Bemerkung zu einem von F. Szász angegebenen Ring

Von HANNS JOACHIM WEINERT in Clausthal (BRD)

In [3], Satz 3 gibt F. SZÁSZ einen assoziativen Ring A mit folgenden Eigenschaften an:

I) A hat zwei modulare nilpotente Rechtsideale R_1 und R_2, deren Durchschnitt nicht modular in A ist (vgl. [1], § 28, Seite 123).

II) Das Jacobsonsche Radikal J von A ist ein maximales modulares Rechtsideal von A mit $J^2 \neq 0$ und $J^3 = 0$.

Dabei definiert F. SZÁSZ diesen Ring A als Algebra über dem Primkörper K_2 der Charakteristik 2 durch folgende Multiplikationstafel der vier Basiselemente a, b, c und d:

(1)

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	$a+b+c$	a	d
b	$a+b+d$	b	c	b
c	c	b	c	$a+c+d$
d	a	d	$b+c+d$	d

Es wird behauptet, daß der Ring A nicht monomial im Sinne von RÉDEI [2], § 66 ist (vgl. auch [4], § 4). Gegenstand dieser kurzen Note ist zu zeigen, daß *dieser Ring doch eine monomiale Basis über K_2 besitzt und mit ihrer Hilfe die Behauptungen* I) *und* II) *und auch die Assoziativität von A sehr leicht nachzuweisen sind.*

Mit $\{a, b, c, d\}$ bilden auch die folgenden vier Elemente eine Basis des Vektorraumes A über K_2:

$$\alpha = a, \quad \beta = a+b+c+d, \quad \gamma = a+c, \quad \delta = a+d.$$

Aus (1) folgt die Multiplikationstafel

(2)

$\cdot$	α	β	γ	δ
α	α	β	0	δ
β	β	0	0	0
γ	γ	0	0	0
δ	0	0	β	0

und umgekehrt. Damit ist $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ monomiale Basis[1]) von A über K_2. (2) ist sogar im wesentlichen die Strukturtafel einer Halbgruppe mit Nullelement $H=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, 0\}$, die etwa durch folgende Transformationen auf der Menge $X=\{1, 2, 3, 4\}$ realisiert werden kann:

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&4\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&4&4\end{pmatrix},\quad \gamma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&4&2&4\end{pmatrix},\quad \delta=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&4&4\end{pmatrix},\quad 0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&4&4&4\end{pmatrix}.$$

Aber auch ohne eine solche Darstellung prüft man die Assoziativität bei (2) leichter als bei (1).

Beweis von I). $R_1=\{\gamma, 0\}$ und $R_2=\{\beta+\gamma, 0\}$ sind nach (2) Rechtsideale von A, mit α als Linkseinselement modulo R_1 und $\alpha+\delta$ als Linkseinselement modulo R_2. Weiter gilt $R_1^2=R_2^2=0$. Der Durchschnitt $R_1\cap R_2=0$ ist aber kein modulares Rechtsideal, da A wegen $A\gamma\not\ni\gamma$ kein Linkseinselement besitzt.

Beweis von II). Der von $\{\beta, \gamma, \delta\}$ erzeugte Unterraum J von R ist nach (2) zweiseitiges Ideal, aus Anzahlgründen maximales Rechtsideal und wegen $\alpha^2=\alpha$ modular. Wegen $A/J\approx K_2$ ist J das Radikal von A. Aus (2) ersieht man $J^2=\{0, \beta\}$ und $J^3=0$.

Literaturverzeichnis

[1] A. Kertész, *Vorlesungen über Artinsche Ringe* (Budapest, 1968).

[2] L. Rédei, *Algebra*. I (Leipzig, 1959; Budapest, 1967).

[3] F. Szász, Simultane Lösung eines halbgruppentheoretischen und eines ringtheoretischen Problems, *Acta Sci. Math.* **30** (1969), 289—294.

[4] H. J. Weinert, Zur Theorie der Algebren und monomialen Ringe, *Acta Sci. Math.* **26** (1965), 171—186.

(Eingegangen am 14. April 1970)

[1]) Es existieren weitere monomiale Basen von A über K_2, doch ist es nicht möglich, die erzeugenden Elemente $\gamma=a+c$ und $\beta+\gamma=b+d$ der Rechtsideale R_1 bzw. R_2 (vgl. Beweis von I)) zusammen in eine monomiale Basis aufzunehmen.