Über Untergruppen mit ausgezeichneten Repräsentantensystemen

Von VOLKMAR FELSCH in Aachen (BRD)

1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit, der eine Dissertation [1] über ausgezeichnete Untergruppen zugrunde liegt, untersucht einige Eigenschaften der folgenden Begriffe.

1. 1. Definition. Sei G eine Gruppe und $U \leqq H \leqq G$. Ein Repräsentantensystem R der Rechtsrestklassen von H in G heiße (U, H, G)-*System*, wenn R unter U invariant ist, d.h. wenn $u^{-1}Ru = R$ gilt für alle $u \in U$. Ein (H, H, G)-System heißt nach R. KOCHENDÖRFFER [4] ein *ausgezeichnetes Repräsentantensystem von H in G.* Wir nennen die Untergruppe H *ausgezeichnet in G*, wenn sie ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem besitzt.

Es sei bemerkt, daß eine Teilmenge R von G genau dann ein (U, H, G)-System ist, wenn die Menge $L = \{r^{-1} | r \in R\}$ ein unter U invariantes Repräsentantensystem der Linksrestklassen von H in G ist. Man erhält also denselben Begriff der ausgezeichneten Untergruppe, wenn man zur Definition Links- statt Rechtsrestklassen benutzt.

Mit Hilfe eines in Kiel entwickelten Programmsystems [2] wurden für eine größere Anzahl von Gruppen alle ausgezeichneten Untergruppen berechnet. Diese Computer-Protokolle benutzte ich zum Aufsuchen von Gegenbeispielen, insbesondere in Abschnitt 3 bei der Frage nach Vererblichkeit der Eigenschaft, ausgezeichnete Untergruppe zu sein.

Den Herren Professoren W. GASCHÜTZ und J. NEUBÜSER danke ich sehr für die gemeinsamen Diskussionen des Themas und für die wertvollen Hinweise, die ich dabei erhielt.

2. Existenzkriterien

2. 1. Satz. *Sei G eine Gruppe, $U \leqq H \leqq G$, und sei S ein Repräsentantensystem der Doppelrestklassen HgU von G nach H und U. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig.*

(1) *Es gibt ein (U, H, G)-System.*
(2) $g \in HC_G(U \cap H^g)$ *für alle* $g \in G$.
(3) $s \in HC_G(U \cap H^s)$ *für alle* $s \in S$.
(4) *Zu jedem* $g \in G$ *gibt es ein Element* $h \in H$, *so daß* $x^h = x^g$ *für alle* $x \in U^{g^{-1}} \cap H$.
(5) *Zu jedem* $s \in S$ *gibt es ein Element* $h \in H$, *so daß* $x^h = x^s$ *für alle* $x \in U^{s^{-1}} \cap H$.

Zum Beweis von 2. 1 benutzen wir zwei Hilfssätze, die sich durch Verallgemeinerung zweier Sätze von G. ZAPPA ([15, 16] Lemma 1 und 2) ergeben.

2. 2. Hilfssatz. *Sei G eine Gruppe und* $U \leqq H \leqq G$. *Sei R ein* (U, H, G)-*System und* $r \in R$. *Dann gilt* $r \in C_G(U \cap H^r)$.

Beweis. Sei $x \in U \cap r^{-1}Hr$. Dann ist einerseits $x^{-1}rx \in x^{-1}rr^{-1}Hr = Hr$ und andererseits $x^{-1}rx \in x^{-1}Rx = R$. Daraus folgt $x^{-1}rx = r$. Q.e.d.

2. 3. Hilfssatz. *Sei G eine Gruppe,* $U \leqq H \leqq G$, *und sei S ein Repräsentantensystem der Doppelrestklassen HgU von G nach H und U. Gibt es zu jedem* $s \in S$ *ein Element* $s^* \in HsU$ *mit der Eigenschaft* $s^* \in C_G(U \cap H^{s^*})$, *so bildet die Menge der Elemente* s^* *und ihrer Konjugierten unter U ein* (U, H, G)-*System.*

Ein Beweis für 2. 3 läßt sich bis auf geringfügige Änderungen aus [15] übernehmen, wo der Satz für den Spezialfall $U = H$ bewiesen wird.

Beweis von 2. 1. (1)→(2). Sei R ein (U, H, G)-System und $g \in G$. Dann gibt es ein $r \in R$ mit $g \in Hr$. Nach 2. 2 ist $r \in C_G(U \cap H^r)$. Wegen $r^{-1}Hr = g^{-1}Hg$ folgt $r \in C_G(U \cap H^g)$, also $g \in HC_G(U \cap H^g)$.

(2)→(4). Sei $g \in G$. Nach Voraussetzung läßt sich g schreiben als Produkt $g = hc$ mit $h \in H$ und $c \in C_G(U \cap H^g)$. Sei $x \in U^{g^{-1}} \cap H$. Dann ist $x^g \in U \cap H^g$, also $x^h = x^{gc^{-1}} = x^g$.

(4)→(5). Trivial.

(5)→(3). Wir setzen $h^{-1}s = c$. Sei $y \in U \cap H^s$. Dann ist $y^{s^{-1}} \in U^{s^{-1}} \cap H$, also $y = y^{s^{-1}s} = y^{s^{-1}h} = y^{c^{-1}}$. Daraus folgt $c \in C_G(U \cap H^s)$. Wegen $h \in H$ ist daher $s = hc \in HC_G(U \cap H^s)$.

(3)→(1). Sei $s \in S$. Nach Voraussetzung läßt sich s schreiben als Produkt $s = hs^*$ mit $h \in H$ und $s^* \in C_G(U \cap H^s) = C_G(U \cap H^{s^*})$. Dabei ist $s^* = h^{-1}s \in HsU$. Nach 2. 3 gibt es daher ein (U, H, G)-System. Q.e.d.

Setzt man $U = H$, so liefert 2. 1 notwendige und hinreichende Kriterien für die Existenz eines ausgezeichneten Repräsentantensystems von H in G. Durch Hinzunahme weiterer Voraussetzungen erhält man insbesondere die folgenden einfachen Sonderfälle von Kriterium (2).

2. 4. Korollar. *Ein Normalteiler H einer Gruppe G ist genau dann ausgezeichnet in G, wenn* $G = HC_G(H)$ *ist.*

2. 5. Korollar. *Eine abelsche Untergruppe H einer Gruppe G ist genau dann ausgezeichnet in G, wenn $g \in C_G(H \cap H^g)$ gilt für alle $g \in G$.*

2. 6. Korollar. *Eine minimale Untergruppe H einer Gruppe G ist genau dann ausgezeichnet in G, wenn $N_G(H) = C_G(H)$ ist.*

2. 7. Korollar. *Ein abelscher Normalteiler H einer Gruppe G ist genau dann ausgezeichnet in G, wenn er im Zentrum von G liegt.*

Nach C. H. Sah [13] heißt eine Untergruppe H einer Gruppe G c-abgeschlossen in G, wenn je zwei Elemente von H, die unter G konjugiert sind, auch schon unter H konjugiert sind. Aus Kriterium (4) von 2. 1 folgt:

2. 8. Korollar. *Sei G eine Gruppe und $H \leqq G$. Ist H ausgezeichnet in G, so ist H -abgeschlossen in G.*

Die Umkehrung von 2. 8 gilt nicht. Ein Gegenbeispiel ist in [1] angegeben.

Besitzt eine Untergruppe in einer Gruppe G ein normales Komplement, so ist sie offensichtlich ausgezeichnet in G. Mit der Frage, wann umgekehrt zu einer ausgezeichneten Untergruppe ein normales Komplement existiert, beschäftigen sich verschiedene Arbeiten [5, 6, 9—12, 14—16]. Ein Ergebnis dieser Untersuchungen ist, daß eine ausgezeichnete Hallgruppe einer endlichen Gruppe ein normales Komplement besitzt, wenn sie einen Sylowturm hat. Dies folgt wegen 2. 8 aus auch einem Satz von C. H. Sah ([13] Theorem 3), nach dem gilt: Ist H eine Hallgruppe einer endlichen Gruppe G und besitzt H einem Sylowturm oder einen nilpotenten Normalteiler mit nilpotenter Faktorgruppe, so existiert genau dann ein normales Komplement von H in G, wenn H in G c-abgeschlossen ist.

3. Einige Eigenschaften ausgezeichneter Untergruppen

In diesem Abschnitt diskutieren wir die Vererblichkeit der Eigenschaft, ausgezeichnete Untergruppe zu sein, auf gewisse Untergruppen, Faktorgruppen, Durchschnitte und Erzeugnisse. Die Beweise der Ergebnisse, die hier nur referiert werden, sind in [1] angegeben.

3. 1. Satz. *Sei G eine Gruppe, $H \leqq K \leqq G$ und $H \leqq L \leqq G$. Dann gilt:*

3. 1. 1. (Prohaska [11] 2. 1.) *Ist H ausgezeichnet in G, so ist H auch ausgezeichnet in K.*

3. 1. 2. (Zappa [14].) *Ist H ausgezeichnet in K und K ausgezeichnet in G, so ist H ausgezeichnet in G.*

3. 1. 3. *Sei $H \trianglelefteq K$ und H ausgezeichnet in K und in L. Ist $H \trianglelefteq L$ oder $\langle K, L\rangle = KL$, so ist H auch ausgezeichnet in $\langle K, L\rangle$.*

Aus 3. 1. 1 folgt unmittelbar: Ist H ausgezeichnet in zwei Untergruppen K und L von G, so ist H auch ausgezeichnet in ihrem Durchschnitt $K \cap L$. Eine entsprechende Aussage für das Erzeugnis $\langle K, L\rangle$ gilt nicht. Sei nämlich $G = \langle a, b, c, d\rangle$ die durch die definierenden Relationen $a^4 = 1$, $b^2 = a^2$, $c^3 = 1$, $d^2 = a^2$, $[a, b] = a^2$, $[a, c] = ba^2$, $[a, d] = b$, $[b, c] = ba^3$, $[b, d] = a^2$ und $[c, d] = c$ gegebene Gruppe der Ordnung 48, und seien $H = \langle d\rangle$, $K = \langle c, d\rangle$ und $L = K^b$. Dann ist H ausgezeichnet in K und in L, aber nicht in $\langle K, L\rangle$.

Auch einige andere wünschenswerte Eigenschaften besitzen die ausgezeichneten Untergruppen nicht. Sei zum Beispiel $G = \langle a, b, c, d\rangle$ die durch die definierenden Relationen $a^4 = 1$, $b^2 = a^2$, $c^2 = 1$, $d^2 = a^2$, $[a, b] = a^2$, $[a, c] = [a, d] = [b, c] = [b, d] = 1$ und $[c, d] = a^2$ gegebene Gruppe der Ordnung 32. Dann sind die Untergruppen $H = \langle a, b\rangle$ und $K = \langle a, cb\rangle$ normal und ausgezeichnet in G, aber $H \cap K$ und $\langle H, K\rangle$ sind nicht ausgezeichnet in G. Es bilden also im allgemeinen weder die ausgezeichneten Untergruppen noch die ausgezeichneten Normalteiler einer Gruppe G einen Teilverband des Untergruppenverbandes von G.

Ist weiterhin H eine ausgezeichnete Untergruppe einer Gruppe G und φ ein Homomorphismus von G, so braucht $H\varphi$ in $G\varphi$ nicht ausgezeichnet zu sein. Sei etwa $G = \langle a, b, c\rangle$ die durch die definierenden Relationen $a^2 = b^4 = c^2 = [a, b] = [a, c] = 1$ und $[b, c] = b^2 a$ gegebene Gruppe der Ordnung 16, und sei $N = \langle a\rangle$ und $H = \langle b\rangle$. Dann ist $N \triangleleft G$ und H ausgezeichnet in G, aber NH/N ist nicht ausgezeichnet in G/N. Es gilt jedoch der folgende Satz.

3. 2. Satz. *Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$, $H \leqq G$ und H ausgezeichnet in G. Dann gilt:*

3. 2. 1. *Ist $N \leqq H$, so ist H/N ausgezeichnet in G/N.*

3. 2. 2. *Ist $H \trianglelefteq G$, so ist NH/N ausgezeichnet in G/N. (Außerdem ist dann $C_G(H)$ ausgezeichnet in G und $Z(H) \leqq Z(G)$).*

3. 2. 3. *Sei NH endlich und $|H|$ teilerfremd zu $N : N \cap H$. Jede Untergruppe von NH, deren Ordnung $|H|$ teilt, liege in einer unter NH zu H konjugierten Untergruppe (das ist insbesondere erfüllt, wenn NH auflösbar ist). Dann ist NH/N ausgezeichnet in G/N.*

Die Aussagen 3. 1. 1, 3. 1. 2 und 3. 2. 1 sind Sonderfälle der beiden folgenden Sätze.

3. 3. Satz. *Sei G eine Gruppe, $V \leqq K \leqq G$ und $U \leqq H \leqq K$. Dann gilt:*

3. 3. 1. *Ist R ein (U, H, G)-System, so ist $R \cap K$ ein (U, H, K)-System.*

3. 3. 2. *Ist R ein (U, H, K)-System und S ein (V, K, G)-System, so ist RS ein $(U \cap V, H, G)$-System.*

3. 4. Satz. *Sei G eine Gruppe, $U \leqq H \leqq G$, $N \leqq H$ und $N \trianglelefteq G$. Ist R ein (U, H, G)-System, so ist die Menge $\{Nr | r \in R\}$ ein $(NU/N, H/N, G/N)$-System.*

4. Ausgezeichnete Untergruppen von Primzahlordnung

In [11] stellt L. PROHASKA die Frage nach der Existenz endlicher auflösbarer Gruppen, in denen keine nicht triviale Untergruppe ausgezeichnet ist. Wir zeigen, daß jede endliche Gruppe, die eine nicht triviale Untergruppe besitzt, auch eine nicht triviale ausgezeichnete Untergruppe besitzt.

4. 1. Satz. *Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $|G|>1$ und p die kleinste Primzahl, die $|G|$ teilt. Dann ist in G jede Untergruppe der Ordnung p ausgezeichnet.*

Beweis. Sei $H \leqq G$ mit $|H|=p$, und sei $g \in N_G(H)$. Dann induziert g auf H einen Automorphismus φ. Da die Ordnung der Automorphismengruppe von H gleich $p-1$ ist, ist der von g^{p-1} auf H induzierte Automorphismus φ^{p-1} die Identität, also $g^{p-1} \in C_G(H)$. Wegen $(|G|, p-1) = 1$ folgt hieraus $g \in C_G(H)$. Es ist daher $N_G(H) = C_G(H)$. Nach 2. 6 ist H ausgezeichnet in G. Q.e.d.

Für nilpotente Gruppen läßt sich die Aussage von 4. 1 verschärfen.

4. 2. Satz. *In einer endlichen nilpotenten Gruppe ist jede Untergruppe von Primzahlordnung ausgezeichnet.*

Beweis. Sei G eine endliche nilpotente Gruppe, $H \leqq G$ und $|H|=p$ eine Primzahl. Ist P die p-Sylowgruppe von G, so gilt $H \leqq P \leqq G$. Nach 4. 1 ist H ausgezeichnet in P, und als direkter Faktor besitzt P ein normales Komplement und damit ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem in G. Daraus folgt nach 3. 1. 2 die Behauptung. Q.e.d.

Nicht jede endliche Gruppe, in der sämtliche Untergruppen von Primzahlordnung ausgezeichnet sind, ist nilpotent. Ein Gegenbeispiel ist etwa die alternierende Gruppe vom Grade 4. Es gilt jedoch der folgende Satz.

4. 3. Satz. *Eine endliche überauflösbare Gruppe G, in der sämtliche Untergruppen von Primzahlordnung ausgezeichnet sind, ist nilpotent.*

Zum Beweis von 4. 3 gebrauchen wir einen Hilfssatz.

4. 4. Hilfssatz. *Sei p eine Primzahl. Hat eine endliche auflösbare Gruppe G die Eigenschaft, daß alle Untergruppen der Ordnung p in ihr ausgezeichnet sind, so haben auch alle Untergruppen und Faktorgruppen von G diese Eigenschaft.*

Beweis. Für die Untergruppen von G folgt die Behauptung unmittelbar aus 3. 1. 1, für die Faktorgruppen beweisen wir sie durch Induktion nach der Ordnung von G. Es genügt zu zeigen: Ist M ein minimaler Normalteiler von G und $M < H \leqq G$ mit $H:M = p$, so ist H/M ausgezeichnet in G/M.

Ist $N_G(H) = N < G$, so ist nach Induktionsannahme H/M ausgezeichnet in N/M. Mit 2. 6 folgt daraus $C_{G/M}(H/M) = C_{N/M}(H/M) = N_{N/M}(H/M) = N_{G/M}(H/M)$, das heißt, H/M ist auch ausgezeichnet in G/M. Es sei daher im folgenden $H \trianglelefteq G$.

Gibt es in G zwei verschiedene maximale Untergruppen U und V, die H enthalten, so folgt aus 2. 7 und der Induktionsannahme $H/M \leqq Z(U/M)$ und $H/M \leqq Z(V/M)$. Dann ist aber $H/M \leqq Z(\langle U/M, V/M \rangle) = Z(G/M)$ und daher H/M ausgezeichnet in G/M. Wir können daher annehmen, daß G/H zyklisch von Primzahlpotenzordnung ist, etwa $|G/H| = q^r$. Wegen 4. 1 brauchen wir nur den Fall $q < p$ zu betrachten.

Ist $(|M|, p) = 1$, so gibt es in G eine nach Voraussetzung ausgezeichnete p-Sylowgruppe P der Ordnung p. Aus 2. 6 folgt $C_G(P) = N_G(P)$. Nach einem Satz von W. Burnside ([3] IV. 2. 6) besitzt daher P in G ein normales Komplement K. Dann ist K/M ein normales Komplement und damit ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem von H/M in G/M.

Gilt andererseits $p \mid |M|$, so ist M als minimaler Normalteiler der auflösbaren Gruppe G eine elementarabelsche p-Gruppe. Sei $|M| = p^n$. Dann ist $|H| = p^{n+1}$. Wegen $\langle 1 \rangle \neq M \cap Z(H) \trianglelefteq G$ und $H:Z(H) \neq p$ ist $Z(H) = H$, also H abelsch.

Ist H elementarablesch, so gibt es in H genau p^n Untergruppen der Ordnung p, die nicht in M liegen. Die Menge dieser Untergruppen zerfällt unter G in vollständige Klassen Konjugierter, wobei die Länge jeder Klasse als Teiler von $G:H$ eine Potenz von q ist. Wegen $q \nmid p^n$ ist mindestens eine dieser Potenzen gleich 1. In G gibt es daher einen nach Voraussetzung ausgezeichneten Normalteiler P der Ordnung p mit $PM = H$. Nach 2. 7 gilt $P \leqq Z(G)$ und deshalb auch $H/M \leqq Z(G/M)$. Folglich ist H/M ausgezeichnet in G/M.

Ist H nicht elementarabelsch, so hat die Frattinigruppe $\Phi(H)$ die Ordnung p. Wegen $\Phi(H) \leqq M$ und $\Phi(H) \trianglelefteq G$ folgt $\Phi(H) = M$. Dann ist H eine zyklische Gruppe der Ordnung p^2, und M ist ausgezeichnet in G. Nach 2. 7 folgt $M \leqq Z(G)$. Es genügt wieder zu zeigen, daß auch $H/M \leqq Z(G/M)$ gilt.

Sei $H = \langle h \rangle$ und $g \in G$. Dann ist $g^{-1}hg \in H$, etwa $g^{-1}hg = h^s$. Wegen $h^p \in M \leqq$ $\leqq Z(G)$ gilt $h^p = g^{-1}h^p g = (h^p)^s$. Daraus folgt $s \equiv 1 \pmod{p}$. Sei etwa $s = tp + 1$. Dann ist $g^{-1}hg = (h^p)^t h \in Mh$ und daher $(Mg)^{-1} MhMg = Mh$. Q.e.d.

Beweis von 4. 3. Die Behauptung ist richtig für $|G| = 1$. Sei daher $|G| > 1$. Wir nehmen an, der Satz sei bereits bewiesen für alle überauflösbaren Gruppen kleinerer Ordnung, und zeigen, daß in G jede maximale Untergruppe normal ist.

Es seien H eine maximale Untergruppe und N ein minimaler Normalteiler von G. Die Faktorgruppe G/N erfüllt nach 4. 4 die Voraussetzungen des Satzes.

Ist $N \leqq H$, so gilt daher nach Induktion $H/N \lhd G/N$ und folglich $H \lhd G$. Ist andererseits $N \not\leqq H$, so ist $N \cap H < N$. Es gilt $N \cap H \trianglelefteq H$ und, da N abelsch ist, auch $N \cap H \lhd N$. Daraus folgt $N \cap H \lhd \langle N, H\rangle = G$. Wegen der Minimalität von N ist dann $|N \cap H| = 1$. Als normales Komplement von H in G hat N die Ordnung $|N| = G:H$. Da G überauflösbar ist, ist $G:H$ eine Primzahl. Also ist N ausgezeichnet in G. Nach 2. 7 folgt $N \leqq Z(G) \leqq N_G(H)$ und damit $H \lhd \langle N, H\rangle = G$. Q.e.d.

5. Gruppen, die in jeder Obergruppe ausgezeichnet sind

In diesem Abschnitt bestimmen wir alle endlichen Gruppen, die aufgrund ihres Isomorphietyps in jeder Obergruppe ausgezeichnet sind.

5. 1. Hilfssatz. *Sei G eine Gruppe und $H \leqq G$. Ist $|H| \leqq 2$ oder H isomorph zur nicht abelschen Gruppe S_3 der Ordnung 6, so ist H ausgezeichnet in G.*

Beweis. Für $|H|=1$ ist die Behauptung trivial. Ist $|H|=2$, so ist $N_G(H) = C_G(H)$. Daraus folgt nach 2. 6 die Behauptung. Sei daher $H \cong S_3$. Wir benutzen Kriterium (4) von 2. 1.

a) Sei $g \in N_G(H)$. Dann induziert g auf H einen Automorphismus. Da alle Automorphismen von H innere Automorphismen sind, gibt es ein Element $h \in H$ mit $x^h = x^g$ für alle $x \in H = H^{g^{-1}} \cap H$.

b) Sei $g \notin N_G(H)$. Dann ist $H^{g^{-1}} \cap H < H$. Also ist $H^{g^{-1}} \cap H$ zyklisch. Sei etwa $H^{g^{-1}} \cap H = \langle a\rangle$. Es ist $a^g \in H$ und $|a^g| = |a|$. Da je zwei Elemente gleicher Ordnung von H unter H konjugiert sind, gibt es ein Element $h \in H$ mit $a^h = a^g$. Daraus folgt $x^h = x^g$ für alle $x \in \langle a\rangle = H^{g^{-1}} \cap H$. Q.e.d.

5. 2. Hilfssatz. *Sei K eine endliche Gruppe der Ordnung $|K| > 2$, die nicht zur nicht abelschen Gruppe S_3 der Ordnung 6 isomorph ist. Dann enthält die symmetrische Gruppe $S_{|K|}$ vom Grade $|K|$ eine zu K isomorphe Untergruppe, die in $S_{|K|}$ nicht ausgezeichnet ist.*

Beweis. Nach P. Hall ([7] S. 364—365, Beweis von Hilfssatz 1) enthält $S_{|K|}$ eine zu K isomorphe Untergruppe H mit der folgenden Eigenschaft: Ist $U \leqq H$ und ψ ein Automorphismus von U, so gibt es einen inneren Automorphismus von $S_{|K|}$, der jedes $u \in U$ auf $u\psi$ abbildet. Wir nehmen an, es sei $|H| > 2$ und H ausgezeichnet in $S_{|K|}$, und zeigen, daß dann $H \cong S_3$ ist.

a) Sei p eine Primzahl, P eine p-Sylowgruppe von H und φ ein Automorphismus von P. Dann gibt es ein Element $g \in S_{|K|}$ mit $u^g = u\varphi$ für alle $u \in P$. Wegen $P = P^{g^{-1}} \cap P \leqq H^{g^{-1}} \cap H$ gibt es nach Kriterium (4) von 2. 1 ein Element $h \in H$ mit $u^h = u^g = u\varphi$ für alle $u \in P$. Dabei ist $h \in N_H(P)$.

b) Wegen $|H|>2$ folgt aus a) insbesondere: H ist nicht abelsch.

Wir nehmen nun an, es sei $|\varphi|=p^s$ und $|h|=mp^t$ mit $(m,p)=1$. Dann gibt es zwei Elemente $h_1, h_2 \in \langle h\rangle$ mit $|h_1|=m$ und $|h_2|=p^t$, so daß $h=h_1h_2$ ist. Wegen $h_1\in\langle h^{p^t}\rangle \leqq \langle h^{p^s}\rangle \leqq C_H(P)$ gilt $u^{h_2}=u^h=u\varphi$ für alle $u\in P$. Insbesondere ist $h_2\in N_H(P)$. Da P die einzige p-Sylowgruppe von $N_H(P)$ ist, folgt $h_2\in P$. Also besitzt P keinen äußeren Automorphismus von p-Potenzordnung. Nach einem Satz von W. GASCHÜTZ ([3] III. 19. 1) ist dann $|P|\leqq p$. Daraus folgt: H hat quadratfreie Ordnung.

c) Sei nun p der größte Primteiler von $|H|$. Dann ist $|P|=p$, und P besitzt einen Automorphismus φ der Ordnung $p-1$. Nach a) gibt es ein Element $h\in H$ mit $u^h=u\varphi$ für alle $u\in P$. Also gilt $p-1 \mid |H|$. Wegen $|H|>2$ und $4\nmid |H|$ ist p ungerade. Daraus folgt $2 \mid |H|$.

Wir müssen nur noch zeigen, daß $p=3$ ist. Wir nehmen an, es sei $p>3$. Da $p-1$ quadratfrei ist, gibt es dann eine ungerade Primzahl q, die $p-1$ teilt, und $\langle h\rangle$ enthält zwei Elemente x und y der Ordnungen $|x|=q$ und $|y|=2$. Sei $Q=\langle x\rangle$. Es ist $y\in C_H(Q)$. Da Q eine q-Sylowgruppe von H ist, gibt es nach a) ein Element $k\in H$ mit $x^k=x^{-1}$. Sei $z=k^{\frac{|k|}{2}}$. Dann ist $|z|=2$. Da $\frac{|k|}{2}$ ungerade ist, ist $x^z=x^{-1}$, also $z\in N_H(Q)$, aber $z\notin C_H(Q)$. Wegen $4\nmid|H|$ sind $\langle y\rangle$ und $\langle z\rangle$ 2-Sylowgruppen von $N_H(Q)$, aber wegen $C_H(Q)\trianglelefteq N_H(Q)$ sind sie nicht konjugiert unter $N_H(Q)$. Die Annahme $p>3$ führt damit zu einem Widerspruch, und es ist $p=3$. Q.e.d.

Aus 5. 1 und 5. 2 folgt:

5. 3. Satz. *Eine endliche Gruppe hat genau dann die Eigenschaft, daß jede zu ihr isomorphe Untergruppe einer beliebigen Gruppe G in G ausgezeichnet ist, wenn sie von der Ordnung 1 oder 2 oder nicht abelsch und von der Ordnung 6 ist.*

6. Ausgezeichnete Untergruppen symmetrischer Gruppen

6. 1. Satz. *Sei Ω eine Menge und $\Delta\subseteqq\Omega$. Ist G die Gruppe aller Permutationen auf Ω und G_Δ die Untergruppe derjenigen Permutationen, die Δ elementweise fest lassen, so ist G_Δ ausgezeichnet in G.*

Beweis. Sei g ein beliebiges Element von G und $\Gamma=\{\delta g \mid \delta\in\Delta\}$. Dann ist $G_\Delta{}^g = g^{-1}G_\Delta g = G_\Gamma$ und daher $G_\Delta \cap G_\Delta{}^g = G_{\Delta\cup\Gamma}$. Sei $c\in G$ eine Permutation, die jedes $\delta\in\Delta$ auf δg abbildet und alle Elemente von $\Omega-(\Delta\cup\Gamma)$ fest läßt. Dann ist $c\in C_G(G_{\Delta\cup\Gamma}) = C_G(G_\Delta\cap G_\Delta{}^g)$. Da die Permutation gc^{-1} alle Elemente von Δ fest läßt, gilt außerdem $gc^{-1}\in G_\Delta$, also $g=gc^{-1}c\in G_\Delta C_G(G_\Delta\cap G_\Delta{}^g)$. Nach Kriterium (2) von 2. 1 ist daher G_Δ ausgezeichnet in G. Q.e.d.

Aus 6. 1 folgt insbesondere, daß es in jeder symmetrischen Gruppe S_n vom Grade $n\geqq 1$ zu jeder Zahl m mit $1\leqq m\leqq n$ eine ausgezeichnete Untergruppe vom

Typ S_m gibt. Nach Computerberechnungen von W. LINDENBERG [8] sind für $n \leqq 6$ in der S_n sogar alle symmetrischen Untergruppen ausgezeichnet. Andererseits folgt aus 5. 2 mit Hilfe von 3. 1. 1, daß es in jeder S_n mit $n \geqq 24$ eine nicht ausgezeichnete Untergruppe vom Typ S_4 gibt.

Literatur

[1] V. FELSCH, *Über Untergruppen mit ausgezeichneten Repräsentantensystemen*, Dissertation (Kiel, 1968).

[2] V. FELSCH—J. NEUBÜSER, Ein Programm zur Berechnung des Untergruppenverbandes einer endlichen Gruppe, *Mitt. Rh.-W. Inst. Instr. Math. Univ. Bonn*, **2** (1963), 39—74.

[3] B. HUPPERT, *Endliche Gruppen*. I (Berlin—Heidelberg—New York, 1967).

[4] R. KOCHENDÖRFFER, Ein Satz über Sylowgruppen, *Math. Nachr.*, **17** (1958), 189—194.

[5] R. KOCHENDÖRFFER, Hallgruppen mit ausgezeichnetem Repräsentantensystem, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 218—223.

[6] R. KOCHENDÖRFFER, On supplements in finite groups, *J. Austral. Math. Soc.*, **3** (1963), 63—67.

[7] A. G. KUROSCH, *Gruppentheorie* (Berlin, 1955).

[8] W. LINDENBERG, Private Mitteilung, April 1968.

[9] F. MIGLIORINI, Sistemi di rappresentanti di laterali e complementi normali, *Matematiche* (Catania), **18** (1963), 54—58.

[10] F. MIGLIORINI, Rappresentanti di laterali e supplementi in un gruppo finito, *Matematiche* (Catania) **21** (1966), 11—17.

[11] L. PROHASKA, *Über Untergruppen mit ausgezeichneten Repräsentantensystemen*, Dissertation (Rostock, 1963).

[12] L. PROHASKA, Über die Existenz normaler Komplemente zu gewissen Hallgruppen, *Acta Sci. Math.*, **26** (1965), 159—162.

[13] C. H. SAH, Existence of normal complements and extension of characters in finite groups, *Illinois J. Math.*, **6** (1962), 282—291.

[14] G. ZAPPA, Generalizzazione di un teorema di Kochendörffer, *Matematiche* (Catania), **13** (1958), 61—64.

[15] G. ZAPPA, Sull'esistenza di sottogruppi normali di Hall in un gruppo finito, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 224—228; Errata, **22** (1961), 319.

[16] G. ZAPPA, Sur les systèmes distingués de représentants et sur les compléments normaux des sous-groupes de Hall, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **13** (1962), 227—230.

(Eingegangen am 24. März 1970)