О характеристических функциях обратимого оператора

В. М. БРОДСКИЙ, И. Ц. ГОХБЕРГ и М. Г. КРЕЙН (Одесса и Кишинев, СССР)

Начиная с известных работ М. С. Лившица [1, 2], понятие характеристической функции стало играть фундаментальную роль при исследовании спектральных свойств операторов. Это понятие претерпело большую эволюцию, которая еще, возможно, не закончилась. По-видимому, в определенном смысле можно считать окончательным определение характеристической функции (W-функции) оператора, «близкого» к самосопряженному, введенное М. С. Бродским [3, 4].

В настоящей статье дается подробное обоснование результатов [5], которые, по мнению авторов, должны способствовать стабилизации нового определения характеристической функции (Θ-функции) обратимого оператора «близкого» к унитарному. Это определение удовлетворяет следующим естественным требованиям: 1. Θ-функция удовлетворяет фундаментальным тождествам и неравенствам (см. § 2). 2. Θ-функция выдерживает дробно-линейные преобразования. При этом обнаруживается ее прямая связь с W-функцией (см. § 3). 3. По Θ-функции с необходимой точностью восстанавливается оператор (и более того — соответствующий узел) (§ 6). 4. Θ-функция допускает полную внутреннюю аналитическую характеристику (§§ 4, 5, 6). 5. Для Θ-функции имеет место теорема умножения [6, 7]. 6. При весьма общих условиях относительно основного оператора Θ-функция допускает мультипликативное представление (см. § 7 и [8]).

Существенно также, что выработанные ранее определения характеристической функции (см. [1, 2, 9—14]) укладываются в общую схему определения Θ-функции (§ 1). Наконец, добавим, что Θ-функция уже нашла важные приложения в работах Л. А. Сахновича [15, 16][1]), а совсем недавно обнаружилось, что она играет существенную роль также в теории резольвентных матриц эрмитовых операторов [17].

[1]) В этих работах, по существу, используется определение характеристической функции обратимого оператора, несущественно отличающееся от нашего определения Θ-функции.

§ 1. Определение характеристической функции

Как известно [18, 4], *$\mathcal{W}$-узлом* для основного оператора $A\in[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]$[2]) называется совокупность гильбертовых пространств $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ и операторов $A\in[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]$, $S\in[\mathfrak{G},\mathfrak{H}]$, $J\in[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$, таких что

$$\text{(1.1)}\qquad \operatorname{Im}A = SJS^* \quad \left(\operatorname{Im}A=\frac{A-A^*}{2i}\right),\quad J^2=I,\ J^*=J.$$

$\mathcal{W}$-узлу сопоставляется *характеристическая функция* (*W-функция*), определенная равенством[3])

$$\text{(1.2)}\qquad W(\lambda)=I+2iJS^*(A^*-\lambda I)^{-1}S \qquad (\bar\lambda\bar\in\sigma(A)).$$

Эта функция была введена М. С. Бродским [3, 4] в обобщение определения W-характеристической функции, предложенного М. С. Лившицем [19]. Определение W-функции допускает естественное расширение на случай неограниченного оператора с ограниченной мнимой компонентной [20, 21].

Более сложным является понятие характеристической функции оператора «близкого» к унитарному (Θ-функции), которое сравнительно недавно появилось в различных исследованиях.

Пусть T — некоторый оператор из $[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]$. Всегда найдется гильбертово пространство $\mathfrak{G}$ и операторы $R\in[\mathfrak{G},\mathfrak{H}]$ и $J\in[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ такие, что

$$\text{(1.3)}\qquad I-T^*T=RJR^*,\quad J^2=I,\quad J^*=J.$$

В самом деле, этого можно достигнуть, положив, например,

$$\text{(1.4)}\quad \mathfrak{G}=\mathfrak{D}_T\left(=\overline{(I-T^*T)\mathfrak{H}}\right),\quad J=\operatorname{sign}(I-T^*T)|\mathfrak{D}_T,\quad R=|I-T^*T|^{\frac12}|\mathfrak{D}_T.$$

Если оператор T обратим ($T^{-1}\in[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]$), то совокупность пространств $\mathfrak{H},\mathfrak{G}$ и операторов T,R,J связанных между собою соотношениями (1.3), назовем *$\mathcal{Y}$-узлом* и обозначим символом

$$\text{(1.5)}\qquad \mathcal{Y}=(\mathfrak{H},\mathfrak{G};T,R,J).$$

При этом оператор T назовем *основным* оператором $\mathcal{Y}$-узла. Очевидно, что существует множество различных узлов с основным оператором T. Следует подчеркнуть, что даже при фиксированном $\mathfrak{G}$, если оно бесконечномерно, и фиксированном J, если оно индефинитно, возможно включение оператора T в различные $\mathcal{Y}$-узлы, в которых операторы R будут отличаться друг от друга на неограниченные правые «J-унитарные» множители.

---

[2]) Если $\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2$ — гильбертовы пространства, то символом $[\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2]$ обозначается множество всех линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$. Для $A\in[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]$ через $\sigma(A)$ обозначается спектр оператора A.

[3]) Некоторые авторы, в частности, М. С. Бродский записывают W-функцию в ином виде:

$$W(\lambda)=I-2iS^*(A-\lambda I)^{-1}SJ \qquad (\lambda\bar\in\sigma(A)).$$

Лемма 1.1. *Для любого узла* (1.5) *найдется обратимый оператор* $K \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ *такой, что*

$$J - R^* R = K^* J K. \tag{1.6}$$

Если обратимый оператор $K \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ *удовлетворяет условию* (1.6), *то он представим в виде*

$$K = U_0 H_0, \tag{1.7}$$

где $U_0, H_0 \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ — *операторы, обладающие следующими свойствами*

$$U_0^* J U_0 = U_0 J U_0^* = J, \tag{1.8}$$

$$H_0^2 = I - JR^* R, \quad \sigma(H_0) \subset (0, \infty), \quad (JH_0)^* = JH_0. \tag{1.9}$$

Доказательство. Спектр оператора $RJR^* = I - T^*T$ лежит на открытом интервале $(-\infty, 1)$. Следовательно[4]), на этом же интервале расположен спектр оператора JR^*R. Таким образом, оператор $G = I - JR^*R$ обладает положительным спектром и обратим. Кроме того, G является J-самосопряженным оператором. В силу теоремы В. П. Потапова и Ю. П. Гинзбурга [23, 24] (см. также [25]) всякий обратимый J-самосопряженный оператор G с положительным спектром является квадратом некоторого обратимого J-самосопряженного оператора $H_0 = G^{\frac{1}{2}}$ с положительным спектром. Следовательно,

$$J - R^* R = JG = (JG^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}})^* = (G^{\frac{1}{2}})^* (JG^{\frac{1}{2}})^* = (G^{\frac{1}{2}})^* J G^{\frac{1}{2}}$$

и можно положить $K = G^{\frac{1}{2}}$.[5])

Пусть обратимый оператор $K \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$ удовлетворяет условию (1.6). Отсюда и из теоремы Потапова—Гинзбурга [23, 24] (см. также теоремы 4.3, 5.2 статьи [25]) вытекают формулы (1.8) и (1.9). Лемма доказана.

Характеристической функцией (*Θ-функцией*) *узла* (1.5) называется функция $\Theta_{\mathcal{Y}}(\zeta)$, определенная равенством

$$\Theta_{\mathcal{Y}}(\zeta) = J(\mathcal{K}^*)^{-1}(J - R^*(I - \zeta T^*)^{-1} R) \qquad (\zeta \bar{\in} \sigma[(T^*)^{-1}]), \tag{1.10}$$

где K — произвольный обратимый оператор из $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$, являющийся решением уравнения (1.6). Таким образом, *Θ-функция определяется с точностью до левого J-унитарного множителя* $U \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$.

---

[4]) Это утверждение вытекает из известного предложения [22] о том, что если оператор $BA - \lambda I$ $(\lambda \neq 0)$ обратим, то обратим оператор $AB - \lambda I$, причем

$$(AB - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} I - \frac{1}{\lambda^2} AB + \frac{1}{\lambda^2} (BA - \lambda I)^{-1} BAB.$$

В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться соотношением $A(BA - \lambda I)^{-1} = (AB - \lambda I)^{-1} A$, которое вытекает из очевидного равенства $A(BA - \lambda I) = (AB - \lambda I) A$.

[5]) Доказательством этого предложения авторы обязаны Ю. Л. Шмульяну.

Мы не будем различать Θ-функции, отвечающие одному и тому же узлу.

Заметим, что $\Theta_{\mathscr{Y}}(0) = J(K^*)^{-1}(J-R^*R) = J(K^*)^{-1}K^*JK = K$, и поэтому

$$\Theta_{\mathscr{Y}}^*(0)J\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta) = J - R^*(I-\zeta T^*)^{-1}R. \tag{1.11}$$

Подчеркнем, что и обратно, *всякая оператор-функция* $\Theta(\zeta)$, *для которой выполняется равенство* $\Theta^*(0)J\Theta(\zeta) = J-R^*(I-\zeta T^*)^{-1}R$ *и оператор* $\Theta(0)\in[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ *обратим* $(\Theta^{-1}(0)\in[\mathfrak{G},\mathfrak{G}])$, *является некоторой характеристической функцией узла* $Y = (\mathfrak{H}, \mathfrak{G};\ T, R, J)$.

Θ-функции $\mathscr{Y}$-узлов, в которых оператор T является основным, будем называть *Θ-функциями оператора T.*

Отметим, что в частном случае, когда $\mathfrak{G}$, R и J выбраны в соответствии с равенствами (1. 4), оператор K следует положить равным сужению $UT|\mathfrak{D}_T$, где U — какой-либо линейный ограниченный оператор, действующий из пространства $\mathfrak{D}_{T^*} = \overline{(I-TT^*)\mathfrak{H}}$ в пространство $\mathfrak{D}_T$ так, что

$$U^*JUJ_{T^*}, \quad UJ_{T^*}U^* = J \quad \left(J_{T^*} = \operatorname{sign}(I-TT^*)\,|\,\mathfrak{D}_{T^*}\right).$$

Тогда Θ-функция примет вид

$$\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta) = U\left(J_{T^*}(T^*)^{-1}J - J_{T^*}(T^*)^{-1}\,|I-T^*T|^{\frac{1}{2}}(I-\zeta T^*)^{-1}\,|I-T^*T|^{\frac{1}{2}}\right)\Big|\,\mathfrak{D}_T. \tag{1.12}$$

Если отбросить множитель U и произвести некоторые простые преобразования, то придем к оператор-функции

$$\Theta_T(\zeta) = \left(T - \zeta J_{T^*}|I-TT^*|^{\frac{1}{2}}(I-\zeta T^*)^{-1}\,|I-T^*T|^{\frac{1}{2}}\right)\Big|\,\mathfrak{D}_T. \tag{1.13}$$

Значения этой функции принадлежат $[\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}]$. Функция (1. 13) имеет смысл для любых операторов $T\in[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]$.

Поясним, как из (1. 12) получить (1. 13). Ввиду равенств

$$(T^*)^{-1}\,|I-T^*T|^{\frac{1}{2}} = |I-TT^*|^{\frac{1}{2}}(T^*)^{-1}$$

и

$$(T^*)^{-1}(I-\zeta T^*)^{-1} = (T^*)^{-1} + \zeta(I-\zeta T^*)^{-1}$$

имеем по отбрасывании множителя $\mathscr{U}$

$$\begin{aligned}\Theta_T(\zeta) = \big(J_{T^*}(T^*)^{-1}J - J_{T^*}(T^*)^{-1}\,&|I-T^*T| - \\ &- \zeta J_{T^*}|I-TT^*|^{\frac{1}{2}}(I-\zeta T^*)^{-1}\,|I-T^*T|^{\frac{1}{2}}\big)\big|\,\mathfrak{D}_T.\end{aligned} \tag{1.14}$$

Так как $(T^*)^{-1}J = J_{T^*}(T^*)^{-1}\,|\,\mathfrak{D}_T$, то

$$J_{T^*}(T^*)^{-1}\,|I-T^*T|\,\big|\,\mathfrak{D}_T = J_{T^*}(T^*)^{-1}J(I-T^*T)\,|\,\mathfrak{D}_T = \left(J_{T^*}(T^*)^{-1}J - T\right)\big|\,\mathfrak{D}_T.$$

Подставляя найденное значение оператора $J_{T^*}(T^*)^{-1}|I-T^*T|\,|\mathfrak{D}_T$ в формулу (1. 14), придем к (1. 13).

Впервые характеристическая функция в виде (1. 13) была определена Ю. Л. Шмульяном [10], который показал, что это определение эквивалентно данному М. С. Лившицем и В. П. Потаповым [9]. Последние, правда, рассматривали лишь случай $\mathfrak{d}_T = \mathfrak{d}_{T^*} < \infty$, где $\mathfrak{d}_T = \dim \overline{(I-T^*T)\mathfrak{H}}$. Одновременно Ю. Л. Шмульян показал, что определение этих двух авторов распространяется на общий случай любых $\mathfrak{d}_T, \mathfrak{d}_{T^*}$.

В случае сжатия, т. е. при $J = I$ функция (1. 13) принимает вид

$$\Theta_{\mathcal{Y}}(\zeta) = \left(T - \zeta(I-TT^*)^{\frac{1}{2}}(I-\zeta T^*)^{-1}(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}\right)\Big|\mathfrak{D}_T. \tag{1.15}$$

Именно этим равенством определяли характеристическую функцию Б. С.-Надь и Ч. Фояш, которые пришли к ней независимым и весьма оригинальным путем [13, 14].

Для обратимого оператора T и $\mathfrak{d}_T < \infty$ равенством (1. 11) в матричной форме определял характеристическую функцию А. В. Кужель [11].

§ 2. Основные тождества и неравенства

Тождества, получаемые в этом параграфе, обобщают равенство (1. 11); они играют важную роль в дальнейшем.

Теорема 2. 1. (Основные тождества) *Пусть $\Theta_{\mathcal{Y}}(\zeta)$ — характеристическая функция узла* (1. 5). *Тогда для любых $\zeta, \eta \in \sigma[(T^*)^{-1}]$ справедливы соотношения*:

$$\Theta^*_{\mathcal{Y}}(\eta) J \Theta_{\mathcal{Y}}(\zeta) = J - (1 - \zeta\bar{\eta}) R^*(I - \bar{\eta}T)^{-1}(I - \zeta T^*)^{-1} R, \tag{2.1}$$

$$\Theta_{\mathcal{Y}}(\zeta) J \Theta^*_{\mathcal{Y}}(\eta) = J - (1 - \zeta\bar{\eta}) S^*(I - \zeta T^*)^{-1}(I - \bar{\eta}T)^{-1} S, \tag{2.2}$$

где $S = TR\Theta_{\mathcal{Y}}^{-1}(0)J$.

Доказательство. Согласно (1. 10)

$$\Theta^*_{\mathcal{Y}}(\eta) J \Theta_{\mathcal{Y}}(\zeta) = \left(J - F(\eta)\right)(K^*JK)^{-1}\left(J - F^*(\zeta)\right),$$

где $F(\zeta) = R^*(I - \bar{\zeta}T)^{-1}R$ и, стало быть,

$$\Theta^*_{\mathcal{Y}}(\eta) J \Theta_{\mathcal{Y}}(\zeta) = J(K^*JK)^{-1}J - F(\eta)(K^*JK)^{-1}J -$$
$$- J(K^*JK)^{-1}F^*(\zeta) + F(\eta)(K^*JK)^{-1}F^*(\zeta).$$

Преобразуем каждое из слагаемых правой части последнего равенства.

Так как

$$R(K^*JK)^{-1}J = R(J - R^*R)^{-1}J = (I - RJR^*)^{-1}R = (T^*T)^{-1}R, \tag{2.3}$$

то

$$F(\eta)(K^*JK)^{-1}J = R^*T^{-1}(I - \bar{\eta}T)^{-1}(T^*)^{-1}R$$

и

$$J(K^*JK)^{-1}F^*(\zeta) = R^*T^{-1}(I - \zeta T^*)^{-1}(T^*)^{-1}R.$$

Формула $R(K^*JK)^{-1}R^* = T^{-1}(I-TT^*)(T^*)^{-1}$, вытекающая из (2. 3), непосредственно влечет за собой равенство

$$F(\eta)(K^*JK)^{-1}F^*(\zeta) = R^*T^{-1}(I-\bar{\eta}T)^{-1}(I-TT^*)(I-\zeta T^*)^{-1}(T^*)^{-1}R.$$

Таким образом,

$$\Theta_{\mathscr{Y}}^*(\eta)J\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta) = J(K^*JK)^{-1}J - R^*T^{-1}G(\eta,\zeta)(T^*)^{-1}R \tag{2. 4}$$

где

$$G(\eta,\zeta) = (I-\bar{\eta}T)^{-1} + (I-\zeta T^*)^{-1} - (I-\bar{\eta}T)^{-1}(I-TT^*)(I-\zeta T^*)^{-1}. \tag{2. 5}$$

Учитывая, что

$$(I-\bar{\eta}T)^{-1}TT^*(I-\zeta T^*)^{-1} = \frac{1}{\zeta\bar{\eta}}\big((I-\bar{\eta}T)^{-1}-I\big)\big((I-\zeta T^*)^{-1}-I\big),$$

получим

$$G(\eta,\zeta) = \left(1-\frac{1}{\zeta\bar{\eta}}\right)\big((I-\bar{\eta}T)^{-1} + (I-\zeta T^*)^{-1} - (I-\bar{\eta}T)^{-1}(I-\zeta T^*)^{-1} - I\big) + I,$$

или

$$G(\eta,\zeta) = I - \left(1-\frac{1}{\zeta\bar{\eta}}\right)\big((I-\bar{\eta}T)^{-1}-I\big)\big((I-\zeta T^*)^{-1}-I\big).$$

Отсюда следует

$$G(\eta,\zeta) = I + (1-\zeta\bar{\eta})T(I-\bar{\eta}T)^{-1}(I-\zeta T^*)^{-1}T^*. \tag{2. 6}$$

Подставляя выражение для $G(\eta,\zeta)$ из (2. 6) в (2. 4), получим

$$\Theta_{\mathscr{Y}}^*(\eta)J\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta) = J(K^*JK)^{-1}J - R^*T^{-1}(T^*)^{-1}R - \\ -(1-\zeta\bar{\eta})R^*(I-\bar{\eta}T)^{-1}(I-\zeta T^*)^{-1}R.$$

На конец,

$$R^*(T^*T)^{-1}R = R^*(I-RJR^*)^{-1}R = J(J-R^*R)^{-1}R^*R = \\ = J(K^*JK)^{-1}R^*R = J(K^*JK)^{-1}J-J.$$

Из последних двух равенств вытекает тождество (2. 1).

Перейдем к доказательству тождества (2. 2). Для этого рассмотрим произведение

$$K^*J\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta)J\Theta_{\mathscr{Y}}^*(\eta)JK = \big(J-R^*(I-\zeta T^*)^{-1}R\big)J\big(J-R^*(I-\bar{\eta}T)^{-1}R\big).$$

Легко видеть, что

$$K^*J\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta)J\Theta_{\mathscr{Y}}^*(\eta)JK = J - R^*G_1(\eta,\zeta)R,$$

где

$$G_1(\eta,\zeta) = (I-\bar{\eta}T)^{-1} + (I-\zeta T^*)^{-1} - (I-\zeta T^*)^{-1}(I-T^*T)(I-\bar{\eta}T)^{-1}.$$

Аналогично тому, как было показано, что функция (2. 5) представима в виде (2. 6), доказывается равенство

$$G_1(\eta,\zeta) = I + (1-\zeta\bar{\eta})T^*(I-\zeta T^*)^{-1}(I-\bar{\eta}T)^{-1}T,$$

и поэтому

$$K^*\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta)J\Theta^*_{\mathscr{Y}}(\eta)JK = J-R^*R-(1-\zeta\bar{\eta})R^*T^*(I-\zeta T^*)^{-1}(I-\bar{\eta}T)^{-1}TR.$$

Умножая обе части последнего равенства слева и справа соответственно на $(K^*J)^{-1}$ и $(JK)^{-1}$, прийдем к тождеству (2. 2). Теорема доказана.

Следствие 2. 1. *Пусть* $\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta)$ — *характеристическая функция узла* (1. 5). *Тогда*

$$(2.7)\quad J-\Theta^*_{\mathscr{Y}}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)J\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta)=0,\quad J-\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta)J\Theta^*_{\mathscr{Y}}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)=0\qquad (\zeta,\bar{\zeta}^{-1}\bar{\in}\sigma[(T^*)^{-}])$$

и

$$(2.8)\qquad J-\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta)J\Theta^*_{\mathscr{Y}}(\zeta),\quad J-\Theta^*_{\mathscr{Y}}(\zeta)J\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta)\begin{cases}\geqq 0 & (|\zeta|<1)\\ =0 & (|\zeta|=1)\\ \leqq 0 & (|\zeta|>1)\end{cases}\quad (\zeta\bar{\in}\sigma[(T^*)^{-1}]).$$

Таким образом, $\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta)$ является двусторонним J-сжатием[6]), если $|\zeta|<1$ $(\zeta\bar{\in}\sigma[(T^*)^{-1}])$ и J-растяжением, если $|\zeta|>1$ $(\zeta\bar{\in}\sigma[(T^*)^{-1}])$.

Следствие 2. 2. *Если точка* $\eta=e^{-i\varphi}$ $(0\leqq\varphi<2\pi)$ *регулярна для оператора* T, *то при соответствующем выборе оператора* K

$$(2.9)\qquad \Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta)=I-(1-\zeta e^{i\varphi})JR^*(I-e^{i\varphi}T)^{-1}(I-\zeta T^*)^{-1}R.$$

В самом деле, из равенства (2. 8) вытекает, что оператор $\Theta^*(e^{-i\varphi})$ является J-унитарным. Следовательно, полагая в формуле (2. 1) $\eta=e^{-i\varphi}$ и учитывая, что Θ — функция $\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta)$ определяется с точностью до левого J-унитарного н ожителя, придем к равенству (2. 9).

§ 3. Характеристические функции дробно-линейных преобразований оператора

В этом параграфе исследуется связь между Θ-функциями оператора T и Θ-функциями его дробно линейных преобразований. Приводимые две теоремы отвечают случаям отображения круга в круг и круга в полуплоскость.

Теорема 3. 1. *Пусть* $\mathscr{Y}=(\mathfrak{H},\mathfrak{G};\ T,\ R,\ J)$ — *некоторый узел. Если точка* a $(|a|\neq 1)$ *такова, что* $a\bar{\in}\sigma(T)$ *и* $1/\bar{a}\bar{\in}\sigma(T)$, *то совокупность* $\mathscr{Y}_a$, *состоящая из пространств* $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ *и операторов* $T_a=(T-aI)(I-\bar{a}T)^{-1}$, $R_a=(1-|a|^2)^{\frac{1}{2}}(I-aT^*)^{-1}R$, J *образует узел и*

$$(3.1)\qquad \Theta_{\mathscr{Y}}\left(\frac{\zeta+a}{1+\bar{a}\zeta}\right)=\Theta_{\mathscr{Y}_a}(\zeta).$$

---

[6]) Оператор $A\in[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]$ называется J-сжатием (J-растяжением), если

$$J-A^*JA\geqq 0\qquad (J-A^*JA\leqq 0)$$

и двусторонним J-сжатием (J-растяжением), если, кроме того,

$$J-AJA^*\geqq 0\qquad (J-AJA^*\leqq 0).$$

Доказательство. Обратимость оператора T_a очевидна. Имеем

$$I-T_a^*T_a = I-(I-aT^*)^{-1}(T^*-\bar{a}I)(T-aI)(I-\bar{a}T)^{-1} =$$
$$= (I-aT^*)^{-1}[(I-aT^*)(I-\bar{a}T)-(T^*-\bar{a}I)(T-aI)](I-\bar{a}T)^{-1}.$$

Легко проверить, что выражение, стоящее в квадратных скобках, представимо в виде $(1-|a|^2)(I-T^*T) = (1-|a|^2)RJR^*$, и, поэтому,

$$I-T_a^*T_a = (1-|a|^2)(I-aT^*)^{-1}RJR^*(I-\bar{a}T)^{-1} = R_aJR_a^*,$$

так что совокупность $\mathscr{Y}_a$ действительно образует узел.

На основании (2. 1)

$$\Theta_{\mathscr{Y}}^*(a)J\Theta_{\mathscr{Y}}(a) = J-(1-|a|^2)R^*(I-\bar{a}T)^{-1}(I-aT^*)^{-1}R, \tag{3. 2}$$

$$\Theta_{\mathscr{Y}}^*(a)J\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta') = J-(1-\bar{a}\zeta')R^*(I-\bar{a}T)^{-1}(I-\zeta'T^*)^{-1}R. \tag{3. 3}$$

Полагая $K_a = \Theta_{\mathscr{Y}}(a)$, получим из (3. 2) $K_a^*JK_a = J-R_a^*R_a$, и, следовательно,

$$\Theta_{\mathscr{Y}_a}(\zeta) = J(\Theta_{\mathscr{Y}}^*(a))^{-1}(J-R_a^*(I-\zeta T_a^*)^{-1}R). \tag{3. 4}$$

Непосредственные вычисления показывают, что при $\zeta' = (\zeta+a)(1+\bar{a}\zeta)^{-1}$

$$(1-\bar{a}\zeta')(I-\zeta'T^*)^{-1} = (1-|a|^2)(I-\zeta T_a^*)^{-1}(I-aT^*)^{-1}. \tag{3. 5}$$

Из (3. 3) вытекает уже равенство

$$\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta') = J(\Theta_{\mathscr{Y}}^*(a))^{-1}(J-(1-\bar{a}\zeta')R^*(I-\bar{a}T)^{-1}(I-\zeta'T^*)^{-1}R),$$

откуда с помощью (3. 5) и (3. 4) имеем:

$$\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta') = J(\Theta_{\mathscr{Y}}^*(a))^{-1}(J-(1-|a|^2)R^*(I-\bar{a}T)^{-1}(I-\zeta T_a^*)^{-1}(I-aT^*)^{-1}R) =$$
$$= J(\Theta_{\mathscr{Y}}^*(a))^{-1}(J-R_a^*(I-\zeta T_a^*)^{-1}R_a) = \Theta_{\mathscr{Y}_a}(\zeta).$$

Теорема доказана.

Для случая сжатия и характеристической функции, определенной равенством (1. 15), эту теорему получили Б. С.-Надь и Ч. Фояш [14].

Произвольное дробно-линейное преобразование, отображающее круг на круг, может быть записано в виде

$$\zeta' = (\alpha\zeta+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta}\zeta)^{-1} \qquad (|\alpha|^2>|\beta|^2) \tag{3. 6}$$

или $\zeta' = \varepsilon(\zeta+a)(1+\bar{a}\zeta)^{-1}$, где $a=\beta\alpha^{-1}$, а $\varepsilon=\alpha/\bar{\alpha}$. Последнее отличается от преобразования, о котором идет речь в теореме 3. 1, лишь множителем ε. Отсюда уже легко заключить, что теорема 3. 1 распространяется на случай общего преобразования (3. 6), т. е. имеет место равенство

$$\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta') = \Theta_{\mathscr{Y}'}(\zeta),$$

где $\mathscr{Y}'$ — узел, состоящий из пространств $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ и операторов

$$T' = (\bar{\alpha}T-\beta I)(\alpha I-\bar{\beta}T)^{-1}, \quad R' = (|\alpha|^2-|\beta|^2)^{\frac{1}{2}}(\bar{\alpha}I-\beta T^*)^{-1}R, \ J.$$

Естественно, что при этом приходится требовать, чтобы точки $\alpha/\bar{\beta}$ и $\beta/\bar{\alpha}$ не принадлежали спектру оператора T. Заметим, что переходы от оператора T к T' и от переменной ζ к ζ' совершаются с помощью взаимно обратных преобразований.

Теорема 3.2. *Пусть* $\mathscr{Y} = (\mathfrak{H}, \mathfrak{G};\ T, R, J)$ — *некоторый узел. Если точка* $\eta = e^{-i\varphi}$ *регулярна для оператора* T, *то совокупность, состоящая из пространств* $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ *и операторов*

$$A = i(I+e^{i\varphi}T)(I-e^{i\varphi}T)^{-1}, \quad S = (I-e^{-i\varphi}T^*)^{-1}R, \quad J \tag{3.7}$$

образует $\mathscr{W}$-*узел и*

$$\mathscr{W}\left(i\frac{\zeta e^{i\varphi}+1}{\zeta e^{i\varphi}-1}\right) = \Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta). \tag{3.8}$$

Доказательство. Легко показать, что

$$A-A^* = i(I-e^{-i\varphi}T^*)^{-1}[(I-e^{-i\varphi}T^*)(I+e^{i\varphi}T)+$$
$$+(I+e^{-i\varphi}T^*)(I-e^{i\varphi}T)](I-e^{i\varphi}T)^{-1}$$

и

$$(I-e^{-i\varphi}T^*)(I+e^{i\varphi}T)+(I+e^{-i\varphi}T^*)(I-e^{i\varphi}T) = 2(I-T^*T).$$

Следовательно,

$$\operatorname{Im} A = (I-e^{-i\varphi}T^*)^{-1}(I-T^*T)(I-e^{i\varphi}T)^{-1} = SJS^*.$$

Отсюда вытекает, что совокупность пространств $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ и операторов A, S, J действительно образует $\mathscr{W}$-узел.

Пусть $\zeta' = i(\zeta e^{i\varphi}+1)(1-e^{i\varphi}\zeta)^{-1}$. Так как

$$A^*-\zeta' I = -i(I-e^{-i\varphi}T^*)^{-1}(I+e^{i\varphi}T^*)-i(\zeta e^{i\varphi}+1)(1-\zeta e^{i\varphi})^{-1}I =$$
$$= -i(1-\zeta e^{i\varphi})^{-1}(I-e^{-i\varphi}T^*)^{-1}[(1-\zeta e^{i\varphi})(I+e^{-i\varphi}T^*)+(\zeta e^{i\varphi}+1)(I-e^{-i\varphi}T^*)]$$

и

$$(1-\zeta e^{i\varphi})(I+e^{-i\varphi}T^*)+(\zeta e^{i\varphi}+1)(I-e^{-i\varphi}T^*) = 2(I-T^*T),$$

то

$$(A^*-\zeta' I)^{-1} = -\frac{1-\zeta e^{i\varphi}}{2i}(I-\zeta T^*)^{-1}(I-e^{-i\varphi}T^*)^{-1}. \tag{3.9}$$

Как известно

$$W(\zeta') = I+2iJS^*(A^*-\zeta' I)^{-1}S.$$

Ввиду (3.7) и (3.9)

$$W(\zeta') = I-(1-\zeta e^{i\varphi})JR^*(I-e^{i\varphi})^{-1}(I-\zeta T^*)^{-1}R,$$

что в сочетании со следствием 2.2 дает утверждение теоремы.

К этой теореме можно сделать замечание, аналогичное тому, которое было сделано к предыдущей теореме. Преобразование $\zeta' = i(\zeta e^{i\varphi}+I)(1-\zeta e^{i\varphi})^{-1}$ можно заменить любым дробно-линейным преобразованием, отображающим круг на верхнюю полуплоскость, лишь бы оператор T допускал обратное преобразование. Это утверждение вытекает из доказанной теоремы 3.2 и следующего предложения.

Теорема 3.3. *Пусть* $\mathscr{W} = (\mathfrak{H}, \mathfrak{G}; A, S, J)$ — *некоторый узел, а* $\zeta' = (\alpha\zeta+\beta)(\gamma\zeta+\delta)^{-1}$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — *вещественные числа и* $\alpha\delta-\gamma\beta>0)$ — *какое-либо преобразование, отображающее верхнюю полуплоскость на себя. Если оператор* T *допускает обратное преобразование*

$$A' = (\beta I-\delta A)(\gamma A-\alpha I)^{-1} \qquad (\alpha/\gamma \,\overline{\in}\, \sigma(A)),$$

то

$$SW(\zeta') = W'(\zeta), \tag{3.10}$$

где $W'(\zeta)$ — *характеристическая функция узла* $\mathscr{W}'$, *состоящего из пространств* $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ *и операторов*

$$A' \quad S' = (\alpha\delta-\beta\gamma)^{\frac{1}{2}}(\gamma A-\alpha I)^{-1}S, \quad J,$$

а U — J-*унитарный оператор, вычисляемый по формуле* $U = U^*\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)J$.

Доказательство: аналогично доказательству теоремы 3.2. При этом вместо формулы (2.1) используется следующая (см. [4])

$$W^*(\eta)JW(\zeta) = J+2i(\bar\eta-\zeta)S^*(A-\bar\eta I)^{-1}(A^*-\zeta I)^{-1}S.$$

§ 4. Унитарно-эквивалентные и простые узлы

Узлы

$$\mathscr{Y}_1 = (\mathfrak{H}_1, \mathfrak{G}; T_1, R_1, J), \quad \mathscr{Y}_2 = (\mathfrak{H}_2, \mathfrak{G}; T_2, R_2, J) \tag{4.1}$$

назовем *унитарно-эквивалентными*[7]), если существует изометрический оператор $U \in [\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2]$ такой, что

$$UT_1 = T_2U, \quad UR_1 = R_2. \tag{4.2}$$

Если узлы (4.1) унитарно эквивалентны, то, как легко видеть, $\Theta_{\mathscr{Y}_1}(\zeta) = \Theta_{\mathscr{Y}_2}(\zeta)$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Действительно, если узел $\mathscr{Y}_2$ является *несущественным расширением* узла $\mathscr{Y}_1$, т. е.

$$\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_0, \qquad T_1 f = T_2 f \quad (f \in \mathfrak{H}_1), \qquad R_1 g = R_2 g \quad (g \in \mathfrak{G})$$

и сужение T_2 на пространство $\mathfrak{H}_0$ есть унитарный оператор, то $\Theta_{\mathscr{Y}_1}(\zeta) = \Theta_{\mathscr{Y}_2}(\zeta)$, хотя равенство (4.2) и не выполняется.

---

[7]) Можно было бы ввести понятие унитарной эквивалентности без предположения, что узлы содержат одни и те же пространства $\mathfrak{G}$, однако для дальнейшего это не существенно.

Таким образом, обратное утверждение может иметь место лишь при некотором дополнительном условии. Для того, чтобы его сформулировать, положим для узла $\mathcal{Y} = (\mathfrak{H}, \mathfrak{G};\ T, R, J)$:

$$\mathfrak{H}_{\mathcal{Y}} = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} T^n R \mathfrak{G}.\ ^{8})$$

Очевидно, $T\mathfrak{H}_{\mathcal{Y}} \subset \mathfrak{H}_{\mathcal{Y}}$. Так как $\mathfrak{H}_{\mathcal{Y}} \supset R\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{H}_{\mathcal{Y}} \supset RJR^*\mathfrak{H} = (J - T^*T)\mathfrak{H}$, и, стало быть $(I - T^*T)\mathfrak{H}_{\mathcal{Y}}^{\perp} = 0$ ($\mathfrak{H}_{\mathcal{Y}}^{\perp} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_{\mathcal{Y}}$). С другой стороны, из равенств

$$T^*T^n R\mathfrak{G} = -(I - T^*T)T^{n-1}R\mathfrak{G} + T^{n-1}R\mathfrak{G} = -RJR^*T^{n-1}R\mathfrak{G} + T^{n-1}R\mathfrak{G}$$

следует, что $T^*\mathfrak{H}_{\mathcal{Y}} \subset \mathfrak{H}_{\mathcal{Y}}$. Поэтому оператор T индуцирует в $\mathfrak{H}_{\mathcal{Y}}^{\perp}$ унитарный оператор.

Узел $\mathcal{Y}$ назовем *простым*, если $\mathfrak{H}_{\mathcal{Y}} = \mathfrak{H}$.

В силу инвариантности пространства $\mathfrak{H}_{\mathcal{Y}}$ относительно операторов T и T^* пространство

$$\mathfrak{H}_{\mathcal{Y}^*} = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} (T^*)^n R\mathfrak{G}$$

содержится в $\mathfrak{H}_{\mathcal{Y}}$. Пользуясь формулами

$$T^n R\mathfrak{G} = -(T^*)^{-1}(I - T^*T)T^{n-1}R\mathfrak{G} + (T^*)^{-1}T^{n-1}R\mathfrak{G} =$$
$$= -(T^*)^{-1}RJR^*T^{n-1}R\mathfrak{G} + (T^*)^{-1}T^{n-1}R\mathfrak{G},$$
$$T^{-n}R\mathfrak{G} = (I - T^*T)T^{-n}R\mathfrak{G} + T^*T^{-n+1}R\mathfrak{G} = RJR^*T^{-n}R\mathfrak{G} + T^*T^{-n+1}R\mathfrak{G},$$

легко доказать, что $\mathfrak{H}_{\mathcal{Y}} \subset \mathfrak{H}_{\mathcal{Y}^*}$. Следовательно $\mathfrak{H}_{\mathcal{Y}} = \mathfrak{H}_{\mathcal{Y}^*}$. С помощью этого равенства, используя хорошо известные приемы (см. [19, 12] и [4]), доказывается требуемое «обратное» утверждение.

Теорема 4. 1.[9]) *Если узлы* (4. 1) *простые, и в некоторой окрестности точки* $\zeta = 0$ *имеет место тождество*

$$\Theta_{\mathcal{Y}_1}(\zeta) \equiv \Theta_{\mathcal{Y}_2}(\zeta), \tag{4. 3}$$

то узлы $\mathcal{Y}_1$ *и* $\mathcal{Y}_2$ *унитарно эквивалентны.*

Доказательство. В самом деле, из указанного тождества и (2. 1) следует, что

$$R_1^*(I - \bar{\eta}T_1)^{-1}(I - \zeta T_1^*)^{-1}R_1 = R_2^*(I - \bar{\eta}T_2)^{-1}(I - \zeta T_2^*)^{-1}R_2,$$

откуда

$$R_1^*T_1^n(T_1^*)^n R_1 = R_2^*T_2^n(T_2^*)^n R_2 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4. 4}$$

---

[8]) Символом $\bigvee_{n \in N} \mathfrak{G}_n$, где $\mathfrak{G}_n$ — подмножества из $\mathfrak{H}$, обозначается, как в [14], линейная замкнутая оболочка объединения всех $\mathfrak{G}_n (n \in N)$.

[9]) Родственная теорема, но при других условиях относительно оператора T имеется в работе [26].

В силу отношений (2. 7) тождество (4. 3) имеет место и при достаточно больших ζ, т.е. в окрестности точки $\zeta=0$ также

$$\Theta_{\mathscr{Y}_1}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \equiv \Theta_{\mathscr{Y}_2}\left(\frac{1}{\zeta}\right). \tag{4. 5}$$

Следовательно,

$$R_1^*(\bar{\eta}I-T_1)^{-1}(\zeta I-T_1^*)^{-1}R_1 = R_2(\bar{\eta}I-T_2)^{-1}(\zeta I-T_2^*)^{-1}R_2$$

и, значит, соотношения (4. 4) имеют место также при $n=-1, -2, \ldots$.

Таким образом, оператор U, определенный равенством

$$U(T_1^*)^n R_1 = (T_2^*)^n R_2 \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{4. 6}$$

изометричен. Он действует из $\mathfrak{U}_1$ в $\mathfrak{U}_2$, где

$$\mathfrak{U}_j = \bigvee_{n=-\infty}^{\infty} (T_j^*)^n R_j \mathfrak{G} \qquad (j=1, 2).$$

В силу простоты узлов $\mathscr{Y}_j$ множества $\mathfrak{U}_j$ плотны в $\mathfrak{H}_j$ и, поэтому, оператор U может быть расширен до изометрического оператора, действующего из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$. Обозначим это расширение тем же символом U.

На основании (4. 6) $UR_1=R_2$ и

$$UT_1^*(T_1^*)^n R_1 = T_2^*(T_2^*)^n R_2 = T_2^* U(T_1^*)^n R_1.$$

Отсюда вытекает, что $UT_1^* = T_2^* U$ и, стало быть, $UT_1 = T_2 U$.

§ 5. Основная лемма

При восстановлении $\mathscr{Y}$-узла по его характеристической функции, фундаментальную роль играет следующее предложение:

Лемма 5. 1. *Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{G}$ — некоторые гильбертовы пространства, $J(\in[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}])$ — сигнатурный оператор $(J^2=I,\ J^*=J)$ и $\omega(\zeta)$ — оператор-функция, определенная равенством*

$$\omega(\zeta) = S^*(U+\zeta I)(U-\zeta J)^{-1}S, \tag{5. 1}$$

где U — унитарный оператор, действующий в $\mathfrak{H}$, а S — оператор из множества $[\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$.

Если операторы $I-JS^*S$, $I+JS^*S$ обратимы, то в достаточно малой окрестности $\mathfrak{U}$ точки $\zeta=0$ оператор-функция $I+J\omega(\zeta)$ обратима, а оператор-функция

$$\vartheta(\zeta) = \big(I-J\omega(\zeta)\big)\big(I+J\omega(\zeta)\big)^{-1} \qquad (\zeta\in\mathfrak{U}) \tag{5. 2}$$

допускает представление

$$\vartheta(\zeta) = J(\vartheta^*(0))^{-1}(J - R^*(I-\zeta T^*)^{-1}R), \tag{5.3}$$

где

$$R = 2(I+SJS^*)^{-1}S, \quad T = U(I+SJS^*)^{-1}(I-SJS^*). \tag{5.4}$$

Доказательство. Из обратимости оператора $I + J\omega(0) = I + JS^*S$ вытекает обратимость операторов

$$I + J\omega(\zeta) = I + JS^*(U+\zeta I)(U-\zeta I)^{-1}S \qquad (\zeta \in \mathfrak{U}),$$

$$I + SJS^*(U+\zeta I)(U-\zeta I)^{-1} \quad (\zeta \in \mathfrak{U}), \ I + SJS^*.$$

Кроме того, справедливы равенства

$$(I+SJS^*(U+\zeta I)(U-\zeta I)^{-1})^{-1}S = S(I+J\omega(\zeta))^{-1} \qquad (\zeta \in \mathfrak{U}) \tag{5.5}$$

и

$$(I+JS^*S)^{-1}JS^* = JS^*(I+SJS^*)^{-1}. \tag{5.6}$$

Так как

$$\vartheta(\zeta) = 2(I+J\omega(\zeta))^{-1} - I, \quad \vartheta(0) = 2(I+JS^*S)^{-1} - I,$$

то разность $\vartheta(\zeta) - \vartheta(0)$ можно представить в виде

$$\vartheta(\zeta) - \vartheta(0) = 2(I+J\omega(\zeta))^{-1} - 2(I+JS^*S)^{-1} =$$
$$= 2(I+JS^*S)^{-1}J(S^*S - \omega(\zeta))(I+J\omega(\zeta))^{-1}.$$

Учитывая, что

$$S^*S - \omega(\zeta) = -2\zeta S^*(U-\zeta I)^{-1}S,$$

и пользуясь (5.5) и (5.6), получим

$$\vartheta(\zeta) - \vartheta(0) = -4\zeta JS^*(I+SJS^*)^{-1}(U-\zeta I)^{-1}(I+SJS^*(U+\zeta I)(U-\zeta I)^{-1})^{-1}S.$$

С помощью несложных преобразований легко установить соотношение

$$(U-\zeta I)^{-1}(I+SJS^*(U+\zeta I)(U-\zeta I)^{-1})^{-1}S = U^*(I-\zeta T^*)^{-1}R,$$

где операторы T и R определены формулами (5.4) и, стало быть,

$$\vartheta(\zeta) = \vartheta(0) + A(\zeta),$$

где

$$A(\zeta) = -2\zeta JS^*(I+SJS^*)^{-1}\mathcal{U}^*(I-\zeta T^*)^{-1}R$$

Из обратимости $I - JS^*S$ вытекает обратимость $\vartheta(0)$ и поэтому

$$\vartheta(\zeta) = J(\vartheta^*(0))^{-1}(\vartheta^*(0)J\vartheta(0) + \vartheta^*(0)JA^*(\zeta)). \tag{5.7}$$

Рассмотрим в отдельности каждое из слагаемых, стоящих в квадратных скобках.

Исходя из равенства

$$\vartheta^*(0)J\vartheta(0) = (I+S^*SJ)^{-1}(I-S^*SJ)J(I-JS^*S)(I+JS^*S)^{-1},$$

получим

$$\vartheta^*(0)J\vartheta(0)-J=$$
$$=(I+S^*SJ)^{-1}[(I-S^*SJ)J(I-JS^*S)-(I+S^*SJ)J(I+JS^*S)](I+JS^*S)^{-1}=$$
$$=-4(I+S^*SJ)^{-1}S^*S(I+JS^*S)^{-1}.$$

Таким образом,

(5.8) $$\vartheta^*(0)J\vartheta(0)=J-R^*R.$$

Так как $\vartheta^*(0)S^*=S^*(I+SJS^*)^{-1}(I-SJS^*)$, то

(5.9) $$\vartheta^*(0)JA(\zeta)=$$
$$=-2\zeta S^*(I+SJS^*)^{-1}(I-SJS^*)(I+SJS^*)^{-1}U^*(I-\zeta T^*)^{-1}R=$$
$$=-\zeta R^*T^*(I-\zeta T^*)^{-1}R=R^*R-R^*(I-\zeta T^*)^{-1}R.$$

Из (5. 7)—(5. 9) следует, что

$$\vartheta(\zeta)=J\big(\vartheta^*(0)\big)^{-1}\big(J-R^*(I-\zeta T^*)^{-1}R\big).$$

Лемма доказана.

§ 6. Восстановление узла по его характеристической функции

1. Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторое гильбертово пространство, а $J(\in[\mathfrak{G},\mathfrak{G}])$ — *сигнатурный оператор*, т. е. $J^2=I$, $J^*=J$. Обозначим через $\mathfrak{A}(J)$ множество всех оператор-функций $\Theta(\zeta)$ со значениями из $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$, удовлетворяющих условиям:

I. функция $\Theta(\zeta)$ определена и голоморфна в некоторой окрестности точки $\zeta=0$;

II. оператор $\Theta(0)$ является обратимым двусторонним J-сжатием $(\Theta^*(0)J\Theta(0)\leqq J,\ \Theta(0)J\Theta^*(0)=J)$;

III. оператор-функция

(6.1) $$\Omega(\zeta)=J\big(I-U_0^{-1}\Theta(\zeta)\big)\big(I+U_0^{-1}\Theta(\zeta)\big)^{-1},$$

где оператор U_0 взят из J-полярного представления оператора $\Theta(0)$[10]),

(6.2) $$\Theta(0)=U_0H_0\qquad (U_0^*JU_0=U_0JU_0=J,\ (JH_0)^*=JH_0,\ \sigma(H_0)\subset(0,\infty)),$$

допускает аналитическое продолжение на весь круг $|\zeta|<1$ и это продолжение удовлетворяет неравенству

(6.3) $$\Omega(\zeta)+\Omega^*(\zeta)\gg 0\qquad (|\zeta|<1).$$

[10]) По теореме Потапова—Гинзбурга [23, 24] (см. также [25]) каждое обратимое двустороннее J-сжатие допускает единственное J-полярное представление вида (6.2). Так как оператор $I+U_0^{-1}\Theta(0)$ $(=I+H_0)$ обратим, то оператор $I+U_0^{-1}\Theta(\zeta)$ обратим в некоторой окрестности точки $\zeta=0$. В этой окрестности задана функция (6.1).

Теорема 6.1. *Пусть голоморфная в некоторой окрестности* $\mathfrak{U}$ *точки* $\zeta=0$ *оператор-функция* $\Theta(\zeta)$ *принимает значения из* $[\mathfrak{G}, \mathfrak{G}]$.

Для того, чтобы существовал узел $\mathcal{Y} = (\mathfrak{H}, \mathfrak{G};\ T,\ R,\ J)$ *такой, что* $\Theta(\zeta) = \Theta_{\mathcal{Y}}(\zeta)(\zeta \in \mathfrak{U})$, *необходимо и достаточно чтобы* $\Theta(\zeta) \in \mathfrak{A}(J)$.

При выполнении этого условия узел $\mathcal{Y}$ *может быть выбран простым, и тогда он будет определен с точностью до унитарной эквивалентности.*

Доказательство. Пусть существует узел $\mathcal{Y} = (\mathfrak{H}, \mathfrak{G};\ T,\ R,\ J)$, такой, что $\Theta(\zeta) = \Theta_{\mathcal{Y}}(\zeta)$ и $\Theta_{\mathcal{Y}}(0) = U_0 H_0$ — J-полярное представление оператора $\Theta_{\mathcal{Y}}(0)$ вида (6.2). Очевидно, что функция $\Theta_{\mathcal{Y}}(\zeta)$ удовлетворяет условиям I, II, сформулированным при определении класса $\mathfrak{A}(J)$. Покажем, что выполняется также и условие III.

Пользуясь равенством $\Theta_{\mathcal{Y}}^*(0) J \Theta_{\mathcal{Y}}(0) = J - R^* R$ и леммой 1.1, получим

(6.4) $$H_0 = (I - JR^* R)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим обычное полярное представление $T = UH$ оператора T и положим

(6.5) $$S = (I + H)^{-1} R.$$

Легко видеть, что

(6.6) $$H = (T^* T)^{\frac{1}{2}} = (I - RJR^*)^{\frac{1}{2}}$$

и, кроме того,

$$JR^* \big(I + (I - RJR^*)^{\frac{1}{2}}\big)^{-1} = \big(I + (I - JR^* R)^{\frac{1}{2}}\big)^{-1} JR^*,$$

$$\big(I + (I - RJR^*)^{\frac{1}{2}}\big)^{-1} R = R\big(I + (I - JR^* R)^{\frac{1}{2}}\big)^{-1}.$$

Следовательно,

$$JR^* (I + H)^{-1} = (I + H_0)^{-1} JR^*, \quad (I + H)^{-1} R = R(I + H_0)^{-1}$$

или, ввиду (6.5)

(6.7) $$JS^* = (I + H_0)^{-1} JR^*, \quad S = R(I + H_0)^{-1}.$$

Отсюда имеем

$$JS^* S = (I + H_0)^{-1} JR^* R (I + H_0)^{-1},$$

и поэтому

$$I + JS^* S = (I + H_0)^{-1} [(I + H_0)^2 + JR^* R] (I + H_0)^{-1}.$$

На основании (6.4)

$$(I + H_0)^2 + JR^* R = I + 2H_0 + H_0^2 + JR^* R =$$

$$= 2I + 2H_0 + H_0^2 - (I - JR^* R) = 2(I + H_0)$$

и, значит,

(6.8) $$I + JS^* S = 2(I + H_0)^{-1}.$$

Аналогичным образом доказывается равенство

(6.9) $$I - JS^* S = 2H_0 (I + H_0)^{-1}.$$

В силу (6. 8) и (6. 9)

$$H_0 = (I - JS^*S)(I + JS^*S)^{-1}. \tag{6.10}$$

Пользуясь опять равенством (6. 5), получим

$$SJS^* = (I+H)^{-1} RJR^*(I+H)^{-1},$$

откуда вытекает

$$I + SJS^* = (I+H)^{-1}\big((I+H)^2 + RJR^*\big)(I+H)^{-1} \tag{6.11}$$

и

$$I - SJS^* = (I+H)^{-1}\big((I+H)^2 - RJR^*\big)(I+H)^{-1}. \tag{6.12}$$

Так как

$$(I+H)^2 + RJR^* = I + 2H + H^2 + I - T^*T = 2(I+H),$$

$$(I+H)^2 - RJR^* = I + 2H + H^2 - I - T^*T = 2H(I+H),$$

то подставляя найденные здесь значения в формулы (6. 11) и (6. 12), получим

$$I + SJS^* = 2(I+H)^{-1}, \quad I - SJS^* = 2H(I+H)^{-1}.$$

Отсюда далее следует

$$H = (I - SJS^*)(I + SJS^*)^{-1} \tag{6.13}$$

и

$$(I+H)S = 2(I + SJS^*)^{-1} S. \tag{6.14}$$

Пользуясь полярным представлением $T = UH$ оператора T и (6. 13), получаем

$$T = U(I - SJS^*)(I + SJS^*)^{-1}. \tag{6.15}$$

Из (6. 14) и (6. 15) следует

$$R = 2(I + SJS^*)^{-1} S. \tag{6.16}$$

Оператор $\Theta_{\mathscr{Y}}(0) = U_0 H_0$ обратим. Равенства (6. 8) и (6. 9) показывают, что обратимы операторы $I + JS^*S$, $I - JS^*S$ и таким образом применима лемма 5. 1. Из нее и равенств (6. 15), (6. 16) вытекает, что дробно-линейное преобразование функции

$$\omega(\zeta) = S^*(U + \zeta I)(U - \zeta I)^{-1} S, \tag{6.17}$$

определенное в некоторой окрестности $\mathfrak{U}$ точки $\zeta = 0$ равенством

$$\vartheta(\zeta) = \big(I - J\omega(\zeta)\big)\big(I + J\omega(\zeta)\big)^{-1}, \tag{6.18}$$

допускает представление

$$\vartheta(\zeta) = J\big(\vartheta^*(0)\big)^{-1}\big(J - R^*(I - \zeta T^*)^{-1} R\big). \tag{6.19}$$

В силу (6. 17), (6. 18) $\vartheta(0) = (I - JS^*S)(I + JS^*S)^{-1}$, а это, ввиду (6. 10), означает, что $\vartheta(0) = H_0 = U_0^{-1}\Theta_{\mathscr{Y}}(0)$, и поэтому

$$\big(\vartheta^*(0)\big)^{-1} = \big(\Theta_{\mathscr{Y}}^*(0)(U_0^*)^{-1}\big)^{-1} = U_0^*\big(\Theta_{\mathscr{Y}}^*(0)\big)^{-1} = JU_0^{-1}J\big(\Theta_{\mathscr{Y}}^*(0)\big)^{-1}. \tag{6.20}$$

Из (6. 19) и (6. 20) вытекает равенство

$$U_0\vartheta(\zeta) = J\big(\Theta_{\mathscr{Y}}^*(0)\big)^{-1}\big(J-R^*(I-\zeta T^*)^{-1}R\big) = \Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta),$$

откуда с помощью (6. 18) находим

$$U_0^{-1}\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta) = \big(I-J\omega(\zeta)\big)\big(I+J\omega(\zeta)\big)^{-1} \qquad (\zeta\in\mathfrak{U}).$$

Следовательно,

$$\omega(\zeta) = J\big(I-U_0^{-1}\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta)\big)\big(I+U_0^{-1}\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta)\big)^{-1} \qquad (\zeta\in\mathfrak{U}).$$

Эта формула показывает, что функция $\omega(\zeta)$ является расширением на весь круг $|\zeta|<1$ оператор-функции $\Omega(\zeta)$, определенной равенством (6. 1). Неравенство (6. 3) легко проверяется с помощью непосредственных вычислений. Таким образом, условие III выполняется и $\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta)\in\mathfrak{A}(J)$.

Покажем теперь достаточность условий теоремы. Пусть $\Theta(\zeta)\in\mathfrak{A}(J)$. Рассмотрим оператор-функцию $\Omega(\zeta)$, определенную равенством (6. 1). Заметим, что

(6.21) $$\Omega(0) = J(I-H_0)(I+H_0)^{-1},$$

и, поэтому,

$$\Omega^*(0) = (I-H_0^*)(I+H_0^*)^{-1}J = J(I-JH_0^*J)(I+JH_0^*J) = \Omega(0).$$

Отсюда и из условия III (см. также [4], стр. 36) вытекает существование неубывающей неотрицательной оператор-функции $F(t)$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ такой, что

$$\Omega(\zeta) = \int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+\zeta}{e^{it}-\zeta}\,dF(t)$$

В силу обобщенной теоремы Наймарка [4], найдется пространство $\mathfrak{H}(\supset\mathfrak{G})$, разложение единицы $E(t)$, действующее в $\mathfrak{H}$, и оператор $S\in[\mathfrak{G},\mathfrak{H}]$, такие, что $F(t) = S^*E(t)S$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$. Следовательно,

(6.22) $$\Omega(\zeta) = S^*\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+\zeta}{e^{it}-\zeta}\,dE(t)\mathscr{S} = \mathscr{S}^*(U+\zeta I)(U-\zeta I)^{-1}S,$$

где $U = \int_0^{2\pi} e^{it}\,dE(t)$.

Будем предполагать, что пространство $\mathfrak{H}$ минимально, т. е. $S\overline{\mathfrak{G}}=\mathfrak{H}$.

На основании (6. 22) $\Omega(0)=S^*S$. Пользуясь (6. 21), находим, что $I+JS^*S = 2(I+H_0)^{-1}$. Отсюда следует обратимость оператора $I+JS^*S$ и равенство $(I-JS^*S)(I+JS^*S)^{-1} = H_0$.

Так как оператор H_0 обратим, то обратимым является также оператор $I-JS^*S$ и, значит, выполняются все требования леммы 5. 1. Применяя равенство (6. 1), нетрудно доказать соотношение

$$S_0^{-1}\Theta(\zeta) = \big(I-J\Omega(\zeta)\big)\big(I+J\Omega(\zeta)\big)^{-1},$$

которое в сочетании с леммой 5. 1 дает

(6. 23) $$U_0^{-1}\Theta(\zeta) = J\big((U_0^{-1}\Theta(0))^*\big)^{-1}\big(J-R^*(I-\zeta T^*)^{-1}R\big),$$

где $$R = 2(I+SJS^*)^{-1}S, \quad T = U(I+SJS^*)^{-1}(I-SJS^*).$$

Рассмотрим произведение

$$T^*T = (I+SJS^*)^{-1}(I-SJS^*)^2(I+SJS^*)^{-1}.$$

Так как

$$I-T^*T = (I+SJS^*)^{-1}[(I+SJS^*)^2-(I-SJS^*)^2](I+SJS^*)^{-1},$$

и $(I+SJS^*)^2-(I-SJS^*)^2 = 4SJS^*$, то

$$I-T^*T = 4(I+SJS^*)^{-1}SJS^*(I+SJS^*)^{-1} = RJR^*$$

и, следовательно, совокупность, состоящая из пространств $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ и операторов T, R, J, образует $\mathscr{Y}$-узел. Этот узел простой, т. к. $\overline{R\mathfrak{G}}=\mathfrak{H}$. Поскольку

$$\big((U_0^{-1}\Theta(0))^*\big)^{-1} = U_0^*\big(\Theta^*(0)\big)^{-1} = JU_0^{-1}J\big(\Theta^*(0)\big)^{-1},$$

то равенство (6. 23) можно преобразовать к виду

$$\Theta(\zeta) = J\big(\Theta^*(0)\big)^{-1}\big(J-R^*(I-\zeta T^*)^{-1}R\big),$$

который показывает, что $\Theta(\zeta)=\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta)$. Теорема доказана.

2. Обозначим через $\mathfrak{U}_\infty(\mathfrak{H})$ множество всех обратимых операторов $T\in[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]$, для которых $I-T^*T\in\mathfrak{S}_\infty$.[11]) Легко проверяется, что вместе с T также и $T^*\in\mathfrak{U}_\infty(\mathfrak{H})$.

Для Θ-функций операторов $T\in\mathfrak{U}_\infty(\mathfrak{H})$ может быть получена более простая аналитическая характеристика, нежели та, которая дается теоремой 5. 1.

С этой целью введем в рассмотрение класс аналитических функций $\mathfrak{A}_\infty(J)$, где J — сигнатурный оператор из $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$. Условимся писать, что функция $\Theta(\zeta)$ со значениями из $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$ принадлежит классу $\mathfrak{A}_\infty(J)$, если она обладает следующими свойствами:

а) функция $\Theta(\zeta)$ голоморфна внутри единичного круга, за исключением не более, чем счетного множества точек ε_Θ, причем $0\bar{\in}\varepsilon_\Theta$,

б) оператор $\Theta(0)$ обратим, а оператор $J-\Theta^*(0)J\Theta(0)$ вполне непрерывен;

в) для любой своей точки ζ голоморфности $\Theta(\zeta)$ является двусторонним J-нерастягивающим оператором.

Этот класс функций (даже при несколько более общих предположениях) детально изучался Ю. П. Гинзбургом [27]. В частности, этот автор показал, что каждая функция $\Theta(\zeta)\in\mathfrak{A}_\infty(J)$ допускает представление

(6. 24) $$\Theta(\zeta) = U_0\Theta_0(\zeta),$$

[11]) Символом $\mathfrak{S}_\infty$ обозначают симметрично нормированный (с.-н.) идеал, состоящий из всех вполне непрерывных операторов $T\in[\mathfrak{H},\mathfrak{H}]$ (см. [28]).

где U_0 — постоянный J-унитарный оператор, взятый из J-полярного представления оператора $\Theta(0)$ вида (6. 2), а $\Theta_0(\zeta)-I$ — вполне непрерывный оператор во всех точках голоморфности $\Theta(\zeta)$. Кроме того, Ю. П. Гинзбургом было показано, что множество ε_Θ состоит лишь из изолированных точек.

Легко видеть, что Θ-функция любого оператора $T\in\mathfrak{U}_\infty(\mathfrak{H})$ принадлежит классу $\mathfrak{A}_\infty(J)$. Оказывается, верно и обратное утверждение:

Теорема 6. 2. *Если* $\Theta(\zeta)\in\mathfrak{A}_\infty(J)$, *то существует простой узел* $Y=(\mathfrak{H},\mathfrak{G};T,R,J)$ *с основным оператором* $T\in\mathfrak{U}_\infty(\mathfrak{H})$ *и такой, что* $\Theta(\zeta)=\Theta_{\mathcal{Y}}(\zeta)$ $(|\zeta|<1)$.

Доказательство. После того, как установлена теорема 5. 1, основная тяжесть доказательства снимается результатами Ю. П. Гинзбурга, указанными выше.

В самом деле, согласно представлению (6. 24) функция $\varphi(\zeta)=I+U_0^{-1}\Theta(\zeta)$ имеет вид $\varphi(\zeta)=2I+V(\zeta)$, где функция $V(\zeta)$ принимает вполне непрерывные значения во всех точках голоморфности функции $\Theta(\zeta)$. Так как $\varphi(0)$ — обратимый оператор, то по теореме И. Ц. Гохберга (см. [28], стр. 39) функция $\Theta(\zeta)$ голоморфна и обратима во всех точках единичного круга, за исключением, быть может, счетного множества точек с предельными точками на единичной окружности или на ε_Θ.

С другой стороны, в силу условия в) функция $\Omega(\zeta)$, определенная равенством (6. 1), удовлетворяет соотношению (6. 3) всюду, за исключением, быть может, особых точек. Учитывая, что условие (6. 3) исключает существование у функции $\Theta(\zeta)$ изолированных особых точек, приходим к выводу, что функция $\Omega(\zeta)$ голоморфна всюду внутри единичного круга.

Таким образом, функция $\Theta(\zeta)\in\mathfrak{A}(J)$ и, значит, существует узел $\mathcal{Y}=(\mathfrak{H},\mathfrak{G};T,R,J)$, такой, что $\Theta(\zeta)=\Theta_{\mathcal{Y}}(\zeta)$. Остается теперь заметить, что в силу условия б) имеем

$$R^*R=J-K^*JK=J-\Theta^*(0)J\Theta(0)\in\mathfrak{S}_\infty$$

и, следовательно, $I-T^*T=RJR^*\in\mathfrak{S}_\infty$. Теорема доказана.

Теорема 6.2. может быть распространена на случай обратимых операторов T, удовлетворяющих условию $I-T^*T\in\mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ — какой-либо с.-н. идеал (см. [28]).

Если узел $\mathcal{Y}=(\mathfrak{H},\mathfrak{G};T,R,J)$ таков, что T — сжатие $(J=I)$ и $\mathfrak{G},R,J$ принимают значения, указанные в равенствах (1. 4), то правило восстановления узла по его характеристической функции, полученное в процессе доказательства теоремы 6. 1, переходит в правило, указанное в статье [29].

Для произвольного сжатия (без предположения, что оно обратимо) внутреннюю аналитическую характеристику функции вида (1. 15), а также теорему о том, что вполне неунитарный оператор восстанавливается с точностью до унитарной эквивалентности по своей характеристической функции получили ранее Б. С.-Надь и Ч. Фояш [30, 14]. Последний результат был получен этими авторами с помощью найденной ими теоретико-функциональной модели, представляющей самостоятельный интерес.

Для операторов, не являющихся обязательно сжатиями, но подчиненных другим дополнительным условиям теоремы о единственности оператора (с точностью до унитарной эквивалентности), имеющего данную характеристическую функцию, и конструкциями его восстановления по характеристической функции занимались, начиная с работ М. С. Лившица [1, 2], многие авторы [12, 26, 31, 32].

§ 7. Мультипликативное представление оператор-функций

Теорема 6. 2 вместе с теоремами об умножении Θ-функций [6, 7] и об их мультипликативном представлении [8] позволяют установить предложения о мультипликативном представлении для нового класса оператор-функций из $\mathfrak{A}_\infty(J)$. Имеется в виду множество $\mathfrak{A}_\omega(J)$, состоящее из всех $\Theta(\zeta)\in\mathfrak{A}_\infty(J)$, удовлетворяющих условию:

$$J-\Theta^*(0)J\Theta(0)\in\mathfrak{S}_\omega.\ ^{12)} \tag{7. 1}$$

Предварительно отметим некоторые свойства функций $\Theta(\zeta)\in\mathfrak{A}_\infty(J)$. Пусть $Y=(\mathfrak{H},\mathfrak{G};\ T,R,J)$ — простой узел, отвечающий на основании теоремы 6. 2 функции $\Theta(\zeta)$.

1°. *Для того, чтобы точка a ($|a|\neq 1$) была регулярной для функции $\Theta(\zeta)$, необходимо и достаточно, чтобы* $1/\bar a\,\bar\in\,\sigma(T)$.

Достаточность условия очевидна. Необходимость доказывается от противного с использованием известной формулы Ф. Рисса для проектора на корневое подпространство нормального собственного числа оператора. Доказательство опускается ввиду того, что оно сходно с доказательством соответствующего предложения о W-функциях (см. [4], стр. 75).

---

12) Через $\mathfrak{S}_\omega$ обозначается с.-н. идеал В. И. Мацаева, определяемый как совокупность всех вполне непрерывных операторов $A\in[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$, таких, что

$$(\|A\|_\omega=)\ \sum_{j=1}^{\infty}\frac{Sj(A)}{2j-1}<\infty,$$

где $\{S_j(A)\}_{j=1}^\infty$ — последовательность всех собственных чисел оператора $(A^*A)^{\frac12}$, взятых с учетом кратности в порядке убывания (см. [28]).

2°. *Для того, чтобы функция $\Theta(\zeta)$ в своей регулярной точке a принимала обратимые значения, необходимо и достаточно, чтобы* $a\bar{\in}\sigma(T)$.

Это предложение непосредственно следует из предыдущего, если учесть соотношение $\Theta_{\mathscr{Y}}^{-1}(\zeta)=J\Theta_{\mathscr{Y}}^{*}(1/\zeta)J$.

Теорема 7.1. *Пусть $\Theta(\zeta)$ — голоморфная внутри единичного круга оператор-функция, значения которой суть обратимые операторы из* $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$.

Если $\Theta(\zeta)\in\mathfrak{A}_{\omega}(J)$, то она допускает мультипликативное представление

$$\Theta(\zeta)=U\overset{\curvearrowleft}{\int_0^1}\left(I-\frac{e^{i\varphi(t)}+\zeta}{e^{i\varphi(t)}-\zeta}\,dF(t)\right), \tag{7.2}$$

где U — J-унитарный оператор из $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$, $F(t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ — J-самосопряженная, J-неубывающая, непрерывная оператор-функция со значениями из $[\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$, $\varphi(t)$ $(0\leqq\varphi(t)\leqq 2\pi)$ — неубывающая, непрерывная слева скалярная функция. Интеграл сходится по норме $\mathfrak{S}_{\omega}$.

Доказательство. Согласно теореме 6.2 найдется простой узел $\mathscr{Y}=(\mathfrak{H},\mathfrak{G};\,T,R,J)$ с основным оператором из $\mathfrak{U}_{\omega}(\mathfrak{H})$ такой, что характеристическая функция $\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta)=\Theta(\zeta)$ $(|\zeta|<1)$.

В силу предложений 1° и 2° спектр оператора T лежит на единичной окружности. Кроме того, найдется максимальная цепочка $\mathfrak{P}=\{P(t)\}$, разделяющая спектр оператора T.[13])

Известным образом (см., например, [33, 34, 35]) можно построить несущественное расширение $\mathscr{Y}_1=(\mathfrak{H}_1,\mathfrak{G};\,T_1,R_1,J)$ узла $\mathscr{Y}$ и расширить цепочку $\mathfrak{P}$ до непрерывной цепочки $\mathfrak{P}_1=\{P(t)\}$ $(0\leqq t\leqq 1)$, значения которой действуют в $\mathfrak{H}_1$ так, чтобы цепочка $\mathfrak{P}_1$ разделяла спектр оператора T_1. Как указано в § 4, $\Theta_{\mathscr{Y}_1}(\zeta)=\Theta_{\mathscr{Y}}(\zeta)(=\Theta(\zeta))$. Формула (7.1) вытекает теперь из результатов статьи [8].[14])

Заметим, наконец, что *если функция $\Theta(\zeta)$ удовлетворяет всем условиям теоремы* 7.1, *за исключением требования голоморфности и обратимости*

---

[13]) Цепочка $\mathfrak{P}$ разделяет спектр оператора T, если $PTP=TP(P\in\mathfrak{P})$ и для любой точки $0\leqq t\leqq 2\pi$ найдется такой ортопроектор $P_t\in\mathfrak{P}$, что спектр оператора $P_tTP_t|P_t\mathfrak{H}$ лежит на дуге $e^{i\tau}(0\leqq\tau\leqq t)$, а спектр оператора $(I-P_t)T(I-P_t)|(I-P_t)\mathfrak{H}$ на дуге $e^{i\tau}(t\leqq\tau\leqq 2\pi)$. Для того, чтобы существовала цепочка, разделяющая спектр оператора T, достаточно, чтобы $I-T^*T\in\mathfrak{S}_{\omega}$ (см. [8]).

[14]) В работе [8] интеграл понимается в специальном смысле. Ввиду того, что в настоящей теореме цепочка $\mathfrak{P}_1$ непрерывна, это ограничение становится излишним. Отсюда же вытекает непрерывность функции $F(t)$.

во всех точках $\zeta(0<|\zeta|<1)$, *то с помощью теоремы умножения* [6, 7] *ее можно представить в виде*

$$(7.3)\quad \Theta(\zeta)=U\overset{\curvearrowright}{\int_0^1}\left(I-\frac{e^{i\varphi(t)}+\zeta}{e^{i\varphi(t)}-\zeta}\,dF(t)\right)\overset{\curvearrowright}{\prod_{j=1}^{s}}\left[Q_j+\frac{\zeta_j-\zeta}{1-\zeta\bar\zeta_j}\frac{|\zeta_j|}{\zeta_j}\mathscr{P}_j\right]\qquad (s\leqq\infty),$$

где $\{\zeta_j\}_1^s$ $(|\zeta_j|\neq 1)$ — последовательность изолированных особых точек $\Theta(\zeta)$, P_j — одномерные J-проекторы и $Q_j=I-P_j$. Всякая точка ζ_j входит в последовательность $\{\zeta_j\}_1^s$ столько раз, какова ее кратность. Бесконечное произведение сходится по норме $\mathfrak{S}_\omega$.

Для случая, когда условие (7.1) заменяется более узким:

$$(7.4)\qquad J-\Theta^*(0)J\Theta(0)\in\mathfrak{S}_1$$

где $\mathfrak{S}_1$ — с.-н. идеал всех ядерных операторов, формулы (7.2) и (7.3) были получены ранее Ю. П. Гинзбургом [36—39] в обобщение результата В. П. Потапова [24]. Кроме того, Ю. П. Гинзбург установил для сжимающих функций $(\|\Theta(\zeta)\|<1)$, удовлетворяющих условию (7.4), трудную теорему о единственности представления (7.2), явившуюся новой, даже в конечномерном случае [36, 37]. В настоящее время она может быть получена также и для сжимающих функций, удовлетворяющих условию (7.1)[15].

Заканчивая настоящую статью, укажем еще на то, что приведенные в ней результаты могут быть распространены на случай операторов T, удовлетворяющих вместо условия обратимости более общему условию, а именно: существует по крайней мере одна точка a $(|a|<1)$, такая, что $a\bar\in\sigma(T)$ и $1/\bar a\bar\in\sigma(T)$.

Цитированная литература

[1] М. С. Лившиц, Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве, *Матем. сб.*, **19(61)** (1946), 239—262.

[2] М. С. Лившиц, К теории изометрических операторов с равными дефектными числами, *ДАН*, **50** (1947), 13—15.

[3] М. С. Бродский, О мультипликативном представлении некоторых аналитических оператор-функций, *ДАН*, **138** (1961), 751—754.

[4] М. С. Бродский, *Треугольные и жордановые представления линейных операторов* (Москва, 1969).

[5] В. М. Бродский, И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Определение и основные свойства характеристической функции $\mathscr{Y}$-узла, *Функ. анализ и его прил.*, **4**: 1 (1970), 88—90.

[15]) Утверждения, полученные в настоящем параграфе, никак не покрывают замечательных результатов Ю. П. Гинзбурга о мультипликативном представлении функций ограниченного вида [38].

[6] В. М. Бродский, Некоторые теоремы об узлах и их характеристических функциях *Функц. анализ и его прил.*, **4**: 2 (1970).

[7] В. М. Бродский, Теоремы умножения и деления характеристических функций обратимого оператора, *Acta Sci. Math.*, **32** (1971), 153—163.

[8] В. М. Бродский, И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Общие теоремы о треугольных представлениях линейных операторов и мультипликативных представлениях их характеристических функций, *Функц. анализ и его прил.*, **3**: 4 (1969), 1—27.

[9] М. С. Лившиц и В. П. Потапов, Теорема умножения характеристических матриц-функций, *ДАН*, **72** (1950), 625—628.

[10] Ю. Л. Шмульян, Операторы с вырожденной характеристической функцией, *ДАН*, **93** (1953), 985—988.

[11] А. В. Кужель, Теорема умножения характеристических матриц-функций неунитарных операторов, *Научные доклады высшей школы*, **3** (1959), 33—40.

[12] А. В. Штраус, Характеристические функции линейных операторов, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **24** (1960), 43—47.

[13] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Modèles fonctionnels des contractions de l'espace de Hilbert. La fonction caractéristique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 3236—3239.

[14] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert* (Paris—Budapest, 1967).

[15] Л. А. Сахнович, Неунитарные операторы с абсолютно непрерывным спектром, *Изв. АН. СССР*, сер. матем., **33** (1969), 52—64.

[16] Л. А. Сахнович, Операторы подобные унитарным с абсолютно непрерывным спектром, *Функц. анализ и его прил.*, **2**: 1 (1968), 51—63.

[17] М. Г. Крейн и Ш. Н. Саакян, Резольвентная матрица эрмитова оператора и связанные с нею характеристические функции, *Функц. анализ и его прил.*, **4**: 3 (1970), 103—104.

[18] М. С. Бродский и Ю. Л. Шмульян, Инвариантные подпространства линейного оператора и делители его характеристической функции, *УМН*, **19**, (1964), 143—149.

[19] М. С. Лившиц, О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов, *Матем. сб.*, **34 (76)**, (1954), 144—199.

[20] L. de Branges, Some Hilbert spaces of analytic functions. II, *J. Math. Anal. and Appl.*, **11** (1965), 44—72.

[21] L. de Branges, Some Hilbert spaces of analytic functions. III, *J. Math. Anal. and Appl.*, **12** (1965), 149—186.

[22] М. А. Наймарк, *Нормированные кольца* (Москва, 1968).

[23] Ю. П. Гинзбург, О *J*-нерастягивающих операторах в гильбертовом пространстве, *Научн. зап. пед. ин-та, Одесса*, **22**:1 (1958), 13—30.

[24] В. П. Потапов, Мультипликативная структура *J*-нерастягивающих матриц-функций, *Труды Моск. матем. общ.*, **4** (1955), 125—236.

[25] М. Г. Крейн и Ю. Л. Шмульян, О плюс-операторах в пространстве с индефинитной метрикой, *Матем. исслед., Кишинев*, **1**: 1 (1966), 131—160.

[26] В. Н. Поляков, К теории характеристических функций линейных операторов, *Изв. высших уч. заведений*, **8 (63)** (1967), 53—59.

[27] Ю. П. Гинзбург, Принцип максимума для *J*-нерастягивающих оператор-функций и некоторые его следствия, *Изв. вузов, Математика*, **1** (1963), 42—53.

[28] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов* (Москва, 1965).

[29] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, О мультипликативном представлении характеристических функций операторов, близких к унитарным, *ДАН*, **164** (1965), 732—735.

[30] B. Sz.-Nagy, C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VII. Fonctions caractéristiques. Modèles fonctionnels, *Acta. Sci. Math.*, **25** (1964), 37—71.

[31] В. Т. Поляцкий, О приведении к треугольному виду квазиунитарных операторов, *ДАН*, **113** (1957), 758—759.

[32] А. В. Кужель, Спектральный анализ квазиунитарных операторов в пространстве с индефинитной метрикой, *Теория функций, функц. анализ и их прил. Харьков*, **4** (1967).

[33] Л. А. Сахнович, О приведении несамосопряженных операторов к треугольному виду, *Изв. высш. учебн. заведений, Математика*, **1 (8)** (1959), 180—186.

[34] Л. А. Сахнович, Исследования «треугольной модели» несамосопряженных операторов, *Изв. высших учебн. заведений, Математика*, **4 (11)** (1959), 141—149.

[35] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и её приложения* (Москва, 1967).

[36] Ю. П. Гинзбург, О факторизации аналитических матриц-функций, *ДАН*, **159** (1964), 489—492.

[37] Ю. П. Гинзбург, О мультипликативном представлении ограниченных аналитических оператор-функций, *ДАН*, **170** (1966), 23—26.

[38] Ю. П. Гинзбург, О мультипликативном представлении *J*-нерастягивающих оператор-функций, *Матем. исслед., Кишинев*, **2**: 2—3 (1967).

[39] Ю. П. Гинзбург, Мультипликативные представления и миноранты ограниченных аналитических оператор-функций, *Функц. анализ и его прил.*, **1**: 3 (1967).

(Поступило 11/V. 1970 г.)