Compléments à l'étude des opérateurs de classe C_0. II

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

Un opérateur T dans un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$ s'appelle de classe C_0 s'il est une contraction complètement non-unitaire et si $u(T)=0$ pour une fonction convenable $u \in H^\infty$, $u \not\equiv 0$. Dans [1] (théorème 2; *cf.* aussi [3], théorème 2) on a démontré que si tel T admet un vecteur cyclique, les opérateurs appartenant au commutant $(T)'$ sont de la forme $\varphi(T)$ (où $\varphi \in N_T$) et par conséquent $(T)'$ est commutatif. L'assertion inverse, notamment que pour $T \in C_0$ la commutativité de $(T)'$ entraîne l'existence d'un vecteur cyclique, n'y a été démontrée que dans la condition supplémentaire $\mu_T < \infty$. Le but de cette Note est d'écarter cette condition, de plus la démonstration qu'on va donner ne dépend pas du théorème 3 de [2] concernant le bicommutant $(T)''$.

Nous allons donc démontrer le suivant:

Théorème. *Soit T un opérateur dans $\mathfrak{H}$, de classe C_0 et avec $(T)'$ commutatif. T admet alors un vecteur cyclique.*

Démonstration. 1. Soit m la fonction minimum de T — et par suite $m^\sim$ celle de T^*. D'après la proposition 2 de [3] il existe des opérateurs T_1, T_2 de classe C_0, opérant dans des espaces $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, selon les cas, tels que

$$T \succ S(m) \oplus T_1, \quad T^* \succ S(m^\sim) \oplus T_2^*; \tag{1}$$ [1]

les fonctions minimum correspondantes m_{T_i} sont des diviseurs de m. Vu que $S(m)^*$ est unitairement équivalent à $S(m^\sim)$, [2] (1) entraîne

$$S(m) \oplus T_2 \succ T \succ S(m) \oplus T_1. \tag{2}$$

Donc il existe des quasi-affinités A_1, A_2 telles que

$$(S(m) \oplus T_2) A_2 = A_2 T, \quad T A_1 = A_1 (S(m) \oplus T_1). \tag{3}$$

[1]) Pour les notations voir [2].

[2]) Voir [2], note 7.

Le produit $M=A_2A_1$ sera une quasi-affinité

$$M\colon\ \mathfrak{H}(m)\oplus\mathfrak{H}_1\to\mathfrak{H}(m)\oplus\mathfrak{H}_2$$

telle que

$$(S(m)\oplus T_2)M = M(S(m)\oplus T_1). \tag{4}$$

Désignons par $\mathfrak{X}$ l'ensemble des opérateurs

$$X\colon\ \mathfrak{H}(m)\oplus\mathfrak{H}_2\to\mathfrak{H}(m)\oplus\mathfrak{H}_1$$

vérifiant la relation

$$(S(m)\oplus T_1)X = X(S(m)\oplus T_2). \tag{5}$$

Comme (3) et (5) entraînent $A_1XA_2\in(T)'$ pour $X\in\mathfrak{X}$, et puisque $(T)'$ est commutatif, il s'ensuit que

$$A_1XA_2\cdot A_1X'A_2 = A_1X'A_2\cdot A_1XA_2$$

et par conséquent

$$XMX' = X'MX \quad \text{pour} \quad X, X'\in\mathfrak{X}. \tag{6}$$

2. Un exemple banal pour $X\in\mathfrak{X}$ est l'opérateur X_0 défini par

$$X_0(h\oplus h_2) = h\oplus 0 \qquad (h\oplus h_2\in\mathfrak{H}(m)\oplus\mathfrak{H}_2). \tag{7}$$

D'autres exemples s'obtiennent de la manière suivante.

Fixons $h_{10}\in\mathfrak{H}_1$ et considérons la restriction T_{10} de T_1 au sous-espace invariant

$$\mathfrak{H}_{10} = \bigvee_{n\geq 0} T_1^n h_{10}.$$

T_{10} est de classe C_0 et cyclique, donc il existe un diviseur intérieur m_1 (de m_{T_1} et par conséquent) de m tel que $S(m_1)\prec T_{10}$ (*cf.* [3], théorème 2). Il existe donc une quasi-affinité

$$B\colon\ \mathfrak{H}(m_1)\to\mathfrak{H}_{10}$$

vérifiant

$$T_{10}B = BS(m_1). \tag{8}$$

D'autre part il existe un opérateur

$$P\colon\ \mathfrak{H}(m)\to\mathfrak{H}(m_1)$$

tel que

$$\overline{P\mathfrak{H}(m)} = \mathfrak{H}(m_1) \quad \text{et} \quad S(m_1)P = PS(m).\,^{3)} \tag{9}$$

---

[3]) En posant $m=m_1m_1'$, $P'=m_1'(S(m))$ et $\mathfrak{H}'=\overline{P'\mathfrak{H}(m)}$, la restricition T' de $S(m)$ au so us-espace invariant $\mathfrak{H}'$ est de classe $C_0(1)$ et a la fonction minimum m_1; *cf.* [3], note [9]). Donc il exis te un opérateur unitaire $W\colon \mathfrak{H}'\to\mathfrak{H}(m_1)$ tel que $S(m_1)W=WT'$, et il n'y aura qu'à poser $P=WP'$.

On déduit de (8) et (9) que l'opérateur

$$C = BP\colon\ \mathfrak{H}(m) \to \mathfrak{H}_1$$

vérifie les relations

(10) $$\overline{C\mathfrak{H}(m)} = \mathfrak{H}_{10} \ni h_{10} \quad \text{et} \quad T_1 C = CS(m).$$

En utilisant (8) et (9) on déduit aussi que l'opérateur X_{10} défini par

(11) $$X_{10}(h \oplus h_2) = 0 \oplus Ch \qquad (h \oplus h_2 \in \mathfrak{H}(m) \oplus \mathfrak{H}_2)$$

appartient à $\mathfrak{X}$.

Un type dual d'opérateurs dans $\mathfrak{X}$ peut être construit de la manière suivante. En passant aux adjoints il dérive de (2) que

$$S(m)^* \oplus T_1^* \succ T^* \succ S(m)^* \oplus T_2^*.$$

En fixant un vecteur $h_{20} \in \mathfrak{H}_2$ on montre tout comme ci-dessus (et en rappelant que $S(m)^*$ est unitairement équivalent à $S(m^\sim)$) qu'il existe un opérateur

$$D\colon\ \mathfrak{H}(m) \to \mathfrak{H}_2$$

tel que

(11) $$\overline{D\mathfrak{H}(m)} \ni h_{20} \quad \text{et} \quad T_2^* D = D\,S(m)^*,$$

et par conséquent

(13) $$S(m)D^* = D^* T_2.$$

Pour l'opérateur X_{20} défini par

(14) $$X_{20}(h \oplus h_2) = D^* h_2 \oplus 0 \qquad (h \oplus h_2 \in \mathfrak{H}(m) \oplus \mathfrak{H}_2)$$

on déduit de (13) que $X_{20} \in \mathfrak{X}$.

3. Cela étant, appliquons (6) d'abord aux opérateurs X_0 et X_{10}, le dernier dérivant d'un vecteur fixé $h_{10} \in \mathfrak{H}_1$. Puisque les ensembles de valeurs de X_0 et X_{10} sont évidemment orthogonaux l'un à l'autre, l'égalité $X_0 M X_{10} = X_{10} M X_0$ entraîne $X_0 M X_{10} = 0$, donc

$$X_0 M(0 \oplus Ch) = X_0 M X_{10}(h \oplus h_2) = 0$$

pour tout $h \oplus h_2 \in \mathfrak{H}(m) \oplus \mathfrak{H}_2$. Vu (10) cela entraîne aussi

$$X_0 M(0 \oplus h_{10}) = 0;$$

en vertu de (7) cela veut dire que

(15) $$M(0 \oplus h_{10}) = 0 \oplus h_{20}$$

pour un certain vecteur $h_{20} \in \mathfrak{H}_2$.

Envisageons l'opérateur X_{20} construit en partant de ce vecteur h_{20} et l'opérateur X_{10} ci-dessus, engendré par h_{10}. Par les définitions (11) et (14) les ensembles de valeurs de X_{10} et X_{20} sont orthogonaux l'un à l'autre, donc l'égalité $X_{10}MX_{20}= =X_{20}MX_{10}$ entraîne $X_{20}MX_{10}=0$. On a donc

$$X_{20}M(0\oplus Ch) = X_{20}MX_{10}(h\oplus h_2) = 0$$

pour tout $h\oplus h_2 \in \mathfrak{H}(m)\oplus\mathfrak{H}_2$. Vu (10) cela entraîne aussi

$$X_{20}M(0\oplus h_{10}) = 0. \tag{16}$$

En vertu des relations (14), (15), (16) et (12) on a

$$D^*h_{20}\oplus 0 = X_{20}(0\oplus h_{20}) = X_{20}M(0\oplus h_{10}) = 0,$$

d'où

$$D^*h_{20} = 0, \quad h_{20}\perp \overline{D\mathfrak{H}(m)}\ni h_{20}, \quad h_{20} = 0.$$

Toujours par (15) on a donc $M(0\oplus h_{10})=0$, et comme M est injectif, il résulte que $h_{10}=0$.

Comme pour h_{10} on a pu choisir un vecteur quelconque de $\mathfrak{H}_1$, on conclut que $\mathfrak{H}_1=\{0\}$, et par conséquent $T\succ S(m)$; puisque $S(m)$ admet un vecteur cyclique, il en est de même de T. Cela achève la démonstration.

Ouvrages cités

BÉLA SZ.-NAGY et CIPRIAN FOIAŞ

[1] Opérateurs sans multiplicité, *Acta Sci. Math.*, **50** (1969), 1—18.

[2] Modèle de Jordan pour une classe d'opérateurs de l'espace de Hilbert, *ibidem*, **31** (1970), 91—115.

[3] Compléments à l'étude des opérateurs de classe C_0, *ibidem*, **31** (1970), 287—296.

(Reçu le 3 avril 1971)