Vecteurs cycliques et commutativité des commutants

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

Introduction

Pour un opérateur (linéaire, borné) T dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ on désignera par $(T)'$ le commutant de T, c'est-à-dire l'ensemble des opérateurs qui permutent à T.

Envisageons les trois propriétés suivantes possibles de T:

(i) T admet un vecteur cyclique;
(i_*) T^* admet un vecteur cyclique;
(ii) $(T)'$ est commutatif.

Dans le cas d'un espace $\mathfrak{H}$ de dimension finie, ces propriétés sont équivalentes, et il en est de même des opérateurs normaux dans un espace $\mathfrak{H}$ de dimension quelconque. Ces faits sont bien connus. Un résultat récent est que ces propriétés sont équivalentes aussi pour les opérateurs (en général non normaux) de classe C_0;[1]) *cf.* [3].

D'autre part, on sait que si S est une translation unilatérale simple (p. ex. la multiplication par e^{it} dans l'espace H^2 du cercle unité), l'opérateur $T = S^* \oplus S^*$ vérifie (i) sans vérifier (i_*) (*cf.* [1], section 126), et il est manifeste que T ne vérifie pas (ii). Ainsi, en général, (i) n'entraîne pas ni (i_*) ni (ii). (Mais il est un problème ouvert de savoir si (i) & (i_*) entraîne (ii)). Le fait que, en général, (ii) n'entraîne pas (i), vient d'être démontré par J. A. DEDDENS: Intertwining analytic Toeplitz operators (preprint).

Dans la présente Note on étudiera des cas nouveaux où (i) entraîne (i_*) ou (ii). Une partie de ces résultats a été annoncée au Symposium sur la Théorie des Opérateurs, 1—5. juin 1970, Bloomington, Indiana; *cf.* [4].

---

[1]) Un opérateur T est de classe C_0 s'il est une contraction complètement non-unitaire et telle que $u(T)=O$ pour une fonction u analytique et bornée dans le disque unité ouvert, $u \not\equiv 0$.

Opérateurs de classe C_1.

Théorème 1. *Pour un opérateur T de classe C_1.*[2]) *la propriété* (i) *entraîne les propriétés* (i_*) *et* (ii) *dans chacun des cas suivants:*

(a) *il y a du moins un point dans l'intérieur du cercle unité qui n'est pas une valeur propre de T^*;*

(b) *T est complèment non-unitaire (c. n. u.).*[3])

Remarque. En échangeant les rôles de T et T^* on obtient le dual de ce théorème. Nous allons donner la démonstration pour cette forme duale du théorème, équivalente.

Démonstration.

1. Commençons par quelques faits subsistant pour une contraction quelconque T dans $\mathfrak{H}$.

Soit U_+ la dilation isométrique minimum de T, opérant dans un espace $\mathfrak{K}_+(\supset \mathfrak{H})$. On a

(1) $$TP_{\mathfrak{H}} = P_{\mathfrak{H}}U_+ \quad \text{et} \quad \bigvee_{n\geq 0} U_+^n \mathfrak{H} = \mathfrak{K}_+$$

où $P_{\mathfrak{H}}$ désigne la projection orthogonale de $\mathfrak{K}_+$ au sous-espace $\mathfrak{H}$.

Soit $\mathfrak{R}$ le sous-espace de $\mathfrak{K}_+$ dans lequel U_+ est unitaire:

(2) $$\mathfrak{R} = \bigcap_{n\geq 0} U_+^n \mathfrak{K}_+ .$$

En désignant par $P_{\mathfrak{R}}$ la projection orthogonale de $\mathfrak{K}_+$ sur le sous-espace $\mathfrak{R}$, on a

(3) $$P_{\mathfrak{R}}h = \lim_{n\to\infty} U_+^n T^{*n} h \quad \text{pour tout} \quad h\in\mathfrak{H};$$

cf. proposition II. 3. 1 dans [2]. Il en dérive que

(4) $$U_+ P_{\mathfrak{R}} T^* h = P_{\mathfrak{R}} h \quad \text{pour tout} \quad h\in\mathfrak{H}.$$

Les opérateurs

(5) $$X = P_{\mathfrak{R}}|\mathfrak{H} \ (\mathfrak{H}\to\mathfrak{R}) \quad \text{et} \quad X^* = P_{\mathfrak{H}}|\mathfrak{R} \ (\mathfrak{R}\to\mathfrak{H})$$

sont évidemment adjoints l'un à l'autre. En multipliant dans (4) par l'adjoint de l'opérateur unitaire

(6) $$R = U_+|\mathfrak{R},$$

---

[2]) La classe C_1. est constituée des contractions T telles que $T^n h$ ne tend fortement vers 0 (lorsque $n\to\infty$) pour aucun $h\in\mathfrak{H}$, $h\neq 0$. La classe $C_{.1}$ est le dual de la classe $C_{.1}$: elle est constituée des contractions T telles que $T^{*n}h$ ne tend vers 0 pour aucun $h\in\mathfrak{H}$, $h\neq 0$. On pose $C_{11}=C_{1.}\cap C_{.1}$.

[3]) Il suffit aussi de supposer *seulement* que la partie unitaire de T ait son spectre absolument continu.

on obtient

(7) $$XT^* = R^*X.$$

En posant

(8) $$\mathfrak{R}_0 = \overline{X\mathfrak{H}} \quad (=\overline{P_{\mathfrak{R}}\mathfrak{H}})$$

et

(9) $$V = R^* \mid \mathfrak{R}_0,$$

il s'ensuit de (7) que

(10) $$V\mathfrak{R}_0 \subset \mathfrak{R}_0,$$

et de (1), (6) et (8) il s'ensuit que

(11) $$\mathfrak{R} = P_{\mathfrak{R}}\mathfrak{K}_+ = \bigvee_{n \geqq 0} P_{\mathfrak{R}}U_+^n\mathfrak{H} = \bigvee_{n \geqq 0} U_+^n P_{\mathfrak{R}}\mathfrak{H} = \bigvee_{n \geqq 0} R^n\mathfrak{R}_0.$$

V est donc une isométrie dans $\mathfrak{R}_0$ et R^* est un prolongement unitaire minimum de V.

Notons la conséquence de (1), (4) et (5):

(12) $$X^*X = P_{\mathfrak{H}} \lim_{n\to\infty} U_+^n T^{*n} = \lim_{n\to\infty} T^n T^{*n};$$

il s'ensuit que

(13) $$\|Xh\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|T^{*n}h\| \quad \text{pour tout} \quad h \in \mathfrak{H}.$$

Cela montre que si $T \in C_{\cdot 1}$, on a $Xh = 0$ pour $h = 0$ seulement et que par conséquent

(14) $$\overline{X^*\mathfrak{R}} = \mathfrak{H}.$$

La relation (7) entraîne pour $n = 0, 1, \ldots$

(15) $$a) \quad XT^{*n} = R^{*n}X \quad \text{et} \quad b) \quad T^nX^* = X^*R^n.$$

Montrons, toujours dans l'hypothèse $T \in C_{\cdot 1}$, que si R admet un vecteur cyclique r (dans $\mathfrak{R}$), T admet un vecteur cyclique X^*r (dans $\mathfrak{H}$) et $(T)'$ est commutatif.

La première assertion est une conséquence immédiate de (15b) et (14).

Dans la démonstration de la seconde assertion on observe d'abord que l'existence du vecteur cyclique r pour l'opérateur unitaire R entraîne que $(R)'$ est commutatif. Ensuite on applique le théorème sur la dilatation des commutants (*cf.* [2], version anglaise, théorème II. 2. 3): A tout $A \in (T)'$ on peut attacher un $B \in (U_+)'$ tel que $A = P_{\mathfrak{H}}B_{\mathfrak{H}}|\mathfrak{H}$, $P_{\mathfrak{H}}B(I - P_{\mathfrak{H}}) = 0$ et par conséquent

(16) $$AP_{\mathfrak{H}} = P_{\mathfrak{H}}BP_{\mathfrak{H}} = P_{\mathfrak{H}}B.$$

De plus on a

$$B\mathfrak{R} = B \bigcap_{n \geqq 0} U_+^n \mathfrak{K}_+ \subset \bigcap_{n \geqq 0} BU_+^n\mathfrak{K}_+ = \bigcap_{n \geqq 0} U_+^n B\mathfrak{K}_+ \subset \bigcap_{n \geqq 0} U_+^n\mathfrak{K}_+ = \mathfrak{R}.$$

Donc $C = B|\mathfrak{R}$ est un opérateur dans $\mathfrak{R}$ et il est manifeste que $B \in (U_+)'$ entraîne $C \in (R)'$. De plus, on déduit de (16) et (5) que

$$AX^* = X^* C. \tag{17}$$

Soient $A_1, A_2 \in (T)'$ et soient $C_1, C_2 \in (R)'$ les opérateurs y attachés de cette manière. En appliquant (17) on obtient

$$A_2 A_1 X^* = A_2 X^* C_1 = X^* C_2 C_1 = X^* C_1 C_2 = A_1 X^* C_2 = A_1 A_2 X^*.$$

Vu (14) on en déduit que $A_2 A_1 = A_1 A_2$.

2. Pour achever la démonstration du théorème pour un $T \in C_{\cdot 1}$ tel que T^* admet un vecteur cyclique h_*, il n'y a donc qu'à chercher dans quelles conditions additionnelles l'opérateur correspondant R a-t-il un vecteur cyclique.

Observons d'abord que (15*a*) entraîne que le vecteur $r_0 = Xh_*$ est cyclique pour l'opérateur V dans $\mathfrak{R}_0$, définis par (8) et (9).

Dans le cas où $\mathfrak{R}_0$ coïncide avec l'espace entier $\mathfrak{R}$, on a $V = R^*$. Or, R^* étant unitaire, le vecteur cyclique $r_0 = Xh_*$ pour R^* est cyclique pour R aussi.[4])

Ainsi, dans le cas $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}$ tout est démontré.[5]) On sait que ce cas se présente toujours quand les valeurs propres de T ne recouvrent pas tout l'intérieur du cercle unité (*cf.* [2], proposition II. 3. 2).

Passons au cas où $\mathfrak{R}_0 \neq \mathfrak{R}$. Dans ce cas, l'opérateur V n'est pas unitaire.

Supposons que la partie unitaire de la contraction $T (\in C_{\cdot 1})$ a son spectre absolument continu. Il en est alors de même de la dilatation unitaire *minimum* U de T (conséquence de [2], théorème II. 6. 4) ainsi que de la relation $R^* = U^*|\mathfrak{R}$.

Soit $\{E_t\}$ la famille spectrale attachée à R^* et posons

$$\alpha(t) = \frac{d}{dt}(E_t r_0, r_0).$$

---

[4]) Cela subsiste même pour tout opérateur normal N. En effet, si N admet un vecteur cyclique v, il existe pour tout entier $\nu \geqq 0$ et tout $\varepsilon > 0$ un polynôme $p(\lambda) = \sum_0^n c_m \lambda^m$ tel que pour $M = N^{*\nu} - p(N)$ on ait $\|Mv\| < \varepsilon$. Comme M est normal, on a $\|M^* v\| = \|Mv\|$, d'où

$$\|N^\nu v - q(N^*) v\| < \varepsilon \quad \text{où} \quad q(\lambda) = \sum_0^n \bar{c}_m \lambda^m.$$

Cela montre que le sous-espace déterminé par les vecteurs $N^{*\mu} v$ $(\mu = 0, 1, \ldots)$ comprend les vecteurs $N^\nu v$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$, donc coïncide avec l'espace entier. Ainsi, v est cyclique pour N^* aussi.

[5]) T admet alors le vecteur cyclique $h = X^* r_0 = X^* X h_*$. Eu égard à (12) on obtient donc que dans le cas en question tout vecteur cyclique h_* pour T^* engendre un vecteur cyclique h pour T moyennant la relation $h = \lim_{n \to \infty} T^n T^{*n} h_*$.

Pour $n \geqq m \geqq 0$ on a

$$(V^n r_0, V^m r_0) = (V^{n-m} r_0, r_0) = (R^{*n-m} r_0, r_0) = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} \alpha(t)\, dt.$$

On en déduit que

$$\left\| \sum_0^n c_m V^m r_0 \right\|^2 = \int_0^{2\pi} \left| \sum_0^n c_m e^{imt} \right|^2 \alpha(t)\, dt \tag{18}$$

pour des coefficients c_m quelconques. Puisque r_0 est cyclique pour V et que V n'est pas unitaire, r_0 ne peut appartenir à $V\mathfrak{R}_0$, donc r_0 a une distance positive d à $V\mathfrak{R}_0$. Mais on déduit de (18) que

$$d^2 = \inf_p \int_0^{2\pi} |1 + p(e^{it})|^2 \alpha(t)\, dt$$

où p parcourt la totalité des polynômes s'annulant à l'origine. D'après un théorème de SZEGŐ (*cf.* [2], n° II. 6. 2) on a donc $\log \alpha(t) \in L^1(0,2\pi)$ et par conséquent il existe une fonction extérieure $u \in H^1$ telle que $\sqrt{\alpha(t)} = |u(e^{it})|$ p. p. (*cf.* p. ex. [2], n° III. 1. 1). En vertu de (18), l'application

$$\sum_0^n c_m V^m r_0 \to \sum_0^n c_m e^{imt} u(e^{it})$$

est isométrique; en la prolongeant par continuité on obtient une application unitaire

$$\tau\colon \mathfrak{R}_0 \to H^2 \text{ (l'espace de Hardy—Hilbert).}$$

(Ici on fait usage de ce que r_0 est cyclique pour V, et du théorème de Beurling que les fonctions extérieures (et celles-ci seulement) son cycliques pour l'opérateur S de multiplication par e^{it} dans H^2.) Comme V est le transformé par l'opérateur unitaire τ^{-1} de S, V est aussi une translation unilatérale simple. Par conséquent, le prolongement unitaire minimum R^* de V est une translation bilatérale simple et il est alors de même pour R.

Or, cela entraîne que R admet un vecteur cyclique. En effet, si l'on représente R par l'opérateur de multiplication par e^{it} dans $L^2(0,2\pi)$, toute fonction $w \in L^2(0,2\pi)$ telle que $w(t) \neq 0$ p. p. et $\log |w(t)| \notin L^1$, est cyclique pour R. Par le théorème de Szegő déjà cité (*cf.* p. ex. [2], n° II. 6. 2) on a alors notamment

$$\inf_p \int_0^{2\pi} |1 + p(e^{it})|^2 |w(t)|^2\, dt = 0$$

(où p parcourt les polynômes s'annulant à l'origine), d'où il s'ensuit que le sous-espace de $L^2(0,2\pi)$ sous-tendu par le système $\{e^{int} w(t)\}_{n=0}^{\infty}$ comprend aussi les fonctions $e^{-int} w(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$; or comme $w(t) \neq 0$ p.p., le système $\{e^{int} w(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ sous-tend évidemment l'espace entier $L^2(0,2\pi)$.

Ainsi, dans tous les cas considérés, R admet un vecteur cyclique. Cela achève la démonstration du théorème 1.

Contractions faibles

Une contraction T dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ est appelée *faible* si son spectre ne recouvre pas le disque unité et $I-T^*T$ est de trace finie. Une contraction c. n. u. faible T admet une „décomposition C_0—C_{11}", c'est-à-dire qu'il existe des sous-espaces $\mathfrak{H}_0$ et $\mathfrak{H}_1$ de $\mathfrak{H}$, ultrainvariants pour T [6]) et tels que

$$\mathfrak{H}_0 \vee \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{H}_0 \cap \mathfrak{H}_1 = \{0\}, \tag{19}$$

et que

$$T_0 = T|\mathfrak{H}_0 \in C_0 \quad \text{et} \quad T_1 = T|\mathfrak{H}_1 \in C_{11}.$$

Notons par Q_i la projection orthogonale de $\mathfrak{H}$ à $\mathfrak{H}_i$ $(i=0, 1)$. On a

$$T^n Q_i = Q_i T^n Q_i, \quad Q_i T^{*n} = Q_i T^{*n} Q_i \qquad (i=0, 1;\ n=0, 1, \ldots). \tag{20}$$

Supposons de plus que T^* admet un vecteur cyclique h. On a alors pour $i=0, 1$:

$$\mathfrak{H}_i = Q_i \mathfrak{H} = Q_i \bigvee_{n \geqq 0} T^{*n} h = \bigvee_{n \geqq 0} Q_i T^{*n} h = \bigvee_{n \geqq 0} Q_i T^{*n} Q_i h;$$

puisque $Q_i T^{*n}|\mathfrak{H}_i = T_i^{*n}$, il s'ensuit que le vecteur $Q_i h$ est cyclique pour T_i^*.

Comme T_0^* est de classe C_0, l'existence d'un vecteur cyclique pour T_0^* entraîne que $(T_0^*)'$ soit commutatif; *cf.* [3]. D'autre part, $(T_1^*)'$ est commutatif d'après le théorème 1. Mais alors $(T_0)'$ et $(T_1)'$ sont aussi commutatifs. Or, cela entraîne que $(T)'$ est aussi commutatif.

En effet, si $A \in (T)'$, on a $A\mathfrak{H}_i \subset \mathfrak{H}_i$ $(i=0, 1)$ parce que $\mathfrak{H}_i$ est ultrainvariant pour T. En posant $A_i = A|\mathfrak{H}_i$ on obtient:

$$A_i T_i = AT|\mathfrak{H}_i = TA|\mathfrak{H}_i = T_i A_i,$$

donc A_i permute à T_i $(i=0, 1)$. En envisageant encore un $A' \in (T)'$ on aura

$$AA'|\mathfrak{H}_i = A_i A_i' = A_i' A_i = A'A|\mathfrak{H}_i \qquad (i=0, 1)$$

et, grâce à la première relation (19), $AA' = A'A$. Donc $(T)'$ est commutatif.

Vu que chacune des propriétés:

a) T est une contraction faible, c. n. u.,

b) $(T)'$ est commutatif,

entraîne la même propriété pour T^*, nous pouvons énoncer notre résultat dans la forme suivante:

Théorème 2. *Pour toute contraction c. n. u. faible T, telle que T ou T^* admet un vecteur cyclique, $(T)'$ est commutatif.*

---

[6]) C'est-à-dire invariants pour T ainsi que pour tout opérateur permutant à T.

Ouvrages cités

[1] P. R. HALMOS, *A Hilbert space problem book* (Princeton—Toronto—London, 1967).

[2] B. SZ.-NAGY—C. FOIAŞ, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert* (Budapest, 1967); *Harmonic analysis of operators on Hilbert space* (Budapest, 1970).

[3] B. SZ.-NAGY—C. FOIAŞ, Compléments à l'étude des opérateurs de classe C_0, *Acta Sci. Math.*, **31** (1970), 287—296; partie II *à paraître.*

[4] B. SZ.-NAGY—C. FOIAŞ, On the "Lifting Theorem" for intertwining operators and some new applications, *Indiana Univ. Math. J.*, **20** (1971), 901—904.

(Reçu le 1. octobre 1970)