О точных неравенствах между нормами функций и их производных

В. В. АРЕСТОВ (Свердловск, СССР)

1. Пусть k, n $(0 \leqq k < n)$ — целые числа; $1 \leqq p, q, r \leqq \infty$; I — числовая ось $(-\infty, \infty)$ или полуось $[0, \infty)$; пространства $C = C(I)$ и $L_p = L_p(I)$ определены обычным образом; $L^n_{p,r}$ — множество функций $f \in L_r$, у которых $n-1$-ая производная локально абсолютно непрерывна на I, а $f^{(n)} \in L_p$; $L^n_{V,r}$ — класс таких функций $f \in L^n_{\infty,r}$, что производная $f^{(n)}$ почти всюду на I совпадает с некоторой функцией φ ограниченной вариации $V\varphi = V_I\varphi$; в частном случае $r = \infty$ положим $L^n_{p,\infty} = L^n_p$ и $L^n_{V,\infty} = L^n_V$.

Настоящая работа посвящена точным неравенствам вида

$$\|f^{(k)}\|_{L_q} \leqq D \|f\|^{\alpha}_{L_r} \|f^{(n)}\|^{\beta}_{L_p}, \quad f \in L^n_{p,r}, \tag{1}$$

где α, β, D — постоянные, не зависящие от f. Константа D может быть конечной лишь при (см. [13])

$$\alpha = \frac{n-k-p^{-1}+q^{-1}}{n-p^{-1}+r^{-1}}, \quad \beta = 1-\alpha. \tag{2}$$

Если в неравенстве (1) константа D наилучшая, т.е.

$$D = \sup_{f \in L^n_{p,r}} \|f^{(k)}\|_{L_q} \|f\|^{-\alpha}_{L_r} \|f^{(n)}\|^{-\beta}_{L_p}, \tag{3}$$

то отличную от постоянной функцию $u \in L^n_{p,r}$, на которой неравенство (1) обращается в равенство, называют экстремальной; будем говорить что она единственная, если любая другая экстремальная функция имеет вид $c\,u(\nu t + \mu)$, где $\nu > 0$, μ, c — некоторые числа, причем $\mu = 0$ если $I = [0, \infty)$.

Неравенства вида (1) впервые изучались Харди, Литтлвудом [1], Ландау [2] и Адамаром [3]. С.-Надь [7] доказал справедливость неравенства (1), получил наилучшую константу и выписал экстремальную функцию в случае $n = 1$, $p \geqq 1$, $q > r > 0$. Это единственный случай, когда неравенство (1) исследовано для всех возможных значений параметров p, q, r. В следующую таблицу сведены те случаи, когда в (1) вычислена наилучшая константа; в некоторых из этих случаев исследовано множество экстремальных функций.

n	k	q	r	p	Авторы
			$I=(-\infty,\infty)$		
2	1	∞	∞	∞	Ландау [2]
$2<n\leq 5$		∞	∞	∞	Боссэ (Шилов) [5]
произвольное	$0<k<n$	∞	∞	∞	Колмогоров [6]
1	0	$\geq r$	>0	≥ 1	С.-Надь [7]
произвольное	$0<k<n$	2	2	2	Харди, Литтлвуд, Полиа [4]
произвольное	$0<k<n$	1	1	1	Штейн [9]
произвольное	$0\leq k<n$	∞	2	2	Тайков [16]
2	1	2	≥ 1	$\frac{r}{r-1}$	Харди, Литтлвуд, Полиа [4]
2	0,1	∞	≥ 1	∞	Габушин [15]
			$I=[0,\infty)$		
2	1	∞	∞	∞	Ландау [2]
3	1,2	∞	∞	∞	Маторин [8]
2	1	2	2	2	Харди, Литтлвуд, Полиа [4]
произвольное	$0\leq k<n$	∞	2	2	Габушин [18]
2	1	1	1	1	Бердышев [19]

Окончательные условия существования неравенства (1) получены Габушиным [13]; он доказал, что (1) с конечной константой D имеет место в том и только в том случае, если выполнены равенства (2) и неравенство

$$\frac{n-k}{r}+\frac{k}{p}\geq\frac{n}{q}. \tag{4}$$

В дальнейшем, когда будет идти речь о задаче (1), будем предполагать, что эти условия имеют место.

Наряду с задачей (1) мы будем рассматривать следующий частный случай задачи Стечкина [10, 11] о наилучшем приближении неограниченного оператора линейными ограниченными операторами.

Пусть $K^n_{p,r}$ — класс функций $f\in L^n_{p,r}$, у которых $\|f^{(n)}\|_{L_p}\leq 1$; а $\Sigma(N)$ — множество линейных ограниченных операторов S действующих из L_r в L_q с нормой

$$\|S\|=\|S\|^{L_q}_{L_r}\leq N.$$

Положим

$$\varrho(S)=\sup_{f\in K^n_{p,r}}\|f^{(k)}(x)-S(x,f)\|_{L_q},\quad E(N)=\inf_{S\in\Sigma(N)}\varrho(S); \tag{5}$$

в частном случае $q=r=\infty$ будем считать

$$E(N) = \inf_{\|S\|_C^C \leqq N} \sup_{\substack{\|f^{(n)}\|_{L_p} \leqq 1 \\ f \in C}} \|f^{(k)}(x) - S(x, f)\|_C = E_\infty(N). \tag{6}$$

Задача состоит в вычислении величины $E(N)$ и определении экстремального оператора S_N, удовлетворяющего условиям

$$S_N \in \Sigma(N), \quad \varrho(S_N) = E(N).$$

Для произвольных $h>0$, $\overline{N}>0$, справедливо равенство

$$E(h^{-k+q^{-1}-r^{-1}}\overline{N}) = h^{n-k+q^{-1}-p^{-1}}E(\overline{N}); \tag{7}$$

причем, если при $N=\overline{N}$ экстремальный оператор $S_{\overline{N}}$ существует, то оператор $h^{-k}S_{\overline{N}}(xh^{-1}, f(ht))$ будет экстремальным при $N=h^{-k+q^{-1}-r^{-1}}\overline{N}$. В случае $p=q=r$ это утверждение доказано Стечкиным [11], для произвольных значений параметров оно доказывается аналогично (см. [17]).

В некоторых случаях решение задачи (5) позволяет получить решение задачи (1) (см. работы [10], [11], [12], [14], [16], [18], [19]).

В данной работе найдена наилучшая константа и описано множество экстремальных функций неравенства (1) при $n=2$, $r=\infty$, $p \geqq 1$, $q \geqq 2p$ и $n=3$, $q=r=\infty$, $1 \leqq p < \infty$ для $I=[0, \infty)$ и $I=(-\infty, \infty)$; в случае $n=2$ существенно используется результат С.-Надя [7], а в случае $n=3$ вначале приводится решение задачи (6), и как следствие выписывается точное неравенство (1).

2. *Величина* $E(N)$ *и константа* (3) *связаны неравенством*

$$D \leqq \left(\frac{1}{\beta}E(N)\right)^\beta \left(\frac{1}{\alpha}N\right)^\alpha. \tag{8}$$

В случае $p=q=r$ это неравенство доказал Стечкин [10, 11] и сейчас мы фактически повторим его рассуждения.

Для любой функции $f \in L^n_{p,r}$ и оператора $S \in \Sigma(N)$ имеем

$$\|f^{(k)}\|_{L_q} \leqq \|f^{(k)} - S(f)\|_{L_q} + \|S(f)\|_{L_q} \leqq \varrho(S)\|f^{(n)}\|_{L_p} + N\|f\|_{L_r}.$$

Отсюда

$$\|f^{(k)}\|_{L_q} \leqq E(N)\|f^{(n)}\|_{L_p} + N\|f\|_{L_r}.$$

Заменив здесь N на $h^{-k+q^{-1}-r^{-1}}N$, в силу (7), получим неравенство

$$\|f^{(k)}\|_{L_q} \leqq h^{n-k-p^{-1}+q^{-1}}E(N)\|f^{(n)}\|_{L_p} + h^{-k+q^{-1}-r^{-1}}N\|f\|_{L_r}.$$

Минимизируя его правую часть по $h>0$, придем к соотношению

$$\|f^{(k)}\|_{L_q} \leqq \overline{D}\|f\|^\alpha_{L_r}\|f^{(n)}\|^\beta_{L_p} \leqq E(N)\|f^{(n)}\|_{L_p} + N\|f\|_{L_r}, \tag{9}$$

в котором

$$(10)\qquad \bar{D} = \left(\frac{1}{\beta}E(N)\right)^{\beta}\left(\frac{1}{\alpha}N\right)^{\alpha} = \frac{(E(1))^{\beta}}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}},$$

а отсюда следует (8).

Пусть при $q=\infty$ существует функция $u \in L^n_{p,r}$ и линейный оператор $\bar{S}$ из L_r в C, удовлетворяющие равенству

$$(11)\qquad \varrho(\bar{S}) = \left(u^{(k)}(0) - \|\bar{S}\|\,\|u\|_{L_r}\right)\|u^{(n)}\|^{-1}_{L_p}.$$

Тогда $\varrho(\bar{S}) = E(\|\bar{S}\|)$ и оператор $\bar{S}$ — экстремальный.

Действительно

$$\varrho(\bar{S}) \geqq E(\|\bar{S}\|) \geqq \inf_{\|S\| \leqq \|\bar{S}\|} \left(u^{(k)}(0) - S(0, u)\right)\|u^{(n)}\|^{-1}_{L_p} \geqq$$
$$\geqq \left(u^{(k)}(0) - \|\bar{S}\|\,\|u\|_{L_r}\right)\|u^{(n)}\|^{-1}_{L_p} = \varrho(\bar{S}).$$

Этими соображениями мы будем пользоваться при вычислении величины $E_\infty(N)$.

Теорема 1. *Пусть $q=\infty$, $1<p<\infty$, $1 \leqq r \leqq \infty$. Тогда $E(N)<\infty$ и существует экстремальный оператор S_N. В случае $I = (-\infty, \infty)$ экстремальный оператор единственный и имеет вид свертки;* в случае $I=[0, \infty)$ *однозначно определяется функционал $S_N(0, f)$, а одним из экстремальных является оператор $S_N(0, f(x+t))$.*

В тех же предположениях неравенство (1) (с константой (3)) *имеет единственную экстремальную функцию.*

Доказательство этой теоремы содержится в [17].

3. В этом параграфе будет получено решение задачи (1) в случае $n=2$, $r=\infty$. При этом будет использоваться частный результат С.-Надя [7], который мы приведем в следующей форме.

Пусть $1 \leqq p < \infty$, $1 < q \leqq \infty$, $I = (-\infty, \infty)$. Тогда любая локально абсолютно непрерывная функция φ, обладающая свойствами $\varphi \in L$, $\varphi' \in L_p$, удовлетворяет неравенству

$$(12)\qquad \|\varphi\|_{L_q} \leqq Q\,\|\varphi\|^{\alpha}_{L}\|\varphi'\|^{\beta}_{L_p},$$

в котором $\alpha = 1-\beta$, $\beta = (1-q^{-1})/(2-p^{-1})$,

$$Q = \left\{\frac{2p-1}{2p} H\left(\frac{2p-1}{p(q-1)}, \frac{p-1}{p}\right)\right\}^{\beta},$$

$$H(x, y) = \frac{z(x+y)}{z(x)z(y)}, \quad z(x) = x^{-x}\Gamma(1+x)$$

для $x>0$ и $z(0)=1$. Неравенство точное. При $p>1$ оно имеет единственную экстремальную функцию ψ, которая при $q=\infty$ задана равенствами $\psi(t) = (1-|t|)^{\frac{p}{p-1}}$ для $|t|\leqq 1$, $\psi(t)=0$ для $|t|>1$, а при $1<q<\infty$ определена неявно уравнением $|t|=s(\psi)$ для $|t| \leqq T=s(0)$, где

$$s(\psi) = \int_{\psi}^{1} \frac{d\tau}{\tau^{\frac{1}{p}}(1-\tau^{q-1})^{\frac{1}{p}}} \qquad (0 \leqq \psi \leqq 1),$$

и равна нулю для $|t|>T$. В случае $p=1$, $1<q<\infty$, неравенство (12) строгое, а в случае $q=\infty$, $p=1$ обращается в равенство на любой функции φ, у которой $|\varphi|$ возрастает на некотором интервале $(-\infty, t_0)$ и убывает на (t_0, ∞).

Если $I=[0, \infty)$, то функции $\varphi \in L^1_{p,1}$ удовлетворяют неравенству

$$(12') \qquad \|\varphi\|_{L_q} \leqq 2^{\beta} Q \|\varphi\|^{\alpha}_{L} \|\varphi'\|^{\beta}_{L_p} \qquad (q > 1),$$

причем при $p>1$ экстремальными являются лишь функции $c\psi(\nu t)$ $(t \geqq 0)$, при $p=1$, $1<q<\infty$ неравенство строгое, а при $p=1$, $q=\infty$ экстремальной является любая монотонная функция. Чтобы в этом убедиться достаточно каждую функцию $\varphi \in L^1_{p,1}$ продолжить четно на всю ось и применить приведенный результат С.-Надя.

Для $1 \leqq p < \infty$, $1<q\leqq\infty$ обозначим через g функцию, удовлетворяющую условиям: $-\inf g = \sup g$; $g'(t)=\psi(t)$ для $t \in I$, если $p>1$; $g'(t)=1$ для $|t|<1$, $g'(t)=0$ для $|t|>1$, если $p=1$.

Теорема 2. *При $q \geqq 2p$ справедливо неравенство*

$$(13) \qquad \|f'\|_{L_q} \leqq D_{p,q} \|f\|^{\alpha}_{C} \|f''\|^{\beta}_{L_p}, \qquad f \in L^2_p,$$

в котором $\alpha = 1-\beta$, $\beta = (1-q^{-1})/(2-p^{-1})$,

$$D_{p,q} = \begin{cases} 2Q, & \text{если} \quad I = [0, \infty), \\ 2^{\beta} Q, & \text{если} \quad I = (-\infty, \infty). \end{cases}$$

При $p=1$, $q \geqq 2$ имеет место также неравенство

$$(14) \qquad \|f'\|_{L_q} \leqq D_{1,q} \|f\|^{\frac{1}{q}}_{C} (Vf')^{1-\frac{1}{q}}, \qquad f \in L^1_V,$$

Оба неравенства точные. Более того, если $I=[0, \infty)$, $q \geqq 2p$ или $I = (-\infty, \infty)$, $q>2p$, то при $1<p<\infty$ функция g является единственной экстремальной в (13), а при $p=1$, $q<\infty$ — в неравенстве (14).

Напомним, что в случае $p=q=\infty$ неравенство (13) получено Ландау [1].

Отметим, что условие $q \geqq 2p$ является естественным, так как совпадает в данном случае с (4).

Одновременно с доказательством теоремы будет установлено, что если $I=(-\infty, \infty)$, $q=2p$, то при $1<p<\infty$ множество F_p экстремальных функций неравенства (13), а при $p=1$ — неравенства (14), состоит из функций f, для каждой из которых найдется быть может счетное число непересекающихся интервалов $\Delta_i=(a_i, b_i)$ со свойствами $|f(t)|=\|f\|_C$ вне интервалов Δ_i, и

$$(15) \qquad f(t)=\theta_i\|f\|_C\|g\|_C^{-1} g\left(T \frac{2t-(a_i+b_i)}{b_i-a_i}\right)$$

для $t \in \Delta_i$, где $|\theta_i|=1$, $(-T, T)$ — носитель функции g'; условие $f'' \in L_p$ при $p>1$ и $Vf'<\infty$ при $p=1$ эквивалентно неравенству $\Sigma\,|b_i-a_i|^{1-2p}<\infty$, откуда, в частности, следует, что на любом интервале конечной длины может быть лишь конечное число интервалов Δ_i. Если $q=\infty$, то неравенство (14) обращается в равенство на каждой функции f, у которой производная монотонная в случае $I=[0, \infty)$ и монотонная на интервалах $(-\infty, t')$, (t', ∞) для некоторого t' в случае $I=(-\infty, \infty)$; множество F' таких функций в данном случае описывает весь класс экстремальных функций. Экстремальные функции неравенства (13) при $p=1$, $q=\infty$ исчерпываются множеством $F=F'L_p^2$. При $p=1$, $q<\infty$ неравенство (13) строгое.

Докажем утверждения теоремы при $p<\infty$. Нетрудно проверить, что функции, перечисленные только что и в формулировке теоремы, обращают соответствующие неравенства в равенства.

Если $f \in L_p^2$ монотонная функция, то $\|f'\|_L \leqq 2\,\|f\|_C$ и f' удовлетворяет (12), если $I=(-\infty, \infty)$ и (12′) если $I=[0, \infty)$; поэтому f удовлетворяет (13). Из утверждения С.-Надя об экстремальных функциях неравенства (12) следует, что на подмножестве монотонных функций множества L_p^2 неравенство (13) при $p=1$, $q<\infty$ строгое, при $p=1$, $q=\infty$ оно обращается в равенство лишь на функциях класса F, а при $p>1$ монотонные функции $f \in L_p^2$, обращающие (13) в равенство имеют вид

$$(16) \qquad f(t)=cg(\nu t+\mu), \qquad t \in I,$$

($\mu=0$, если $I=[0, \infty)$).

Пусть теперь f — произвольная функция класса L_p^2. Множество Ω точек $t \in I$, в которых $f'(t) \neq 0$, состоит не более чем из счетного числа непересекающихся интервалов $\Delta_i=(a_i, b_i)$ и, быть может, еще одного интервала $\Delta_0=[0, b_0)$ в случае $I=[0, \infty)$. При каждом i определим функцию $f_i \in L_p^2$, положив $f_i(t)=f(t)$ для $t \in \Delta_i$ и допределив ее константами на все I до непрерывной функции. Функции f_i монотонные и значит удовлетворяют (13).

Рассмотрим вначале случай $q=\infty$. Из того факта, что (13) (при $q=\infty$, $I=[0,\infty)$) с какой-то конечной константой D имеет место, легко следует (см. [7]), что $f'(t)\to 0$ при $|t|\to\infty$ для любой функции $f\in L_p^2$ ($p<\infty$). Поэтому существует интервал Δ_j, на котором $\|f'\|_{C(\Delta_j)} = \|f'\|_{C(I)}$. Отсюда

$$\|f'\|_C=\|f_j'\|_C\leqq D_{p,\infty}\|f_j\|_C^\alpha\|f_j''\|_{L_p}^\beta\leqq D_{p,\infty}\|f\|_C^\alpha\|f''\|_{L_p}^\beta,$$

т. е. при $q=\infty$ любая функция класса L_p^2 удовлетворяет (13). Очевидно экстремальной может быть только монотонная функция. Все утверждения теоремы, относящиеся к этому случаю, доказаны.

При $2p\leqq q<\infty$, записав (13) для функций f_i, получаем соотношения

$$\|f'\|_{L_q(\Delta_i)}^q\leqq D_{p,q}^q\|f\|_{C(\Delta_i)}^{\alpha q}\|f''\|_{L_p(\Delta_i)}^{p\gamma}, \tag{17}$$

где $\gamma=(q-1)/(2p-1)\geqq 1$; просуммировав их, будем иметь

$$\|f'\|_{L_q}^q=\sum\|f'\|_{L_q(\Delta_i)}^q\leqq D_{p,q}^q\|f\|_C^{\alpha q}\sum\|f''\|_{L_p(\Delta_i)}^{p\gamma}\leqq D_{p,q}^q\|f\|_C^{\alpha q}\|f''\|_{L_p}^{p\gamma}. \tag{18}$$

Таким образом и в этом случае (13) справедливо для произвольной функции $f\in L_p^2$.

Очевидно при $q<\infty, p=1$ неравенство (13) строгое. Пусть f — экстремальная функция в (13) при $q<\infty$, $p>1$. Тогда на ней (18), а значит и (17) обращаются в равенства. Из этого в частности следует, что каждая функция f_i — экстремальная (монотонная) и $\|f_i\|_C=\|f\|_C$. Поэтому в случае $I=[0,\infty)$ для каждого i имеет место соотношение

$$f(t)=\theta_i\|f\|_C\|g\|_C^{-1}g\left(T\frac{t-a_i}{b_i-a_i}\right),\qquad t\in\Delta_i, \tag{19}$$

где $|\theta_i|=1$. Отсюда $|f(a_i)|=\|f\|_C$, но $f'(a_i)\neq 0$ вместе с $g'(0)$, а поскольку f' — непрерывная функция, то $a_i=0$ и, следовательно, $f(t)=cg(tTb_0^{-1})$ для $t\in[0,\infty)$. То есть в данном случае функция g — единственная экстремальная.

Аналогично, в случае $I=(-\infty,\infty)$ экстремальная функция f на интервалах Δ_i задается формулой (15), а так как при $2p<q$ ($\gamma>1$) последнее неравенство (18) обращается в равенство, если в сумме только одно слагаемое отлично от нуля, то f совпадает с одной из функций f_i, или, что тоже самое, имеет вид (16). При $q=2p$ ($\gamma=1$) получаем, что $f\in F_p$, но и обратно, каждая функция этого класса — экстремальная.

Обратимся к неравенству (14). Повторяя доказательство С.-Надя неравенства (12) при $p=1$ убеждаемся, что если $\varphi\in L$ имеет ограниченное изменение $\mathrm{V}\varphi$ на I, то

$$\|\varphi\|_{L_q}\leqq Q_1\|\varphi\|_L^{\frac{1}{q}}(\mathrm{V}\varphi)^{1-\frac{1}{q}}\qquad(1<q\leqq\infty), \tag{20}$$

где $Q_1=1$, если $I=[0,\infty)$ и $Q_1=2^{\frac{1}{q}-1}$ если $I=(-\infty,\infty)$. Причем при $q<\infty$ экстремальными являются только функции, равные константе на некотором интервале (a,b) ($[0,b)$, если $I=[0,\infty)$) и нулю на множестве $I\backslash[a,b]$. При $q=\infty$ экстремальными будут лишь производные функций $f\in F'$.

Отсюда следует, что монотонные функции класса L_V^1 удовлетворяют (14). Если теперь для произвольной функции $f\in L_V^1$ вместо множества Ω рассмотреть множество точек $t\in I$, в которых $f'(t+0)f'(t-0)>0$, то так же как и раньше убеждаемся, что f удовлетворяет (14). Множество экстремальных функций исследуется аналогично тому, как это было сделано для неравенства (13).

Сгладив экстремальную функцию неравенства (14), легко убедиться, что (13) при $p=1$, $q<\infty$ точное.

Теорема доказана.

Стечкин [10, 11] решил задачу (6) в случае $p=\infty$, $n=2, 3$; в частности, он доказал, что для $n=2$ операторы

(21) $$S_h(x,f)=\frac{1}{2h}\{f(x+h)-f(x-h)\},$$

(22) $$S_h^+(x,f)=\frac{1}{h}\{f(x+h)-f(x)\}$$

являются экстремальными, соответственно, при $N=h^{-1}$, $I=(-\infty,\infty)$ и $N=2h^{-1}, I=[0,\infty)$.

Теорема 3. *Если $n=2$, $k=1$, $1\leq p\leq\infty$, $h>0$, то*

(23)
$$E_\infty(h^{-1})=\frac{1}{2}h^{\frac{p-1}{p}}\left(\frac{2p-2}{2p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}} \quad \textit{для} \quad I=(-\infty,\infty),$$
$$E_\infty(2h^{-1})=h^{\frac{p-1}{p}}\left(\frac{p-1}{2p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}} \quad \textit{для} \quad I=[0,\infty).$$

Соответствующими экстремальными операторами являются (21) *и* (22).

Этот результат, в силу (8), влечет, что для любой функции $f\in L_p^2$ выполняется неравенство

(24) $$\|f'\|_C\leq D_I\|f\|_C^{\frac{p-1}{2p-1}}\|f''\|_{L_p}^{\frac{p}{2p-1}},$$

в котором

$$(25)\qquad D_{[0,\infty)} = 2^{\frac{p-1}{2p-1}}\left(\frac{2p-1}{p}\right)^{\frac{p}{2p-1}}, \quad D_{(-\infty,\infty)} = 2^{-\frac{1}{2p-1}}\left(\frac{2p-1}{p}\right)^{\frac{p}{2p-1}}.$$

Мы получаем еще одно доказательство неравенства (13) при $q=\infty$.

В случае $p=\infty$ теорема 3 доказана Стечкиным [10, 11]. Докажем ее для $p<\infty$. Очевидно

$$\|S_h\| = h^{-1}, \quad \|S_h^+\| = 2h^{-1}.$$

При $I=[0,\infty)$ для произвольной функции $f\in L_p^2$ имеем равенство

$$f'(x)-S_h^+(x,f) = -\frac{1}{h}\int_0^h (h-t)f''(x+t)\,dt.$$

Откуда

$$|f'(x)-S_h^+(x,f)| \leqq \frac{1}{h}\|h-t\|_{L_{p'}(0,h)}\|f''\|_{L_p},$$

где $p' = p/(p-1)$, и, следовательно,

$$E_\infty(2h^{-1}) \leqq \varrho(S_h^+) \leqq h^{\frac{p-1}{p}}\left(\frac{p-1}{2p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Неравенство (8) приводит теперь к (24) с константой (25). На функции

$$f(t)=\begin{cases} 1, & \text{если}\quad t\geqq 1\\ 1-2(1-t)^{\frac{2p-1}{p-1}}, & \text{если}\quad 0\leqq t<1,\end{cases}$$

при $p>1$ и на произвольной функции $f\in L_1^2$ с монотонной производной при $p=1$ неравенство (24) обращается в равенство. Следовательно формула (23) имеет место и оператор S_h^+ — экстремальный.

Если $I = (-\infty,\infty)$, то для $f\in L_p^2$

$$(26)\qquad f'(x)-S_h(x,f) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^h \sigma(h,t)f''(x+t)\,dt,$$

где

$$\sigma(h,t) = \begin{cases} h+t & \text{при}\quad t\in(-h,0),\\ t-h & \text{при}\quad t\in(0,h);\end{cases}$$

дальнейшие рассуждения проводится так же, как в случае $I=[0,\infty)$.

Теорема доказана.

4. Перейдем к случаю $n=3$. В силу (7) задачу (6) достаточно решить для некоторого конкретного значения N.

Пусть вначале $1<p<\infty$. Прежде чем сформулировать и доказать относящиеся к этому случаю результаты, мы докажем несколько вспомогательных утверждений.

При $\alpha\in[1, \infty)$, $t\in(-\infty, \infty)$ положим

$$\varphi(t)=\varphi(t, \alpha)=t^2-2t\frac{\alpha^{3p-2}}{\alpha^{3p-2}+1}+\frac{\alpha^{3p-3}(\alpha^{3p-2}-1)}{(\alpha^{3p-3}+1)(\alpha^{3p-2}+1)}, \tag{27}$$

$$\psi(t)=\psi(t, \alpha)=|\varphi(t, \alpha)|^{\frac{1}{p-1}}\operatorname{sign}\varphi(t, \alpha)$$

и рассмотрим на интервале $[1, \infty)$ свойства непрерывных функций

$$R(\alpha)=\int_0^1\left(t-\frac{1}{1+\alpha^2}\right)\psi(t, \alpha)\,dt, \quad r(\alpha)=\int_0^1\psi(t, \alpha)\,dt. \tag{28}$$

Лемма 1. *Функция R имеет хотя бы один нуль на интервале* $(1, \infty)$, *наибольший нуль α_p этой функции конечен и справедливо неравенство*

$$r(\alpha_p)>0. \tag{29}$$

Доказательство. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\varphi(1)=-\alpha^{3(1-p)}\varphi(0), \quad \varphi_t'(1)=-\alpha^{2-3p}\varphi_t'(0) \tag{30}$$

и наименьший нуль $t(\alpha)$ полинома $\varphi(t)$ имеет вид

$$t(\alpha)=\frac{\alpha^{3p-2}}{\alpha^{3p-2}+1}\left\{1-\left(\frac{\alpha^{3p-1}+1}{\alpha^{3p-1}+\alpha^{6p-4}}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Так как функция $s(\alpha)=t(\alpha)-\frac{1}{1+\alpha^2}$ непрерывна при $\alpha\geqq 1$, причем $s(1)=-\frac{1}{2}$, $s(\infty)=1$, то найдется такое число $\bar\alpha>1$, что $\frac{1}{1+\bar\alpha^2}=t(\bar\alpha)$.

В силу (30), полином $\varphi(t)=\varphi(t, \bar\alpha)$ имеет на интервале $[0, 1]$ лишь один нуль $t(\bar\alpha)$, но $\varphi(0)>0$, поэтому полнином φ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку $t(\bar\alpha)$. Отсюда

$$R(\bar\alpha)=\int_0^1[t-t(\bar\alpha)]\psi(t, \bar\alpha)\,dt<0.$$

С другой стороны

$$R(\infty)=\int_0^1 t(1-t)^{\frac{2}{p-1}}\,dt>0.$$

Следовательно, уравнение $R(\alpha)=0$, имеет корень на полуоси $(\bar{\alpha}, \infty)$ и наибольший из этих корней α_p конечен.

Если $\mu>1$ — нуль функции r, то поскольку $\psi(t,\mu)>0$, при $0\leqq t<t(\mu)$ и $\psi(t,\mu)<0$ при $1\geqq t>t(\mu)$, имеем

$$R(\mu)=\frac{\mu^2}{1+\mu^2}r(\mu)+\int_0^1(t-1)\psi(t,\mu)\,dt=0=$$

$$=\int_0^1(t-1)\psi(t,\mu)\,dt<[t(\mu)-1]r(\mu)=0.$$

Таким образом, любой нуль функции r (если таковой существует) лежит левее точки α_p, но $r(\infty)>0$, поэтому и $r(\alpha_p)>0$, ч. т. д.

В дальнейшем положим $\alpha=\alpha_p$,

$$a_{-1}=0,\quad a_\mu=\sum_{i=0}^{\mu}\alpha^i\qquad(\mu=0,1,\ldots).$$

Определим затем при $t\geqq 0$ функцию $z(t)$ следующим образом

$$z(t)=(-1)^\mu\alpha^{3\mu(1-p)}\varphi\left(\frac{t-a_{\mu-1}}{\alpha^\mu}\right),\qquad t\in[a_{\mu-1},a_\mu),\quad \mu=0,1,\ldots.\tag{31}$$

Согласно (30), она непрерывно дифференцируема. Кроме того

$$z''(t)=(-1)^\mu 2\alpha^{\mu(1-3p)}\quad t\in(a_{\mu-1},a_\mu).\tag{32}$$

Нам будет удобно считать, что функция z'' непрерывна слева и $z''(0)=0$; в этом предположении

$$\begin{gathered} z''(+0)-z''(0)=2,\\ z''(a_\mu+0)-z''(a_\mu)=(-1)^\mu 2\alpha^{\mu(1-3p)}(1+\alpha^{1-3p}),\qquad \mu=0,1,\ldots,\end{gathered}\tag{33}$$

$$\mathrm{V}z''=\mathop{\mathrm{V}}_0^\infty z''=\frac{4}{1-\alpha^{1-3p}}.\tag{34}$$

Функция

$$\theta(t)=|z(t)|^{\frac{1}{p-1}}\operatorname{sign}z(t)\tag{35}$$

абсолютно интегрируема на $[0,\infty)$, поэтому функция

$$\eta(t)=\int_0^t\int_0^{t_1}\int_{t_2}^\infty\theta(\tau)\,d\tau\,dt_2\,dt_1\tag{36}$$

определена и трижды непрерывно дифференцируема при $t\geqq 0$.

Докажем, что функция η обладает также следующими свойствами.

Лемма 2. *Функция η неотрицательна, ограничена и при любом $\mu=0, 1, \ldots$*

$$\eta(a_{2\mu-1})=0, \quad \eta(a_{2\mu})=\|\eta\|_{C[0,\infty)}.$$

Доказательство. Справедливы равенства

$$\eta''(a_{\mu-1}) = (-1)^{\mu}\frac{\alpha^{2-2\mu}}{1+\alpha^2}\int_0^1 \psi(t)\,dt. \tag{37}$$

В самом деле

$$\eta''(a_{\mu-1}) = \int_{a_{\mu-1}}^{\infty}\theta(\tau)\,d\tau = \sum_{\nu=\mu}^{\infty}\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu}\theta(\tau)\,d\tau;$$

если в каждом интеграле под знаком суммы сделать замену $\tau = a_{\nu-1}+\alpha^{\nu}t$ и использовать (31), (35), то получим (37).

Докажем теперь, что

$$\eta'(a_{\mu-1})=0 \qquad (\mu=0, 1, \ldots). \tag{38}$$

Имеем

$$\eta'(a_\mu)-\eta'(a_{\mu-1}) = \int_{a_{\mu-1}}^{a_\mu}\eta''(t)\,dt = \int_{a_{\mu-1}}^{a_\mu}\{\eta''(t)-\eta''(a_{\mu-1})\}\,dt+(a_\mu-a_{\mu-1})\eta''(a_{\mu-1}) =$$

$$= \alpha^{\mu}\eta''(a_{\mu-1})-\int_{a_{\mu-1}}^{a_\mu}(a_\mu-\tau)\theta(\tau)\,d\tau.$$

Заменив здесь $\eta''(a_{\mu-1})$ по формуле (37) и введя новую переменную $t\in[0, 1]$ формулой $\tau = a_{\mu-1}+\alpha^{\mu}t$, получим

$$\eta'(a_\mu)-\eta'(a_{\mu-1}) = (-1)^{\mu}\alpha^{-\mu}R(\alpha).$$

Поскольку $R(\alpha)=0$, то $\eta'(a_\mu)=\eta'(a_{\mu-1})$, но $\eta'(0)=0$, следовательно, равенства (38) проверены.

Покажем, что

$$\operatorname{sign}\eta'(t) = (-1)^{\mu} \quad \text{для} \quad t\in(a_{\mu-1}, a_\mu), \qquad \mu = 0, 1, \ldots . \tag{39}$$

В силу (37), функция η'' в точках $a_{\mu-1}$, a_μ принимает значения разных знаков. Согласно (38), производная η' на концах интервала $[a_{\mu-1}, a_\mu]$ равна нулю, поэтому если бы она имела еще нуль внутри него, то функция η'' имела бы там уже не менее чем три нуля, а функция η''' — по крайней мере два. Но функция $\eta''' = -\theta$ имеет на интервале $[a_{\mu-1}, a_\mu]$ лишь один нуль $a_{\mu-1}+\alpha^{\mu}t(\alpha)$. Следовательно, $\operatorname{sign}\eta'(t)=\operatorname{sign}\eta''(a_{\mu-1})$ для $t\in(a_{\mu-1}, a_\mu)$, а, в силу (37) и (29), это утверждение совпадает с (39).

Имеем, далее

$$\eta(a_\mu)-\eta(a_{\mu-1}) = \int_{a_{\mu-1}}^{a_\mu} \eta'(t)\,dt = \int_{a_{\mu-1}}^{a_\mu}\int_{a_{\mu-1}}^{t} \eta''(\xi)\,d\xi\,dt =$$

$$= \int_{a_{\mu-1}}^{a_\mu} (a_\mu-\xi)\eta''(\xi)\,d\xi = \int_{a_{\mu-1}}^{a_\mu} (a_\mu-\xi)\{\eta''(\xi)-\eta''(a_{\mu-1})\}\,d\xi +$$

$$+\int_{a_{\mu-1}}^{a_\mu} (a_\mu-\xi)\eta''(a_{\mu-1})\,d\xi = \frac{1}{2}\alpha^{2\mu}\eta''(a_{\mu-1})-\frac{1}{2}\int_{a_{\mu-1}}^{a_\mu}(a_\mu-\tau)^2\theta(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда, тем же путем, что и при доказательстве равенств (38), находим, что $\eta(a_\mu)-\eta(a_{\mu-1}) = (-1)^\mu d$, где число d не зависит от μ. Поскольку $\eta(0)=0$, то $\eta(a_{2\mu-1})=0$, $\eta(a_{2\mu})=d$. Теперь из (38) и (39) следует, что функция η возрастает от нуля до значения d на интервалах $[a_{2\mu-1}, a_{2\mu}]$ и убывает до нуля на интервалах $[a_{2\mu}, a_{2\mu-1}]$.

Все утверждения леммы доказаны.

Положим

$$u(t) = \eta(|t|)-\frac{1}{2}\|\eta\|_{C[0,\infty)}, \qquad t\in(-\infty,\infty). \tag{40}$$

Из леммы 2 вытекает

Следствие. *Функция u четная, принадлежит классу L_p^3 и удовлетворяет соотношениям*

$$u(a_{\mu-1})=(-1)^{\mu-1}\|u\|_C, \qquad \mu=0,1,\ldots, \tag{41}$$

$$u'''(t) = -|z(|t|)|^{\frac{1}{p-1}}\operatorname{sign} tz(|t|), \qquad t\neq 0. \tag{42}$$

Теорема 4. *Пусть $n=3$, $k=2$, $1<p<\infty$, $I=(-\infty,\infty)$, функция φ определена формулой (27), а функция R — формулой (28), α — наибольший нуль функции R. Тогда*

$$E_\infty\left(\frac{4}{\varphi(0)(1-\alpha^{1-3p})}\right) = \frac{1+\alpha^{1-3p}}{\varphi(0)}\left\{\frac{1}{1-\alpha^{1-3p}}\int_0^1|\varphi(t)|^{\frac{p}{p-1}}dt\right\}^{\frac{p-1}{p}}, \tag{43}$$

а экстремальным будет оператор

$$S_2(x,f) = \frac{1+\alpha^{1-3p}}{\varphi(0)}\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^\mu\alpha^{\mu(1-3p)}\{f(x+a_\mu)-2f(x)+f(x-a_\mu)\}. \tag{44}$$

Доказательство. Соотношения (32), (33) и $z(0)=\varphi(0)>0$ позволяют записать оператор S_2 в виде

(45) $$S_2(x,f) = -\frac{1}{2z(0)}\int_0^\infty [f(x+t)+f(x-t)]\,dz''(t).$$

Из этого представления и формулы (34) получаем оценку

$$\|S_2\| \leqq \frac{1}{z(0)}\,\mathrm{V}z'' = \frac{4}{\varphi(0)(1-\alpha^{1-3p})} = N_2.$$

С другой стороны, в силу (41) и (44),

(46) $$S_2(0,u) = N_2\|u\|$$

и значит $\|S_2\| = N_2$.

Если функция $f\in L_p^3$, то $\|f^{(i)}\|_C<\infty$ $(i=0, 1, 2)$. Кроме того, $z(\infty)=z'(\infty)=$ $=z''(\infty)=0$. Поэтому, взяв в правой части (45) интеграл три раза по частям, получим тождество

$$f''(x)-S_2(x,f) = -\frac{1}{2z(0)}\int_{-\infty}^{\infty} f'''(x+t)z(|t|)\operatorname{sign} t\,dt.$$

Применяя затем неравенство Гельдера, находим

$$\varrho(S_2) \leqq \frac{2^{-\frac{1}{p}}}{\varphi(0)}\|z\|_{L_{p'}(0,\infty)} = \varrho_2 \qquad \left(p' = \frac{p}{p-1}\right).$$

Свойство (42) функции u влечет равенство

$$u''(0)-S_2(0,u) = \frac{1}{\varphi(0)}\int_0^\infty |z(t)|^{p'}\,dt = \varrho_2\|u'''\|_{L_p}.$$

Следовательно

(47) $$\varrho(S_2) = \varrho_2 = u_2''(0)-S_2(0,u_2),$$

где

$$u_2(t) = u(t)\|u'''\|_{L_p}^{-1}.$$

Равенства (46) и (47) показывают, что оператор S_2 и функция u_2 удовлетворяют условию (11), поэтому $E(N_2)=\varrho_2$ и оператор S_2 — экстремальный.

Осталось доказать, что ϱ_2 совпадает с правой частью равенства (43). Имеем

$$\int_0^\infty |z(t)|^{p'}\,dt = \sum_{\nu=0}^{\infty}\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} |z(t)|^{p'}\,dt.$$

Сделав в каждом интеграле замену $t = a_{\nu-1}+\alpha^{\nu}\tau$, получим

$$\int_0^{\infty}|z(t)|^{p'}dt = \frac{1}{1-\alpha^{1-3p}}\int_0^1|\varphi(\tau)|^{p'}d\tau. \tag{48}$$

Теорема доказана.

Функция z была определена (31) лишь для $t\geqq 0$; распространим ее на полуось $(-\infty, 0)$, положив

$$z(b,t) = z(t) = bt^2+\varphi(t), \qquad t\in(-\infty,0), \tag{49}$$

где $b<-1$ пока произвольное число.

Определим далее, на всей числовой оси трижды непрерывно дифференцируемую функцию $v(t)=v(b,t)$ таким образом, чтобы

$$v(t) = -u(t) \quad \text{при} \quad t\in[0,\infty), \tag{50}$$

$$v'''(t) = |z(t)|^{\frac{1}{p-1}}\operatorname{sign} z(t) \quad \text{при} \quad t\in(-\infty,\infty). \tag{51}$$

Лемма 3. *Существуют такие числа* $c_m<0, b_m<-1$ $(m=0,1,2)$, *что функции*

$$z_m(t)=z(b_m,t) \quad \text{и} \quad v_m(t)=v(b_m,t) \tag{52}$$

удовлетворяют условиям

$$v_0(c_0)=0, \quad v_0''(c_0)=0, \tag{53}$$

$$v_1(c_1) = -v(0), \quad z_1(c_1) = 0, \tag{54}$$

$$v_2(c_2) = -v(0), \quad z_2'(c_2) = 0. \tag{55}$$

Эти числа определяются единственным образом. Кроме того,

$$v_m'(t)>0 \quad \text{для} \quad t\in[c_m,0), \tag{56}$$

$$z_0'(c_0)>0, \quad z_1'(c_1)>0, \quad z_2(c_2)>0. \tag{57}$$

Доказательство. Согласно (27) полином φ имеет вид $t^2-2\gamma_1 t+\gamma_2$, где $\gamma_i>0$. Отсюда, в силу (49) и (51), следует, что при любом фиксированном значении $b<-1$ функции z и v''' имеют единственный отрицательный нуль

$$c_1(b) = \frac{\gamma_1+\sqrt{\gamma_1^2-(1+b)\gamma_2}}{1+b},$$

а функция z' —

$$c_2(b) = \frac{\gamma_1}{1+b};$$

нетрудно проверить, что функции c_1 и c_2 непрерывные и убывают от 0 до $-\infty$, если $b\in(-\infty, -1)$.

При каждом значении $b<-1$ непрерывная функция

$$g(t)=g(b,t)=v''(0)-v''(t)=\int_t^0 v'''(\tau)\,d\tau$$

возрастает от $-\infty$ в интервале $(-\infty, c_1(b))$ и убывает до нуля в интервале $(c_1(b), 0]$. Но, в силу (50), (40), (37) и (29), число $v''(0)$ отрицательное и не зависит от b. Поэтому при любом $b<-1$ существует единственное решение $c_0(b)<0$ уравнения $g(b, c_0(b))=v''(0)$ или $v''(c_0(b))=0$; очевидно

(58) $$(c_0(b)<c_1(b)<c_2(b)<0.$$

Если $t<0$ фиксировано, то v''' как функция переменного $b\in(-\infty, -1)$ непрерывна и возрастает от $-\infty$ до $(\gamma_2-2\gamma_1 t)^{\frac{1}{p-1}}>0$. Из этого легко вывести, что функция $c_0(b)$ непрерывна и убывает от 0 до $-\infty$.

Далее, поскольку

(59) $$v''(t)=v''(0)-\int_t^0 v'''(\tau)\,d\tau,\quad v'(t)=-\int_t^0 v''(\tau)\,d\tau,$$

то

(60) $$v''(t)<0,\quad v'(t)>0 \quad\text{для}\quad t\in(c_0(b), 0).$$

В силу (59), при каждом $t<0$ функция v'' переменного $b\in(-\infty, -1)$ убывает, а функция v' — возрастает; кроме того, функции $|c_m(b)|$ возрастают от 0 до ∞ и, согласно (58), (60), $v'(t)>0$ для $t\in(c_m(b), 0)$. Поэтому функции

$$G_m(b)=v(0)-v(c_m(b))=\int_{c_m(b)}^0 v'(t)\,dt$$

возрастают на $(-\infty, -1)$; очевидно эти функции непрерывные.

Используя соотношения (58)—(60), получаем

$$0\leqq G_m(b)=\int_{c_m(b)}^0\int_t^0\left\{\int_\xi^0 v'''(\tau)\,d\tau-v''(0)\right\}d\xi\,dt\leqq |c_m^3(b)|\,\mu(b)+|v''(0)|\,c_m^2(b),$$

где

$$\mu(b)=\max_{\tau\leqq 0} v''(\tau)=\left(\gamma_2-\frac{\gamma_1^2}{1+b}\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

и, поскольку $c_m(b)\to 0$ при $b\to-\infty$, то $G_m(-\infty)=0$.

С другой стороны функция $v''(t)$ убывает от нуля в интервале $[c_0(b), c_1(b)]$ и возрастает до значения $v''(0)<0$ в интервале $[c_1(b), 0]$, поэтому, если положить

$$\omega(t) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad t \leqq c_2(b), \\ v''(0) & \text{для} \quad t > c_2(b), \end{cases}$$

то, в силу (58), $v''(t) \leqq \omega(t)$ для $t \leqq 0$. Отсюда

$$G_m(b) = -\int_{c_m(b)}^{0}\int_{\tau}^{0} v''(t)\,dt\,d\tau \geqq -\int_{c_m(b)}^{0}\int_{\tau}^{0} \omega(t)\,dt\,d\tau \geqq$$

$$\geqq -\int_{c_2(b)}^{0}\int_{\tau}^{0} \omega(t)\,dt\,d\tau = \frac{1}{2}|v''(0)|\,c_2^2(b),$$

и, так как $c_2(b) \to -\infty$ при $b \to -1$, то $G_m(-1) = \infty$.

Следовательно существуют решения $b_m < -1$ уравнений

$$G_0(b_0) = v(0), \quad G_1(b_1) = G_2(b_2) = 2v(0) \tag{61}$$

(здесь $v(0)>0$). Но тогда числа b_m и $c_m = c_m(b_m)$ удовлетворяют системам (53)—(55) и выполняются соотношения (56), (57).

Осталось проверить, что числа $c_m < 0, b_m < -1$ единственные. Пусть $\bar{c}_m < 0, \bar{b}_m < -1$ другие решения систем (53)—(55). Второе уравнение каждой из этих систем, определение и свойства монотонности функций $c_m(b)$ показывают, что $\bar{c}_m = c_m(\bar{b}_m)$. В силу монотонности функций $G_m(b)$, уравнения (61) имеют единственные решения, следовательно $\bar{b}_m = b_m$, а значит и $\bar{c}_m = c_m$.

Все утверждения леммы доказаны.

Пусть $c_0 < 0, b_0 < -1$ — решения системы (53), а функции z_0 и v_0 определены в (52). Положим

$$\begin{aligned} y_0(t) &= z_0(t+c_0), \qquad t \in [0, \infty), \\ u_0(t) &= v_0(|t|+c_0)\,\mathrm{sign}\, t, \qquad t \in (-\infty, \infty). \end{aligned} \tag{62}$$

Функция u_0 нечетная и, в силу (53), $u_0 \in L_p^3$. Далее из (56), (53) и (41) вытекают соотношения

$$u_0(a_i - c_0) = (-1)^i \|u_0\|_{C(-\infty,\infty)}, \qquad i = 0, 1, \ldots,$$

а согласно (50)—(52) и (62), имеем

$$u_0'''(t) = |y_0(|t|)|^{\frac{1}{p-1}}\,\mathrm{sign}\, y_0(|t|), \qquad t \in (-\infty, \infty).$$

На интервале $[0, -c_0)$ функция $y_0''(t)$ постоянная и равна $2b_0 + 2 < 0$, кроме того $y_0(t) = z(t+c_0)$ для $t \geqq -c_0$, а следовательно $y_0''(-c_0+0) = 2$.

Отсюда, используя (34), получаем

$$\bigvee_0^\infty y_0'' = 2\frac{1+b_0+(1-b_0)\alpha^{3p-1}}{\alpha^{3p-1}-1}.$$

Введем обозначения

$$N_1 = (\varphi'(c_0)+2b_0c_0)^{-1}\bigvee_0^\infty y_0'',$$

$$e_0 = 2^{-\frac{1}{p}}(\varphi'(c_0)+2b_0c_0)^{-1}\left\{\int_{c_0}^{0}|\varphi(t)+b_0t^2|^{\frac{p}{p-1}}dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1-\alpha^{1-3p}}\int_0^1|\varphi(t)|^{\frac{p}{p-1}}dt\right\}^{\frac{p-1}{p}},$$

где, согласно (57),

$$\varphi'(c_0)+2b_0c_0 = y_0'(0) = z_0'(c_0) > 0.$$

Наконец докажем следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть* $n=3$, $k=1$, $1<p<\infty$, $I=(-\infty,\infty)$, *функция* φ *определена формулой* (27), *числа* $c_0<0, b_0<-1$ *являются решением уравнений* (53), $\alpha>1$ — *наибольший нуль функции* R, *заданной формулой* (28). *Тогда*

$$E_\infty(N_1)=e_0, \tag{63}$$

а экстремальным будет оператор

$$S_1(x,f) = -b_0(\varphi'(c_0)+2b_0c_0)^{-1}\{f(x-c_0)-f(x+c_0)\}-$$

$$-(\alpha^{3p-1}+1)(\varphi'(c_0)+2b_0c_0)^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\alpha^{i(1-3p)}\{f(x-c_0+a_i)-f(x+c_0-a_i)\}.$$

Это предложение доказывается также как теорема 4. Действительно, оператор S_1 можно записать в виде

$$S_1(x,f) = \frac{1}{2y_0'(0)}\int_0^\infty [f(x+t)-f(x-t)]\,dy_0''(t).$$

Из этого представления следует, что для функций $f\in L_p^3$ справедливо тождество

$$f'(x)-S_1(x,f) = \frac{1}{2y_0'(0)}\int_{-\infty}^{\infty} y_0(|t|)f'''(x+t)\,dt.$$

Отсюда

$$E_\infty(\|S_1\|) \leqq \varrho(S_1) \leqq \frac{2^{-\frac{1}{p}}}{y_0'(0)}\|y_0\|_{L_{p'}(0,\infty)} = \varrho_1,$$

где $p' = p\diagdown(p-1)$.

С другой стороны,

$$u_0'(0)-S_1(0,u) = \frac{1}{y_0'(0)}\int_0^\infty |y_0(t)|^{p'}\,dt = \varrho_1\|u_0'''\|_{L_p}.$$

Таким образом оператор S_1 и функция u_0 удовлетворяют условию (11). Следовательно

(64) $$E_\infty(\|S_1\|)=\varrho(S_1)=\varrho_1$$

и оператор S_1 — экстремальный.

Далее имеем

$$\|S_1\|\leqq N_1,\quad S_1(0,u_0)=N_1\|u_0\|_C,$$

поэтому $\|S_1\|=N_1$. Наконец, из определения функции y_0 получаем

$$\|y_0\|^{p'}_{L_{p'}(0,\infty)} = \int_{c_0}^0 |\varphi(t)+b_0t^2|^{p'}\,dt+\int_0^\infty |z(t)|^{p'}\,dt.$$

Откуда, в силу (48), следует, что (63) и (64) совпадают.

Теорема доказана.

Перейдем к случаю $I=[0,\infty)$. Пусть числа $c_k<0$, $b_k<-1$ $(k=1,2)$ удовлетворяют уравнениям (54) и (55), а функции z_k и v_k определены равенствами (52). Положим для $t\in[0,\infty)$

(65) $$y_k(t)=z_k(t+c_k),\quad u_k(t)=(-1)^{k-1}v_k(t+c_k).$$

Тогда

$$u_k\in{}^3_p,$$

$$u_k(a_{i-1}-c_k)=(-1)^{i+k+1}\|u_k\|_{C[0,\infty)}\qquad (i=0,1,\ldots),$$

$$u_k'''(t)=(-1)^{k-1}|y_k(t)|^{\frac{1}{p-1}}\operatorname{sign}y_k(t)\qquad (t\geqq 0),$$

$$y_1(0)=0,\quad y_2'(0)=0.$$

Кроме того, $y_k''(t)=2b_k+2<0$ для $t\in(0,-c_k)$, $y_k(t)=z(t+c_k)$ для $t\geqq -c_k$ и в частности, $y_k''(-c_k+0)=z''(+0)=2$. Поэтому, если положить $y_k''(0)=0$, то, с помощью (34), получаем

$$\bigvee_0^\infty y_k''=4\left(1+b_k+\frac{1}{1-\alpha^{1-3p}}\right).$$

Положим еще

$$\overline{N}_k=\frac{1}{y_k^{(2-k)}(0)}\bigvee_0^\infty y_k'',$$

$$e_k=\frac{1}{y_k^{(2-k)}(0)}\left\{\int_{c_k}^0 |\varphi(t)+b_kt^2|^{\frac{p}{p-1}}\,dt+\frac{1}{1-\alpha^{1-3p}}\int_0^1|\varphi(t)|^{\frac{p}{p-1}}\,dt\right\}^{\frac{p-1}{p}}.$$

Напомним, что функция φ определена формулой (27), функция R — формулой (28), а α — наибольший корень уравнения $R(\alpha)=0$, и докажем, наконец, такое предложение.

Теорема 6. *Если $n=3$, $k=1, 2$, $1<p<\infty$, $I=[0, \infty)$, то $E_\infty(\bar{N}_k)=e_k$, а операторы*

$$\bar{S}_k(x,f) = 2\frac{(-1)^{k-1}}{y_k^{(2-k)}(0)}\{(1+b_k)f(x)-b_kf(x-c_k)-$$

$$-(\alpha^{1-3p}+1)\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\alpha^{i(1-3p)}f(x+a_i-c_k)\}$$

являются экстремальными, соответственно, при $k=1, 2$.

Доказательство. Так же как и раньше (теоремы 4, 5) убеждаемся, что

$$S_k(x,f) = \frac{(-1)^{k-1}}{y_k^{(2-k)}(0)}\int_0^\infty f(x+t)\,dy_k''(t),$$

$$\|\bar{S}_k\|=\bar{N}_k, \quad \bar{S}_k(0, u_k)=\bar{N}_k\|u_k\|_C.$$

Далее для функций $f\in L_p^3$ справедливы тождества

$$f^{(k)}(x)-\bar{S}_k(x,f) = \frac{(-1)^{k-1}}{y_k^{(2-k)}(0)}\int_0^\infty f'''(x+t)y_k(t)\,dt,$$

отсюда

$$\varrho(\bar{S}_k) = \frac{\|y_k\|_{L_{p'}(0,\infty)}}{y_k^{(2-k)}(0)} = \left(u_k^{(k)}(0)-\bar{S}_k(0, u_k)\right)\|u_k'''\|_{L_p}^{-1}.$$

Таким образом операторы $\bar{S}_k$ и функции u_k удовлетворяют равенству (11), а это доказывает теорему 6.

Замечание. В силу теоремы 1 экстремальные операторы, выписанные в теоремах 4, 5, 6 и теореме 3 при $1<p<\infty$, будут единственными в случае $I=(-\infty, \infty)$, а в случае $I=[0, \infty)$ единственными являются значения этих операторов при $x=0$.

Теорема 7. *При $n=3$, $k=1, 2$, $1<p<\infty$ неравенство*

$$\|f^{(k)}\|_C \leqq \bar{D}\|f\|_C^\alpha\|f'''\|_{L_p}^\beta, \tag{66}$$

с константой $\bar{D}$, определенной формулой (10), точное на классе L_p^3. Функции u_0, u, u_1, u_2, определенные равенствами (62), (40), (65) являются единственными экстремальными, соответственно, при $k=1, 2$, $I=(-\infty, \infty)$ и $k=1, 2$, $I=[0, \infty)$.

Действительно, из доказательства теорем 4—6 видно, что каждая из перечисленных функций при соответствующем N удовлетворяет равенству

$$w^{(k)}(0) = N\|w\|_C + E_\infty(N)\|w'''\|_{L_p}.$$

В силу (9), из этого вытекает, что соответствующая функция обращает (66) в равенство. Единственность экстремальной функции содержится в теореме 1.

Рассмотрим случай $p=1$. Очевидно, из того, что $f\in L^n_{1,r}$ следует, что $f\in L^{n-1}_{V,r}$ и $Vf^{(n-1)}=\|f^{(n)}\|_L$.

Если $f\in L^{n-1}_{V,r}$, то $f^{(n-1)}(\pm\infty)=0$. Откуда

$$\|f^{(n-1)}\|_{L_\infty}=Y_I Vf^{(n-1)}, \tag{67}$$

где $Y_{[0,\infty)}=1$, $Y_{(-\infty,\infty)}=\frac{1}{2}$. В случае $I=[0,\infty)$ в (67) знак равенства достигается на любой функции g $(\in L^n_{1,r})$, у которой $|g^{(n-1)}|$ убывает. В случае $I=(-\infty,\infty)$ легко построить последовательность таких функций $g_\nu\in L^n_{1,r}$, что производные $g_\nu^{(n)}$ нечетные, $g_\nu^{(n-1)}(t)=1$ для $t\in(0,1)$ и $\|g_\nu^{(n)}\|_{L(1,\infty)}\to 0$ при $\nu\to\infty$. Следовательно неравенство (67) точное на классе $L^n_{1,r}$.

При $k=n-1$, $p=1$, $q=\infty$ для оператора $S\equiv 0$ имеем $E(N)\leqq\varrho(S)=Y_I$ и поскольку в этом случае константа $D=Y_I$ в неравенстве (1) наилучшая, то, в силу (8), $E(N)=Y_I$ и оператор $S\equiv 0$ является экстремальным. Он, вообще говоря, не единственный, поскольку, согласно теореме 3, операторы (21), (22) являются экстремальными при $n=2$ $(k=1)$, $p=1$, $q=r=\infty$.

Таким образом если $k=n-1$, $p=1$, $q=\infty$, то решения задач (1) и (5) тривиальные; в частности, это верно при $n=3$, $k=2$, $r=\infty$.

Нам осталось рассмотреть случай $n=3$, $k=1$, $p=1$.

Теорема 8. *Пусть* $n=3$, $k=1$, $p=1$, $h>0$. *Тогда*

$$E_\infty(h^{-1})=\frac{h}{8},\quad \textit{если}\quad I=(-\infty,\infty), \tag{68}$$

и

$$E_\infty(2h^{-1})=\frac{h}{2},\quad \textit{если}\quad I=[0,\infty),$$

операторы (21) *и* (22) *являются экстремальными, соответственно, при* $I=[0,\infty)$ *и* $I=(-\infty,\infty)$.

Функции $f\in L^2_V$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\|f'\|_C\leqq Z_I\sqrt{\|f\|_C\, Vf''}, \tag{69}$$

где $Z_{[0,\infty]}=2$, $Z_{(-\infty,\infty)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. *В случае* $I=[0,\infty)$ *единственной экстремальной будет функция*

$$w(t)=\begin{cases}1-2(1-t)^2 & \text{для} \quad 0\leqq t\leqq 1,\\ 1 & \text{для} \quad t>1,\end{cases}$$

а в случае $I=(-\infty,\infty)$ *таковой будет лищь нечетная функция* w_1, *определенная при* $t\geqq 0$ *формулой* $w_1=1+w$.

Если $f\in L_1^3$, *то*

$$\|f'\|_C<Z_I\sqrt{\|f\|_C\|f'''\|_L} \tag{70}$$

и константа Z_I *неуменьшаема.*

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $I=(-\infty,\infty)$. Для любой функции $f\in L_V^2$ имеет место тождество (26), т. е.

$$f'(x)-S_h(x,f)=-\frac{1}{2h}\int_0^h(h-t)\{f''(x+t)-f''(x-t)\}\,dt.$$

Поскольку $f''(\pm\infty)=0$, то при $t\in(0,h)$

$$\left|f''(x+t)-\frac{1}{2}f''(x)\right|\leqq\frac{1}{2}\bigvee_x^\infty f'',\quad \left|f''(x-t)-\frac{1}{2}f(x)\right|\leqq\frac{1}{2}\bigvee_{-\infty}^x f''.$$

Следовательно

$$f'(x)-S_h(x,f)\leqq\frac{h}{8}\mathrm{V}f''. \tag{71}$$

Отсюда приходим к неравенству

$$\|f'\|_C\leqq h^{-1}\|f\|_C+\frac{h}{8}\mathrm{V}f''.$$

Минимизируя его правую часть по $h>0$, получаем (69). Легко проверить, что на функции w_1 неравенство (69) обращается в равенство.

Функции класса L_1^3 также удовлетворяют (69). Причем нетрудно построить последовательность функций $f_\nu\in L_1^3$ со свойствами:

$$\|f_\nu-w_1\|\to 0,\quad f_\nu'(0)=w_1'(0),\quad \|f_\nu'''\|_L=\mathrm{V}w_1''.$$

Это будет означать, что (69) точное и на классе L_1^3.

Если мы установим, что функция w_1 единственная экстремальная в (69), то этим будет в частности доказано, что неравенство (70) строгое.

Пусть v — произвольная экстремальная функция неравенства (69). Выберем числа c, ν, μ так, чтобы функция $g(t) = cv(\nu t+\mu)$ удовлетворяла условиям

$$\mathrm{V}g''=1, \quad \|g\|_C=\frac{h^2}{8}, \quad g'(0)=\|g'\|_C.$$

Так как функция g экстремальная, то $g'(0)=\frac{h}{4}$. В силу (71), имеем

$$\frac{h}{4} = g'(0) \leqq S_h(0, g)+\frac{h}{8} \leqq h^{-1}\|g\|_C+\frac{h}{8} = \frac{h}{4}.$$

Следовательно

$$g'(0)-S_h(0, g) = \frac{h}{8}\mathrm{V}g'', \quad S_h(0, g) = \|S_h\|\,\|g\|_C.$$

Из приведенных оценок следует, что первое равенство имеет место лишь в том случае, если при $t\in(0, h)$

$$g''(t) = \frac{1}{2}\left(g''(0)-\overset{0}{\underset{\infty}{\mathrm{V}}}g''\right) = j_1 \leqq 0,$$

$$g''(-t) = \frac{1}{2}\left(g''(0)+\overset{\infty}{\underset{0}{\mathrm{V}}}g''\right) = j_2 \geqq 0,$$

и, кроме того, при $t\in(0, \infty)$ функции $g''(t)$, $-g''(-t)$ возрастают (до нуля). А поскольку $g'(\pm\infty) = 0$, то $g'\geqq 0$ и функция g возрастает.

Аналогично, условие $S_h(0, g)=\|S_h\|\,\|g\|_C$ можно записать в виде равенств $g(h) = -g(-h) = \|g\|_C$. Следовательно $g(t) = -g(-t) = g(h)$ для $t\geqq h$.

Так как $g\in C$ и $Vg''=1$, то $j_2 = -j_1 = \frac{1}{4}$. Таким образом $g(t) = \frac{h^2}{16}w_1(th^{-1})$.

Из неравенства (71) следует, что

$$E_\infty(h^{-1}) \leqq \varrho(S_h) \leqq \frac{h}{8},$$

а, в силу (8) и (70), $E_\infty(h^{-1}) \geqq \frac{h}{8}$, следовательно (68) имеет место.

Все утверждения теоремы для случая $I = (-\infty, \infty)$ доказаны.

Если $I=[0, \infty)$, то для $f\in L_V^2$ (или, тем более $f\in L_1^3$) имеем

$$f'(x)-S_h^+(x,f) = -\frac{1}{h}\int_0^h (h-t)f''(x+t)\,dt \leqq \frac{h}{2}\overset{\infty}{\underset{0}{\mathrm{V}}}f''.$$

Остальные рассуждения проводятся так же как в случае $I = (-\infty, \infty)$.

Теорема 8 полностью доказана.

В случае $n=3, p=\infty$ задача (6) решена Стечкиным [10, 11]. Здесь экстремальные операторы — конечно разностные: для $k=1, 2$, соответственно,

$$T_1(x,f) = \frac{1}{2h}\{f(x+h)-f(x-h)\},$$

$$T_2(x,f) = \frac{1}{h^2}\{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)\}$$

при $I = (-\infty, \infty)$,

$$T_1(x,f) = \frac{1}{6h}\{-8f(x)+9f(x+h)-f(x+3h)\},$$

$$T_2(x,f) = \frac{1}{3h^2}\{2f(x)-3f(x+h)+f(x+3h)\}$$

при $I=[0, \infty)$.

Литература

[1] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Contribution to the arithmetic theory of series, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **11** (1912), 411—478.

[2] E. Landau, Einige Ungleichungen für zweimal differentiierbare Funktionen, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **13** (1913), 43—49.

[3] J. Hadamard, Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées, *Soc. math. France, Comptes rendus des Séances*, **41** (1914), 68—72.

[4] Г. Харди, Дж. Литтльвуди, Г. Полиа, *Неравенства* (Москва, 1948).

[5] Ю. Г. Боссэ (Г. Е. Шилов), О неравенствах между производными, *Моск. ун-т, Сб. работ научных студенческих кружков*, **1937**, 17—27.

[6] А. Н. Колмогоров, О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале, *Уч. зап. Моск. ун-та*, **30**, *Математика*, кн. 3 (1939), 3—16.

[7] B. Sz.-Nagy, Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung, *Acta Sci. Math.*, **10** (1941), 64—74.

[8] А. П. Маторин, О неравенствах между наибольшими значениями абсолютных величин функции и ее производных на полупрямой, *Укр. матем. ж.*, **7** (1955), 262—266.

[9] E. M. Stein, Functions of exponential type, *Ann. of Math.*, (2) **65** (1957), 582—592.

[10] С. Б. Стечкин, Неравенства между нормами производных произвольной функции, *Acta Sci. Math.*, **26** (1965), 225—230.

[11] С. Б. Стечкин, Наилучшее приближение линейных операторов, *Матем. заметки*, **1** (1967), 137—148.

[12] В. В. Арестов, О наилучшем приближении операторов дифференцирования, *Матем. заметки*, **1** (1967), 149—154.

[13] В. Н. Габушин, Неравенства для норм функции и ее производных в метриках L_p, *Матем. заметки*, **1** (1967), 291—298.

[14] Ю. Н. Субботин, Л. В. Тайков, Наилучшее приближение оператора дифференцирования в пространстве L_2, *Матем. заметки*, **3** (1968), 157—164.

[15] В. Н. Габушин, Точные константы в неравенствах между нормами производных функций, *Матем. заметки*, **4** (1968), 221—232.

[16] Л. В. Тайков, Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования, *Матем. заметки*, **4** (1968), 233—238.

[17] В. В. Арестов, О наилучшем равномерном приближении операторов дифференцирования, *Матем. заметки*, **5** (1969), 273—284.

[18] В. Н. Габушин, О наилучшем приближении операторов дифференцирования на полупрямой, *Матем. заметки*, **6** (1969), 573—582.

[19] В. И. Бердышев, О наилучшее приближение в $L(0, \infty)$ оператора дифференцирования, *Матем. заметки*, **9** (1971), 477—481.

(Поступило 15. III. 1971 г.)