Über die regulären duo-Elemente in Gruppoid-Verbänden

Von OTTO STEINFELD in Budapest

Ein assoziativer Ring (eine Halbgruppe) A heißt *regulär*, wenn für jedes Element a von A gilt:

$$a \in aAa.$$

Die folgende Charakterisierung stammt von L. KOVÁCS [2]: Ein assoziativer Ring (eine Halbgruppe) A ist dann und nur dann regulär, wenn für jedes Linksideal L und Rechtsideal R von A

$$RL = R \cap L$$

gilt.

Unter einem *duo-Ring* (einer *duo-Halbgruppe*) verstehen wir einen assoziativen Ring (eine Halbgruppe), dessen (deren) alle einseitigen Ideale zweiseitige Ideale sind[1]).

In den Arbeiten [3], [4], hat S. LAJOS die regulären duo-Ringe (-Halbgruppen) folgenderweise charakterisiert: Für einen assoziativen Ring (eine Halbgruppe) A sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(α) A ist regulär und duo;

(β) der Durchschnitt und das Produkt irgendwelcher Linksideale L_1 und L_2 von A stimmen überein, und dasselbe gilt für irgendwelche Rechtsideale R_1 und R_2 von A;

(γ) für alle Linksideale L und Rechtsideale R von A besteht $L \cap R = LR$.

Wir werden diese Charakterisierungen für die Elemente gewisser teilweise geordneten Gruppoide verallgemeinern.

Ein teilweise geordnetes Gruppoid $\langle L; \leqq \rangle$ nennen wir einen *Gruppoid-Verband*, wenn L bezüglich seiner teilweise Ordnung $\leqq$ einen vollständigen Verband $\langle L; \wedge, \vee \rangle$ bildet, in dem die Bedingungen

$$(1) \qquad a^2 \leqq a \qquad (\text{für jedes } a \in L)$$

---

[1]) Diese Begriffe sind englisch "duo ring" bzw. "duo semigroup" genannt. Siehe E. H. FELLER [1] und S. LAJOS [4].

und

(2) $$0 \cdot e = e \cdot 0 = 0$$

erfüllt sind, wobei 0 und e das kleinste bzw. das größte Element von L bezeichnen. Mit L bezeichnen wir stets einen Gruppoid-Verband.

Wir sagen, daß das Element b von L ein *Absorbent* des Elementes a von L ist, wenn

(3) $$b \leqq a$$

und

(4) $$ab \leqq b, \quad ba \leqq b$$

bestehen. Das Element b heißt ein *Linksabsorbent (Rechtsabsorbent)* von a, wenn (3) und (4_1) [(3) und (4_2)] gelten.

Ein Element k von L heißt ein *Quasiabsorbent* von $a(\in L)$, wenn

(5) $$k \leqq a \quad \text{und} \quad ka \wedge ak \leqq k$$

bestehen.

Diese Begriffe wurden in unserer Arbeit [5] definiert.

Behauptung 1. *Der Durchschnitt $r \wedge l$ eines Rechtsabsorbenten r und eines Linksabsorbenten l des Elementes a von L ist ein Quasiabsorbent von a.*

Beispiele 1. Definiert man das Produkt $B \cdot C$ der Unterringe B, C eines assoziativen Ringes A als denjenigen Unterring von A, der durch alle Elemente bc $(b \in B; c \in C)$ erzeugt ist, so bildet die Menge aller Unterringe von A einen Gruppoid-Verband L_1 bezüglich dieser Multiplikation und des mengentheoretischen Enthaltenseins. Der aus dem Nullelement bestehende Unterring von A ist das kleinste Element des Gruppoid-Verbandes L_1, und A ist sein größtes Element. Die Links-, Rechts- und Quasiabsorbenten des Elementes A von L sind die Links-, Rechts- und Quasiidealen des Ringes A.

2. Es sei H_0 eine Halbgruppe mit Nullelement 0. Ähnlich zu dem vorigen Beispiel bildet die Menge aller Unterhalbgruppen mit 0 von H_0 einen Gruppoid-Verband L_2. Die Links-, Rechtsund Quasiideale von H_0 werden in L_2 die Links-, Rechtsund Quasiabsorbenten des Elementes H_0 von L_2.

Ein Element a des Gruppoid-Verbandes L heißt *duo-Element*, wenn alle Linksabsorbenten und alle Rechtsabsorbenten von a Absorbenten von a sind.

Von jetzt an schreiben wir je eine bedingte Assoziativitäts- bzw. Distributivitätsregel vor, die zu unseren Untersuchungen nötig sind.

Voraussetzung (A). Sind k_1, k_2 und k_3 Quasiabsorbenten des Elementes a von L, so sei

$$(k_1 k_2) k_3 = k_1 (k_2 k_3).$$

Voraussetzung (D_v). Für das Element a von L seien die Distributivitätsregeln

$$k_1(k_2 \vee k_2 a) = k_1 k_2 \vee k_1(k_2 a) \quad \text{und} \quad (k_2 \vee k_2 a)k_1 = k_2 k_1 \vee (k_2 a)k_1,$$

$$k_1(k_2 \vee ak_2) = k_1 k_2 \vee k_1(ak_2) \quad \text{und} \quad (k_2 \vee ak_2)k_1 = k_2 k_1 \vee (ak_2)k_1$$

für alle Quasiabsorbenten k_1 und k_2 von a erfüllt.

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß die Voraussetzungen (A) und (D_v) in den Gruppoid-Verbänden L_1 und L_2 erfüllt sind.

Voraussetzung (K). Für jeden Rechtsabsorbenten r und Linksabsorbenten l des Elementes a von L gelte $rl = r \wedge l$.

In der Arbeit [5] haben wir ein Element a von L *regulär* genannt, falls a die Voraussetzungen (A), (D_v) und (K) erfüllt.

Der folgende Satz verallgemeinert und ergänzt die erwähnten Ergebnisse von S. Lajos [3], [4].

Satz. *Sind die Voraussetzungen* (A) *und* (D_v) *für das Element a des Gruppoid-Verbandes L erfüllt, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) *a ist regulär und duo;*

(ii) *für jede Quasiabsorbenten k_1, k_2 von a gilt $k_1 \wedge k_2 = k_1 k_2$;*

(iii) *für jede Linksabsorbenten l_1, l_2 und Rechtsabsorbenten r_1, r_2 von a bestehen $l_1 \wedge l_2 = l_1 l_2$, und $r_1 \wedge r_2 = r_1 r_2$;*

(iv) *für jeden Quasiabsorbenten k von a gelten*

$$(k \vee ka)^2 = k \vee ak \quad \text{und} \quad (k \vee ak)^2 = k \vee ka;$$

(v) *für jeden Linksabsorbenten l und Rechtsabsorbenten r gilt $l \wedge r = lr$.*

Zum Beweis des Satzes benützen wir die folgende Umkehrung der Behauptung 1.

Behauptung 2. *Jeder Quasiabsorbent k des regulären Elementes a von L ist in der Form*

$$k = r \wedge l = rl$$

darstellbar, wo r und l einen geeigneten Rechtsabsorbenten bzw. Linksabsorbenten von a bezeichnen.

Beweis. Infolge der Voraussetzungen (A) und (D_v) bezeichnen die Elemente $l = k \vee ak$ und $r = k \vee ka$ den durch den Quasiabsorbenten k erzeugten Linksabsorbenten bzw. Rechtsabsorbenten von a. (Siehe die Arbeit [5].) Andererseits besteht wegen der Voraussetzungen (K), (A), (D_v) und wegen (5)

$$k \leqq (k\vee ka)\wedge(k\vee ak) = r\wedge l = rl = (k\vee ka)(k\vee ak) =$$

$$= k^2\vee(ka)k\vee k(ak)\vee(ka)(ak) \leqq ka\wedge ak \leqq k,$$

woraus Behauptung 2 folgt.

Beweis des Satzes. (i)$\Rightarrow$(ii). Nach Behauptung 2 bestehen $k_1 = r_1\wedge l_1$ und $k_2 = r_2\wedge l_2$ mit geeigneten Rechtsabsorbenten r_1, r_2 und Linksabsorbenten l_1, l_2 von a. Da das Element a duo ist, sind die Quasiabsorbenten $k_1 = r_1\wedge l_1$ und $k_2 = r_2\wedge l_2$ von a Absorbenten von a. Dieses und die Voraussetzung (K) implizieren (ii).

Die Implikationen (ii)$\Rightarrow$(iii) und (ii)$\Rightarrow$(v) gelten trivialerweise.

(ii)$\Rightarrow$(iv). Infolge (ii) gilt $ka = ak = a\wedge k = k$ für jeden Quasiabsorbenten k von a, woraus wieder wegen (ii)

$$(k\vee ka)^2 = k\vee ka = k = k\vee ak \quad \text{und} \quad (k\vee ak)^2 = k\vee ak = k = k\vee ka$$

folgen.

Wir haben noch die Implikationen (iii)$\Rightarrow$(i), (iv)$\Rightarrow$(i) und (v)$\Rightarrow$(i) zu zeigen.

(iii)$\Rightarrow$(i). Im Falle $l_2 = a$ folgt $l_1 a = l_1\wedge a = l_1$ aus (iii), d.h. jeder Linksabsorbent l_1 von a ist ein Rechtsabsorbent von a. Ähnlich sieht man ein, daß jeder Rechtsabsorbent r_2 von a ein Linksabsorbent von a ist. So ist a ein duo-Element von L. Dieses und Bedingung (iii) sichern die Regularität des Elementes a.

Ganz ähnlich kann man die Implikation (v)$\Rightarrow$(i) einsehen.

(iv)$\Rightarrow$(i). Ist l ein Linksabsorbent von a, so bekommt man aus (iv)

$$la \leqq l\vee la = (l\vee al)^2 \leqq l^2 \leqq l.$$

Dieses bedeutet, daß l ein Rechtsabsorbent von a ist.

Dualerweise sieht man ein, daß jeder Rechtsabsorbent von a auch ein Linksabsorbent von a ist.

Um die Regularität von a zu zeigen, betrachten wir einen Rechtsabsorbenten r und einen Linksabsorbenten l von a. Da das Element a duo ist, sind die Elemente r, l und $r\wedge l$ Absorbenten von a. So bekommt man

$$r\wedge l = (r\wedge l)\vee(r\wedge l)a = (r\wedge l)\vee a(r\wedge l).$$

Dieses und Bedingung (iv) implizieren $r\wedge l = (r\wedge l)^2 \leqq rl$, womit die Regularität von a bewiesen ist.

Damit ist der Beweis beendet.

Bemerkung. Spezialisiert man den Satz für die regulären duo-Ringe und duo-Halbgruppen, so liefern die Bedingungen (ii) und (iv) nach unserem Wissen neue Charakterisierungen dieser Strukturklassen. Wir möchten hier nur das folgende Korollar erwähnen:

Ein assoziativer Ring (eine Halbgruppe) A ist dann und nur dann regulär und duo, wenn jede Quasiideale K_1, K_2 *von A die Bedingung* $K_1 \cap K_2 = K_1 K_2$ *erfüllen.*

Literaturverzeichnis

[1] E. H. FELLER, Properties of primary non-commutative rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **89** (1958), 79—91.
[2] L. KOVÁCS, A note on regular rings, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), 465—468.
[3] S. LAJOS, On regular duo rings, *Proc. Japan Acad.*, **45** (1969), 157—158.
[4] S. LAJOS, A characterization of regular duo rings, *Annales Univ. Budapest*, **13** (1970), 71—72.
[5] O. STEINFELD, Über Gruppoid-Verbände. I, *Acta Sci. Math.*, **31** (1970), 203—218.

(Eingegangen am 12. Februar 1970)