_n\psi_n(x) \tag{69}$$

derart, daß mit gewissen Indizes $1 \leqq s'(\lambda, l) \leqq s''(\lambda, l) \leqq \nu(r_{i+1})+2\lambda\bar{N}\nu(r_i+1)$

$$\sum_{k=s'(l,m)}^{s''(\lambda,l)} c_{m(k,\lambda)}\psi_{m(k,\lambda)}(x) > \frac{C_{13}(K)}{32}\sum_{j=1}^{i+1} C_j \tag{70}$$

$$\big(x\in E_l(i+1);\ l = 1, \ldots, 2\lambda N\nu(r_i+1)\big),$$

und mit gewissen Indizes $1 \leqq \bar{s}'(\lambda, l) \leqq \bar{s}''(\lambda, l) \leqq \nu(r_{i+1})+2\lambda\bar{N}\nu(r_i+1)$

$$\sum_{k=\bar{s}'(\lambda,l)}^{\bar{s}''(\lambda,l)} c_{m(k,\lambda)}\psi_{m(k,\lambda)}(x) > \frac{C_{13}(K)}{32}\sum_{j=1}^{i} C_j \tag{71}$$

$$\big(x\in E_l(i);\ l = \lambda+1, \ldots, \nu(r_i+1)-\nu(r_i)\big).$$

Wir nehmen für die Summe $\sum\limits_{n=\nu(r_0)+1}^{\nu(r_{i+1})+2\bar N\nu(r_i+1)} c_n\psi_n(x)$ die Anordnung

$$\sum_{k=1}^{\nu(r_{i+1})+2\bar N\nu(r_i+1)} c_{m(k,1)}\psi_{m(k,1)}(x) =$$

$$= c_{n(1,i)}\psi_{n(1,i)}(x)+\cdots+c_{n(i'(1,i)-1,i)}\psi_{n(i'(1,i)-1,i)}(x)+$$

$$+c_{n(1)}\psi_{n(1)}(x)+\cdots+c_{n(\bar N\nu(r_i+1))}\psi_{n(\bar N\nu(r_i+1))}(x)+$$

$$+c_{n(i'(1,i),i)}\psi_{n(i'(1,i),i)}(x)+\cdots+c_{n(i''(1,i),i)}\psi_{n(i''(1,i),i)}(x)+$$

$$+c_{n(\bar N\nu(r_i+1)+1)}\psi_{n(\bar N\nu(r_i+1)+1)}(x)+\cdots+c_{n(2\bar N\nu(r_i+1))}\psi_{n(2\bar N\nu(r_i+1))}(x)+$$

$$+c_{n(i''(1,i)+1,i)}\psi_{n(i''(1,i)+1,i)}(x)+\cdots+c_{n(\nu(r_{i+1})-\nu(r_0),i)}\psi_{n(\nu(r_{i+1})-\nu(r_0),i)}(x),$$

wobei die entsprechenden Anordnungen, bzw. die entsprechenden Indizes in (46) im Falle i, bzw. in (65) definiert sind. Aus (46) im Falle i, aus (66) und (67), weiterhin aus der Definition der Funktionen $\psi_n(x)$ ergibt sich, daß (70) und (71) im Falle $\lambda=1$ bestehen.

Es sei $\lambda(\geqq 1)$ eine ganze Zahl. Wir nehmen an, daß es eine Anordnung (68) der Summe (69) derart gibt, daß (70) und (71) für λ erfüllt sind.

Dann setzen wir für die Summe $\sum\limits_{n=\nu(r_0)+1}^{\nu(r_{i+1})+2(\lambda+1)\bar N\nu(r_i+1)} c_n\psi_n(x)$ die Anordnung

$$\sum_{k=1}^{\nu(r_{i+1})+2(\lambda+1)\bar N\nu(r_i+1)} c_{m(k,\lambda+1)}\psi_{m(k,\lambda+1)}(x) =$$

$$= c_{m(1,\lambda)}\psi_{m(1,\lambda)}(x)+\cdots+c_{m(\bar s'(\lambda,\lambda+1)-1,\lambda)}\psi_{m(\bar s'(\lambda,\lambda+1)-1,\lambda)}(x)+$$

$$+c_{n(2\lambda\bar N\nu(r_i+1)+1)}\psi_{n(2\lambda\bar N\nu(r_i+1)+1)}(x)+\cdots$$

$$\cdots+c_{n(2\lambda\bar N\nu(r_i+1)+\bar N\nu(r_i+1))}\psi_{n(2\lambda\bar N\nu(r_i+1)+\bar N\nu(r_i+1))}(x)+$$

$$+c_{m(\bar s'(\lambda,\lambda+1),\lambda)}\psi_{m(\bar s'(\lambda,\lambda+1),\lambda)}(x)+\cdots+c_{m(\bar s''(\lambda,\lambda+1),\lambda)}\psi_{m(\bar s''(\lambda,\lambda+1),\lambda)}(x)+$$

$$+c_{n(2\lambda\bar N\nu(r_i+1)+\bar N\nu(r_i+1)+1)}\psi_{n(2\lambda\bar N\nu(r_i+1)+\bar N\nu(r_i+1)+1)}(x)+\cdots$$

$$\cdots+c_{n(2(\lambda+1)\bar N\nu(r_i+1))}\psi_{n(2(\lambda+1)\bar N\nu(r_i+1))}(x)+$$

$$+c_{m(\bar s''(\lambda,\lambda+1)+1,\lambda)}\psi_{m(\bar s''(\lambda,\lambda+1)+1,\lambda)}(x)+\cdots$$

$$+c_{m(\nu(r_{i+1})+2(\lambda+1)\bar N\nu(r_i+1))}\psi_{m(\nu(r_{i+1})+2(\lambda+1)\bar N\nu(r_i+1))}(x),$$

wobei die entsprechenden Anordnungen, bzw. Indizes in (65), bzw. in (70) und (71) definiert sind. Aus (66), (67), (70), (71) und aus der Definition der Funktionen $\psi_n(x)$

ergibt sich, daß für diese Anordnung (70) und (71) im Falle $\lambda+1$ bestehen. Durch vollständiger Induktion bekommen wir also die Anordnung

$$\sum_{t=1}^{\nu(r_{i+1}+1)-\nu(r_0)} c_{n(t,i+1)}\psi_{n(t,i+1)}(x)$$

der Summe $\sum_{n=\nu(r_0)+1}^{\nu(r_{i+1}+1)} c_n\psi_n(x)$ derart, daß mit gewissen Indizes $1 \leqq i'(l, i+1) \leqq \leqq i''(l, i+1) \leqq \nu(r_{i+1}+1)-\nu(r_0)$

$$\sum_{t=i'(l,i+1)}^{i''(l,i+1)} c_{n(t,i+1)}\psi_{n(t,i+1)}(x) > \frac{C_{13}(K)}{32}\sum_{j=1}^{i+1} C_j \qquad (x\in E_l(i+1))$$

$(l = 1, \ldots, \nu(r_{i+1}+1)-\nu(r_{i+1}))$ erfüllt ist. Wir setzen $n(t, i+1) = \nu(r_0)+t$ $(t = \nu(r_{i+1}+1)+1, \ldots, \nu(r_{i+2}))$. Damit bekommen wir eine Anordnung

$$\sum_{t=1}^{\nu(r_{i+2})-\nu(r_0)} c_{n(t,i+1)}\psi_{n(t,i+1)}(x)$$

der Summe $\sum_{n=\nu(r_0)+1}^{\nu(r_{i+2})} c_n\psi_n(x)$ derart, daß (46) im Falle $i+1$ besteht. Durch vollständiger Induktion erhalten wir also eine Anordnung $\sum_{k=1}^{\nu(k_2)-\nu(k_1)} c_{m(l)}\psi_{m(l)}(x)$ der Summe $\sum_{n=\nu(k_1)+1}^{\nu(k_2)} c_n\psi_n(x)$ derart, daß

$$\max_{\nu(k_1)<\lambda\leqq\nu(k_2)} \sum_{l=1}^{\lambda} c_{m(l)}\psi_{m(l)}(x) > \frac{C_{13}(K)}{64}\sum_{j=1}^{j_0} C_j \qquad (x\in\bar{E}) \tag{72}$$

besteht, wobei

$$\bar{E} = \bigcup_{l=1}^{\nu(r_{j_0}+1)-\nu(r_{j_0})} E_l(j_0)$$

ist. Nach (45) ist

$$m(\bar{E}) = C_{11}(K)/16. \tag{73}$$

Es sei $C_{14}(K)$ diejenige positive Konstante, für die

$$1/3C_{14}(K)+(1-1/C_{14}(K))K^2 = 1 \tag{74}$$

gilt $\left(C_{14}(K) = \dfrac{3K^2-1}{3K^2-3}\right)$. Wir setzen endlich

$$\chi_n(x) = \begin{cases} \psi_n(3C_{14}(K)x) & (x\in(0, 1/C_{14}(K))), \\ Kr_n((x-1/C_{14}(K))/(1-1/C_{14}(K)) & (x\in(1/C_{14}(K), 1)) \end{cases}$$

$(n = \nu(k_1)+1, \ldots, \nu(k_2))$. Nach (74) bilden diese Funktionen ein K-beschränktes ONS. Es sei $F(\subseteqq(0, 1))$ diejenige Menge, die aus $\bar{E}$ mit der linearen Transformation $y = x/3C_{14}(K)$ entsteht. Aus (74) folgt

$$m(F) = C_{15}(K). \tag{75}$$

Weiterhin aus (72) erhalten wir

$$\max_{\nu(k_1)<\lambda\leqq\nu(k_2)} \sum_{l=1}^{\lambda} c_{m(l)}\chi_{m(l)}(x) > C_{16}(K)\sum_{j=1}^{j_0} C_j \tag{76}$$

$$\left(x\in F;\ C_{16}(K) = \frac{C_{13}(K)}{64}\right).$$

Aus der Definition von c_n, weiterhin aus (43), (44), (75) und (76) folgt

$$I^{\frac{1}{2}}(c_{m(1)}, \ldots, c_{m(\nu(k_2)-\nu(k_1))}; K) > \tag{77}$$

$$> C_{17}(K)\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\left(a^2_{\nu(k)+1} + \sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)} a^2_{\nu(k)+l}\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Da nach der Definition der Folge $\{c_n\}$ $|c_{m(l)}|\leqq|a_{m(l)}|$ $(l = 1, \ldots, \nu(k_2)-\nu(k_1))$ gilt, nach einem bekannten Resultate ([8], Hilfssatz II) ergibt sich

$$I^{\frac{1}{2}}(a_{m(1)}, \ldots, a_{m(\nu(k_2)-\nu(k_1))}; K) \geqq C_{18}(K) I^{\frac{1}{2}}(c_{m(1)}, \ldots, c_{m(\nu(k_2)-\nu(k_1))}; K). \tag{78}$$

Aus (77) und (78) bekommen wir

$$I^{\frac{1}{2}}(a_{m(1)}, \ldots, a_{m(\nu(k_2)-\nu(k_1))}; K) \geqq C_{19}(K)\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\left(a^2_{\nu(k)+1} + \sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)} a^2_{\nu(k)+l}\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Daraus mit Anwendung des Hilfssatzes III erhalten wir den Hilfssatz I im Falle (42).

7. Endlich betrachten wir den Fall

(79)
$$\frac{1}{2}\sum_{k=k_1+1}^{k_2-1}\left(a^2_{\nu(k)+1} + \sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)} a^2_{\nu(k)+l}\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}} > \sum_{k=k_1+1}^{k_2-1} |a_{\nu(k+1)}|\left(1 + \sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)} \log^2 l\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir setzen $c_n = a_n$ $(n = \nu(k_1)+1, \ldots, \nu(k_1+1))$, $c_n = a_{\nu(k)+p(\nu(k)-\nu(k-1))}$

$$(n = \nu(k)+(p-1)(\nu(k)-\nu(k-1))+1, \ldots, \nu(k)+p(\nu(k)-\nu(k-1));$$

$$p = 1, \ldots, (\nu(k+1)-\nu(k))(\nu(k)-\nu(k-1)),\quad k = k_1+1, \ldots, k_2-1).$$

Aus (79) folgt durch einfacher Rechnung

$$\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\left(a_{\nu(k)+1}^2+\sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)}a_{\nu(k)+l}^2\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}}\leqq\left(c_{\nu(k_1)+1}^2+\sum_{l=2}^{\nu(k_1+1)-\nu(k_1)}c_{\nu(k_1)+l}^2\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\sum_{k=k_1+1}^{k_2-1}|a_{\nu(k)}|\left(1+\sum_{l=2}^{\nu(k)-\nu(k-1)}\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=k_1+1}^{k_2-1}\left(c_{\nu(k)+1}^2+\sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)}c_{\nu(k)+l}^2\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}}\leqq$$

$$\leqq 2\left(c_{\nu(k_1)+1}^2+\sum_{l=2}^{\nu(k_1+1)-\nu(k_1)}c_{\nu(k_1)+l}^2\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=k_1+1}^{k_2-1}|a_{\nu(k+1)}|\left(1+\sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)}\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\sum_{k=k_1+1}^{k_2-1}\left(c_{\nu(k)+1}^2+\sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)}c_{\nu(k)+l}^2\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}}\leqq$$

$$\leqq 2\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\left(c_{\nu(k)+1}^2+\sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)}c_{\nu(k)+l}^2\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\left(a_{\nu(k)+1}^2+\sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)}a_{\nu(k)+l}^2\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}},$$

woraus folgt

$$\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\left(a_{\nu(k)+1}^2+\sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)}a_{\nu(k)+l}^2\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}}\leqq 4\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\left(c_{\nu(k)+1}^2+\sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)}c_{\nu(k)+l}^2\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dann gibt es eine ganze Zahl s $(0\leqq s\leqq 2)$ mit

$$\frac{1}{12}\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\left(a_{\nu(k)+1}^2+\sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)}a_{\nu(k)+l}^2\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}}\leqq$$

$$\leqq\sum_{\substack{i\\ k_1\leqq 3i+s\leqq k_2-1}}\left(c_{\nu(3i+s)+1}^2+\sum_{l=2}^{\nu(3i+s+1)-\nu(3i+s)}c_{\nu(3i+s)+l}^2\log^2 l\right)^{\frac{1}{2}};$$

die Indizes $(k_1\leqq)\,3i+s\,(\leqq k_2-1)$ bezeichnen wir der Reihe nach mit $r_1<\cdots<r_{j_0}$; weiterhin sei $r_0=k_1$, $r_{j_0+1}=k_2$.

Dann können wir den Beweis in 6 mit dieser Folge $\{c_n\}$ und mit diesen Indizes r_j wiederholen, und so bekommen wir den Hilfssatz I auch im Falle (79).

Damit haben wir den Hilfssatz I vollständig bewiesen.

8. Endlich werden wir Satz I mit Anwendung des Hilfssatzes I beweisen. Wir nehmen $S=\infty$ an.

Ist $\{a_n\}\notin l^2$, dann divergiert die Rademachersche Reihe

$$\sum a_n r_n(x)$$

nach dem Khintchine—Kolmogoroffschen Satz in natürlicher Anordnung ihrer Glieder fast überall.

Wir nehmen endlich $S=\infty$ und $\{a_n\}\in l^2$ an. In diesem Falle können wir $|a_1|\geqq \geqq |a_2|\geqq \cdots$ annehmen. Also ist

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_{\nu(k)+1}^2+\sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)} a_{\nu(k)+l}^2 \log^2 l\right)^{\frac{1}{2}} \geqq A_4 \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{n=\nu(k)+1}^{\nu(k+1)} a_n^2 \log^2 n\right\}^{\frac{1}{2}} = S = \infty.$$

Dann können wir eine Indexfolge $(C_0(K)\leqq)\varkappa_1<\cdots<\varkappa_r<\cdots$ derart angeben, daß

$$\sum_{k=\varkappa_r}^{\varkappa_{r+1}-1}\left(a_{\nu(k)+1}^2+\sum_{l=2}^{\nu(k+1)-\nu(k)} a_{\nu(k)+l}^2 \log^2 l\right)^{\frac{1}{2}} \geqq 1 \qquad (r=1, 2, \ldots) \tag{80}$$

besteht.

Durch Induktion werden wir ein K-beschränktes ONS von Treppenfunktionen $\{\Phi_n(x)\}$ und eine Folge von einfachen Mengen $E_r(\subseteqq(0, 1))$ mit folgenden Eigenschaften definieren:

a) Die Mengen E_r $(r=1, 2, \ldots)$ sind stochastich unabhängig, und für jedes r ist.

$$m(E_r)\geqq C_1(K). \tag{81}$$

b) Für jedes r gibt es eine Anordnung

$$\sum_{k=\nu(\varkappa_r)+1}^{\nu(\varkappa_{r+1})} a_{n(k)}\Phi_{n(k)}(x)$$

der Summe

$$\sum_{n=\nu(\varkappa_r)+1}^{\nu(\varkappa_{r+1})} a_n\Phi_n(x)$$

derart, daß

$$\max_{\nu(\varkappa_r)<i\leqq j\leqq \nu(\varkappa_{r+1})}\left|\sum_{k=i}^{j} a_{n(k)}\Phi_{n(k)}(x)\right| \geqq C_2(K) \qquad (x\in E_r) \tag{82}$$

gilt. ($C_0(K)$, $C_1(K)$ und $C_2(K)$ sind im Hilfssatz I definiert.)

Es sei

$$\Phi_n(x)=r_n(x) \qquad (n=1, \ldots, \nu(\varkappa_1)).$$

Wir wenden dann den Hilfssatz I im Falle $k_1=\varkappa_1$, $k_2=\varkappa_2$, $\{a_n\}$

$$(n = \nu(\varkappa_1)+1, \ldots, \nu(\varkappa_2))$$

an, die entsprechenden Funktionen, bzw. die entsprechenden Menge bezeichnen wir mit $\bar{\Phi}_n(x)$ $(n = \nu(\varkappa_1)+1, \ldots, \nu(\varkappa_2))$, bzw. mit $\bar{E}_1$. Da die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(n=1, \ldots, \nu(\varkappa_1))$ Treppenfunktionen sind, gibt es eine Zerlegung von (0, 1) in endlich viele paarweise disjunkte Intervalle $I_1, \ldots, I_\sigma$ derart, daß jede Funktion $\Phi_n(x)$

$(n=1, \ldots, \nu(\varkappa_1))$ in jedem Intervall I_s konstant ist; die zwei Hälfte von I_s bezeichnen wir mit I_s', bzw. mit I_s''. Wir setzen

$$\Phi_n(x) = \sum_{s=1}^{\sigma} \bar{\Phi}_n(I_s'; x) - \sum_{s=1}^{\sigma} \bar{\Phi}_n(I_s''; x) \qquad (n = \nu(\varkappa_1)+1, \ldots, \nu(\varkappa_2))$$

und

$$E_1 = \bigcup_{s=1}^{\sigma} (\bar{E}_1(I_s') \cap \bar{E}_1(I_s'')).$$

Offensichtlich bilden die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(n=1, \ldots, \nu(\varkappa_2))$ ein K-beschränktes ONS; die Menge E_1 ist einfach; weiterhin, auf Grund des Hilfssatzes I und (80) sind (81) und (82) für $r=1$ erfüllt.

Es sei $r_0 (\geqq 2)$ eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(n=1, \ldots, \nu(\varkappa_{r_0}))$ und die einfachen Mengen $E_1, \ldots, E_{r_0-1}$ schon derart definiert sind, daß diese Funktionen ein K-beschränktes ONS bilden, diese Mengen stochastisch unabhängig sind, weiterhin (81) und (82) für $r = 1, \ldots, r_0-1$ erfüllt sind.

Dann wenden wir den Hilfssatz I im Falle $k_1 = \varkappa_{r_0}$, $k_2 = \varkappa_{r_0+1}$, $\{a_n\}$ $(n = \nu(\varkappa_{r_0})+1, \ldots, \nu(\varkappa_{r_0+1}))$. Die entsprechenden Funktionen, bzw. die entsprechende Menge bezeichnen wir mit $\bar{\Phi}_n(x)$ $(n = \nu(\varkappa_{r_0})+1, \ldots, \nu(\varkappa_{r_0+1}))$, bzw. mit $\bar{E}_{r_0}$. Da die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(n=1, \ldots, \nu(\varkappa_{r_0}))$ Treppenfunktionen und die Mengen $E_1, \ldots, E_{r_0-1}$ einfach sind, gibt es eine Zerlegung des Intervalls (0, 1) in endlich viele paarweise disjunkte Intervalle $J_1, \ldots, J_\varrho$ derart, daß jede Funktion $\Phi_n(x)$ $(n=1, \ldots, \nu(\varkappa_{r_0}))$ in jedem J_r konstant ist, und jede Menge E_r $(r = 1, \ldots, r_0-1)$ die Vereinigung gewisser J_r ist. Die zwei Hälfte von J_r bezeichnen wir mit J_r', bzw. mit J_r''. Wir setzen

$$\Phi_n(x) = \sum_{r=1}^{\varrho} \bar{\Phi}_n(J_r'; x) - \sum_{r=1}^{\varrho} \bar{\Phi}_n(J_r''; x) \qquad (n = \nu(\varkappa_{r_0})+1, \ldots, \nu(\varkappa_{r_0+1}))$$

und

$$E_{r_0} = \bigcup_{r=1}^{\varrho} (\bar{E}_{r_0}(J_r') \cup \bar{E}_{r_0}(J_r'')).$$

Offensichtlich bilden die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(n=1, \ldots, \nu(\varkappa_{r_0+1}))$ ein K-beschränktes ONS, und die Mengen $E_1, \ldots, E_{r_0}$ sind stochastisch unabhängig. Weiterhin, auf Grund des Hilfssatzes I und (80) folgt, daß (81) und (82) auch für $r = r_0+1$ bestehen. Das angekündigte Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ und die Mengenfolge $\{E_r\}$ mit den erwähnten Eigenschaften ergibt sich also durch Induktion.

Wir betrachten die in *b)* angegebene Anordnung

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n(k)} \Phi_{n(k)}(x) \qquad (\text{für } 1 \leqq k \leqq \nu(\varkappa_1) \text{ ist } n(k)=k) \tag{83}$$

der Reihe (3). Ist $x \in \overline{\lim_{r\to\infty}} E_r$, so gilt (82) für unendlich viele r. Daraus folgt, daß die Reihe (3) im Punkt x divergiert. Wegen der stochastischen Unabhängigkeit der Mengenfolge $\{E_r\}$ und wegen (81) folgt

$$m(\overline{\lim_{r\to\infty}} E_r) = 1$$

durch Anwendung des zweiten Borel—Cantellischen Lemmas. Die Reihe (83) divergiert also fast überall.

Damit haben wir den Satz I bewiesen.

Schriftenverzeichnis

[1] D. E. MENCHOFF, Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie), *Fundamenta Math.*, **4** (1923), 82—105.

[2] ———— Sur les séries de fonctions orthogonales bornées dans leur ensembles, *Recueil math. Moscou*, **3 (43)** (1938), 103—120.

[3] H. RADEMACHER, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **87** (1922), 112—138.

[4] K. TANDORI, Über die orthogonalen Funktionen. I, *Acta Sci. Math.*, **18** (1957), 57—130.

[5] ———— Über die orthogonalen Funktionen. X (Unbedingte Konvergenz), *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 185—221.

[6] ———— Über die Konvergenz der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.*, **24** (1963), 139—151.

[7] ———— Über die Konvergenz der Orthogonalreihen. II, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 219—232.

[8] ———— Über die Konvergenz der Orthogonalreihen. III, *Publicationes Math. Debrecen*, **12** (1965), 127—157.

[9] ———— Eine Bemerkung zum Konvergenzproblem der Orthogonalreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **20** (1969), 315—322.

(Eingegangen am 22. Oktober 1969)