Schwach distributive Verbände. I

Von A. P. HUHN in Szeged

1. Einführung

Mehrere Arbeiten in der Verbandstheorie zeigen, daß es zwischen den Theorien

a) der projektiven Geometrien,

b) der Untergruppenverbände der Gruppen,

c) der Kongruenzklassengeometrien, und

d) der primitiven Klassen (Varietäten) der Verbände

gewisse Verbindungen gibt. (Siehe z. B. die Arbeiten von BAKER [1], JÓNSSON [3], WILLE [7]). In der vorliegenden Arbeit wird ein solcher verbandstheoretische Begriff eingeführt und untersucht, der die erwähnten Gebiete mit der Theorie der distributiven Verbände verbindet und dadurch zwischen diesen Gebieten weitere Zusammenhänge aufdeckt.

1. 1. Definition. Ein Verband L wird *n-distributiv* genannt, wenn er modular ist und in ihm die Identität

$$D_n\colon x \cup \bigcap_{i=0}^{n} y_i = \bigcap_{j=0}^{n} \left[x \cup \bigcap_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} y_i \right]$$

für beliebige $x, y_0, \dots, y_n \in L$ gilt. Mit der dualen Identität D_n^* von D_n erhält man die Definition der *dualen n-Distributivität*. (Später wird man sehen, daß die primitive Klasse $\mathbf{D}_n$ der n-distributiven Verbände mit der primitiven Klasse $\mathbf{D}_n^*$ der dual n-distributiven Verbände identisch ist, ferner, daß $\mathbf{D}_n$ echter Teil von $\mathbf{D}_{n+1}$ ist.) Wegen dieser Relationen werden diejenigen Verbände, die für irgendein n n-distributiv sind, *schwach distributiv* genannt.

Als Beispiel für eine Anwendung der n-distributiven Verbände schicken wir einige grundlegende Ergebnisse aus den Gebieten a)—d) voraus.

ad a) Für einen beliebigen Schiefkörper D ist die $(n-1)$-dimensionale projektive Geometrie (d. h. der Unterraumverband des n-dimensionalen Vektorraumes) $PG_{n-1}(D)$ über D ein n-distributiver, aber nicht $(n-1)$-distributiver Verband.

ad b) Für eine Abelsche Gruppe G ist der Untergruppenverband von G dann und nur dann n-distributiv, wenn der endliche Rang von G kleiner oder gleich n

ist (d. h., wenn jede endlich erzeugte Untergruppe von G auch durch n (nicht unbedingt verschiedene) Elemente erzeugbar ist). Für $n=1$ siehe ORE [5].

ad c) Für Kongruenzklassengeometrien kann man das folgende Analogon des Satzes von HELLY[1]) beweisen: Ist der Kongruenzverband $\Theta(A)$ der universellen Algebra A normal und n-distributiv, so gilt die folgende Behauptung: Wenn $\mathfrak{R}=\langle Ki\rangle_{i=1}^{m}$ ein mindestens $(n+1)$-elementiges endliches System der Kongruenzklassen von A ist, so daß jedes $(n+1)$-elementige Teilsystem von $\mathfrak{R}$ ein gemeinsames Element enthält, dann gilt $\bigcap\mathfrak{R}\neq\emptyset$. Für $n=1$ siehe GRÄTZER [2].

ad d) Mit Hilfe der Ergebnisse über die n-Distributivität kann man solche primitive Klassen konstruieren, die durch ihre endlichen Elemente nicht erzeugt sind, ferner solche, die unendlich viele obere Nachbarn haben in dem Verband der primitiven Klassen der Verbände. Für die letzteren sind auch die primitiven Klassen $\mathbf{D}_n$ ($n\geqq 2$) Beispiele. (Die Frage der Existenz solcher primitiver Klassen war ein Problem von JÓNSSON [4]. Frühere Lösungen mit anderen Methoden kann man in den Arbeiten von BAKER [1], und WILLE [6] finden.)

Im Teil I der Arbeit werden die wichtigsten verbandtheoretischen Eigenschaften der n-distributiven Verbände angegeben, mit deren Hilfe wir die Zusammenhänge mit den Gebieten a)—d) im Teil II untersuchen werden.

2. Kriterien der n-Distributivität

In diesem Punkt wird die Verallgemeinerung des Distributivitätskriteriums von Birkhoff bewiesen, auf Grund dessen die weiteren Eigenschaften der n-distributiven Verbände leicht zu ermitteln sind.

2. 1. Satz. *Es sei L ein modularer Verband. Für eine beliebige natürliche Zahl n sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(A) *L ist nicht n-distributiv.*

(B) *L enthält eine $(n+1)$-dimensionale Boolesche Algebra B als Teilverband und ein Element w mit der Eigenschaft $K(B, w)$: w ist relatives Komplement aller Atome von B im Intervall* $[\inf B, \sup B]$.

(Ein Verband heißt eine $(n+1)$-dimensionale Boolesche Algebra, wenn er zum Verband $\mathbf{2}^{n+1}$ isomorph ist, wobei $\mathbf{2}$ die zwei-elementige Kette bedeutet.)

Bemerkung. Für $n=1$ gibt der Satz das Distributivitätskriterium von BIRKHOFF.

[1]) Der Satz von Helly: Ist $\mathfrak{R}$ ein mindestens $(n+1)$-elementiges endliches System von konvexen Mengen im n-dimensionalen euklidischen Raum, dessen jedes $(n+1)$-elementiges Teilsystem einen gemeinsamen Punkt enthält, so gilt $\cap\mathfrak{R}\neq\emptyset$.

Beweis. Zum Beweis der Behauptung (B)$\Rightarrow$(A) seien b_i $(i=0, 1, \dots, n)$ die Atome von B und es bezeichne b_i' ihre Komplemente in B. Gemäß der Eigenschaft $K(B, w)$ gilt

$$w \cup \bigcap_{i=0}^{n} b_i' = w \cup \inf B = w < \sup B = \bigcap_{j=0}^{n} (w \cup b_j) = \bigcap_{j=0}^{n} \left[w \cup \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} b_i' \right],$$

d.h. L ist nicht n-distributiv.

Umgekehrt, wenn D_n in L nicht erfüllt ist, existieren Elemente $x, y_0, \dots, y_n \in L$, für die $w_0 = x \cup \bigcap_{i=0}^{n} y_i \neq \bigcap_{j=0}^{n} \left[x \cup \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} y_i \right] = u_0$, d.h. $w_0 < u_0$ gilt. Offenbar gelten für die Elemente $a_j = \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} y_i$ die Relationen

$$\bigcap_{j=0}^{n} a_j = \bigcap_{i=0}^{n} y_i \quad \text{und} \quad w_0 \cup a_i = \left(x \cup \bigcap_{j=0}^{n} y_j \right) \cup a_i = \left(x \cup \left(\bigcap_{j=0}^{n} y_j \cup a_i \right) \right) = x \cup a_i.$$

Mit Berücksichtigung der vorigen Ungleichung erhält man:

$$\bigcap_{i=0}^{n} a_i \leqq w_0 < u_0 = \bigcap_{i=0}^{n} (w_0 \cup a_i). \tag{1}$$

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$v = \bigcup_{i=0}^{n} (w_0 \cap a_i), \quad b_i = (a_i \cup v) \cap u_0, \quad u = \bigcup_{i=0}^{n} b_i, \quad b_i' = \bigcup_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} b_j, \quad w = u \cap w_0.$$

Weil $v \leqq w_0$ gilt, gilt auch $v < u_0$; wegen der Modularität kann man also die Elemente b_i auch in die Form $(a_i \cap u_0) \cup v$ schreiben. So gilt: $v \leqq b_i \leqq u \leqq u_0$. Da $\bigcap_{i=0}^{n} a_i \leqq w_0$ gilt, folgen die Relationen

$$\bigcap_{i=0}^{n} a_i = \bigcap_{i=0}^{n} a_i \cap a_j \leqq w_0 \cap a_j, \quad \text{d. h.} \quad \bigcap_{i=0}^{n} a_i \leqq \bigcup_{j=0}^{n} (w_0 \cap a_j) = v.$$

Es folgt also

$$\bigcap_{i=0}^{n} a_i \leqq v. \tag{2}$$

Wir werden beweisen, daß der durch die Elemente b_i erzeugte Teilverband eine $(n+1)$-dimensionale Boolesche Algebra ist, ihre Atome die Elemente b_i sind und ihr kleinstes und größtes Element v bzw. u sind, ferner, daß w gemeinsames relatives Komplement der Elemente b_i im Intervall $[v, u]$ ist. Dazu werden wir folgendes zeigen:

1. Da $b_i \cup w_0 = [(a_i \cap u_0) \cup v] \cup w_0 = (a_i \cap u_0) \cup w_0 =$ (wegen der Modularität) $= (a_i \cup w_0) \cap u_0 = u_0$ gilt, erhält man, daß $b_i \cup w = b_i \cup (u \cap w_0) =$ (wegen der Modularität und der Relation $b_i \leqq u$) $= u \cap (b_i \cup w_0) = u \cap u_0 = u$ gilt.

2. $b_i \cap w = b_i \cap (u \cap w_0) = b_i \cap w_0 = [(a_i \cup v) \cap u_0] \cap w_0 =$

$$= (a_i \cup v) \cap u_0 \cap w_0 = (a_i \cup v) \cap w_0 = (a_i \cap w_0) \cup v = v.$$

3. $b_i \cap b_i' = b_i \cap \bigcup_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} b_j = [(a_i \cap u_0) \cup v] \cup \bigcup_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} [(a_j \cap u_0) \cup v] =$

$$= \left[(a_i \cap u_0) \cup \bigcup_{j=0}^{n} (w_0 \cap a_j)\right] \cap \left[\bigcup_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (a_j \cap u_0) \cup \bigcup_{j=0}^{n} (w_0 \cap a_j)\right] =$$

$$= \text{(mit der Anwendung der Ungleichung } w_0 \cap a_j \leqq u_0 \cap a_j) =$$

$$= \left[(a_i \cap u_0) \cup \bigcup_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (w_0 \cap a_j)\right] \cap \left[\bigcup_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (a_j \cap u_0) \cup (w_0 \cap a_i)\right].$$

Für den Ausdruck in der ersten eckigen Klammer gilt $(a_i \cap u_0) \cup \bigcup_{i\neq j=0}^{n} (w_0 \cap a_j) \geqq$ $\geqq a_i \cap u_0 \geqq a_i \cap w_0$. Durch Anwendung der Modularität erhalten wir:

$$b_i \cap b_i' = \left\{\left[(a_i \cap u_0) \cup \bigcup_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (w_0 \cap a_j)\right] \cap \bigcup_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (a_j \cap u_0)\right\} \cup (a_i \cap w_0).$$

Wendet man wieder die Modularität gemäß der Relation

$$\bigcup_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (w_0 \cap a_j) \leqq \bigcup_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (a_j \cap u_0)$$

an, so bekommt man:

$$b_i \cap b_i' = \left[(a_i \cap u_0) \cap \bigcup_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (a_j \cap u_0)\right] \cup \bigcup_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (w_0 \cap a_j) \cup (a_i \cap w_0) =$$

$$= \left[(a_i \cap u_0) \cap \bigcup_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (a_j \cap u_0)\right] \cup \bigcup_{j=0}^{n} (w_0 \cap a_j) = \left[(a_i \cap u_0) \cap \bigcup_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (a_j \cap u_0)\right] \cup v = v,$$

weil

$$(a_i \cap u_0) \cap \bigcup_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (a_j \cap u_0) \leqq a_i \cap \bigcup_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} a_j \leqq \bigcap_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} y_j \cap y_i = \bigcap_{i=0}^{n} a_i$$

gilt und gemäß (2)' dieser letzte Ausdruck kleiner oder gleich als v ist. Die Elemente $b_0, b_1, \ldots, b_n$ bilden also eine unabhängige Menge, und somit erzeugen sie eine Boolesche Algebra. Infolge der Relationen $b_i \cap b_i' = v$ und $\bigcup_{i=0}^{n} b_i = u$ ist v das kleinste, u das größte Element dieser Booleschen Algebra.

4. Es bleibt zu beweisen, daß die durch die Elemente b_i erzeugte Boolesche Algebra $(n+1)$-dimensional ist. Wäre $b_i \leqq b_j$, so würde wegen der Relation $b_i \cap b_i' \geqq \geqq b_i \cap b_j = v$ folgen: $b_i = v$, d. h. $b_i \cup w_0 = v \cup w_0 = w_0$, aber es war im Punkt 1 bewiesen, daß $b_i \cup w_0 = u_0$ gilt; also hätte die Annahme $u_0 = w_0$ zur Folge, und das widerspricht der Bedingung (1).

Diesen Satz kann man auch in der folgenden symmetrischen Form aussagen.

2. 2. Korollar. *Der modulare Verband L ist dann und nur dann n-distributiv, wenn er keine Teilmenge $\langle x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\rangle$ enthält, für die die folgende Eigenschaft gilt:*

$$(i)\begin{cases} x_{i_0} \cap x_{i_1} \cap \cdots \cap x_{i_n} = x_{j_0} \cap x_{j_1} \cap \cdots \cap x_{j_n}, \\ x_{i_0} \cup (x_{i_1} \cap \cdots \cap x_{i_n}) = x_{j_0} \cup (x_{j_1} \cap \cdots \cap x_{j_n}) \end{cases}$$

für jede Wahl von $i_0, \ldots, i_n; j_0, \ldots, j_n$, wobei $i_0, \ldots, i_n$ und ebenso $j_0, \ldots, j_n$ alle verschieden sind.

Beweis. Die Notwendigkeit ist offenbar. Zum Beweis der Hinlänglichkeit der Bedingung sei L nicht n-distributiv und seien (mit den früheren Bezeichnungen) $x_i = b_i'$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ und $x_{n+1} = w$. Auf Grund des Satzes 2. 1 erhält man, daß

$$\begin{aligned} b_{i_0}' \cup (b_{i_1}' \cap \cdots \cap b_{i_{n-1}}' \cap w) &= b_{i_0}' \cup (b_{i_1}' \cap \cdots \cap b_{i_{n-1}}' \cap w) \cup (b_{i_0}' \cap \cdots \cap b_{i_{n-1}}') = \\ &= b_{i_0}' \cup \{(b_{i_1}' \cap \cdots \cap b_{i_{n-1}}') \cap [w \cup (b_{i_0}' \cap \cdots \cap b_{i_{n-1}}')]\} = \\ &= b_{i_0}' \cup \{(b_{i_1}' \cap \cdots \cap b_{i_{n-1}}') \cap \sup B\} = \sup B \end{aligned}$$

gilt, wenn $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}$ alle verschieden sind. Die Kombination des Ergebnisses des Satzes 2. 1 mit dieser Relation gibt die Behauptung (i) auf der Menge $\langle x_0, \ldots, x_{n+1}\rangle$.

Der folgende Satz verallgemeinert den Begriff des Mediums.

2. 3. Korollar. *Ein modularer Verband L ist dann und nur dann n-distributiv, wenn für seine beliebigen Elemente die Identität gilt:*

$$\bigcap_{k=0}^{n+1} \bigcup_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n+1} \bigcap_{\substack{i=0 \\ i\neq j,k}}^{n+1} x_i = \bigcup_{i=0}^{n+1} \bigcap_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n+1} x_i.$$

Beweis. Es ist bekannt, daß für die Elemente eines modularen Verbands auch die Identität

$$(1) \qquad \bigcap_{i=1}^{r} p_i \cup \bigcup_{i=1}^{r} q_i = \bigcap_{i=1}^{r} (p_i \cup q_i) \qquad (\text{wenn } p_i \geqq q_j \text{ für } i \neq j \text{ besteht})$$

gültig ist. So erhält man, daß

$$\bigcup_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n+1} \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j,k}}^{n+1} x_i = \bigcap_{\substack{j=0\\ j\neq k,l}}^{n+1} \left[x_j \cup \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j,k}}^{n+1} x_i\right] \quad \text{(für alle } l\neq k\text{), d. h.}$$

$$\bigcup_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n+1} \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j,k}}^{n+1} x_i = \bigcap_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{n+1} \bigcap_{\substack{j=0\\ j\neq k,l}}^{n+1} \left[x_j \cup \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j,k}}^{n+1} x_i\right] = \bigcap_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n+1} \left[x_j \cup \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j,k}}^{n+1} x_i\right];$$

daher gilt

(2)
$$\bigcap_{k=0}^{n+1} \bigcup_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n+1} \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j,k}}^{n+1} x_i = \bigcap_{k=0}^{n+1} \bigcap_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n+1} \left[x_j \cup \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j,k}}^{n+1} x_i\right].$$

Wenn L n-distributiv ist, dann folgt aus (2), D_n und (1) die Relation

$$\bigcap_{k=0}^{n+1} \bigcup_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n+1} \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j,k}}^{n+1} x_i = \bigcap_{k=0}^{n+1} \bigcap_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n+1} \left[x_j \cup \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j,k}}^{n+1} x_i\right] = \bigcap_{j=0}^{n+1} \left[x_j \cup \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+1} x_i\right] =$$

$$= \bigcap_{j=0}^{n+1} x_j \cup \bigcup_{k=0}^{n+1} \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n+1} x_i = \bigcup_{k=0}^{n+1} \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n+1} x_i.$$

Umgekehrt, wenn L nicht n-distributiv ist, dann seien $x_0, \ldots, x_{n+1}$ so gewählt, wie in 2. 2. Mit den früheren Bezeichnungen erhält man dann auf Grund von (2) und 2. 2, daß

$$\bigcap_{k=0}^{n+1} \bigcup_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n+1} \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j,k}}^{n+1} x_i = \sup B > \inf B = \bigcup_{j=0}^{n+1} \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n+1} x_i$$

gilt, und damit ist auch das Hinreichen der Bedingung bewiesen.

3. Weitere Eigenschaften der n-distributiven Verbände

Nach diesen Sätzen kann man zeigen, daß für n-distributive Verbände Dualitätsprinzipien gelten.

3. 1. Satz. *Die Klasse* $\mathbf{D}_n$ *ist mit der Klasse* $\mathbf{D}_n^*$ *identisch.*

Beweis. Nach Satz 2. 1 und seinem Dualen genügt es die folgende Behauptung zu zeigen: *Enthält ein modularer Verband eine* $(n+1)$*-dimensionale Boolesche Algebra* B *und ein Element* w *mit der Eigenschaft* $K(B, w)$, *so enthält er auch ein Element* w^* *mit der dualen Eigenschaft* $K^*(B, w^*)$ *von* $K(B, w)$ (und umgekehrt, aber die umgekehrte Behauptung folgt aus dieser auf Grund des allgemeinen Dualitätsprinzips unmittelbar).

In der Tat, es seien B und w mit der obigen Eigenschaft gegeben, bezeichne v die Infima und u die Suprema, b_i $(i=0, 1, \dots, n)$ die Atome von B, ferner sei $b_{ij} = b_i \cup b_j$ und bezeichne b_i' und b_{ij}' die Komplemente von b_i und b_{ij} in B. Es sei endlich $w^* = \bigcap_{i=0}^{n-1} t_{in}$, wobei $t_{ij} = (w \cap b_{ij}) \cup b_{ij}'$ ist. Wir werden zeigen, daß w^* relatives Komplement aller dualen Atome b_i' von B im Intervall $[v, u]$ ist.

1. Wenn $i \neq j$ gilt, dann erhalten wir:

$$t_{ij} \cup b_j = [(w \cap b_{ij}) \cup b_{ij}'] \cup b_j = [(w \cap b_{ij}) \cup b_j] \cup b_{ij}' =$$

$$= \text{(wegen der Modularität und der Relation } b_j < b_{ij}) =$$

$$= [(w \cup b_j) \cap b_{ij}] \cup b_{ij}' = (u \cap b_{ij}) \cup b_{ij}' = b_{ij} \cup b_{ij}' = u,$$

$$t_{ij} \cap b_j' = [(w \cap b_{ij}) \cup b_{ij}'] \cap b_j' =$$

$$= \text{(wegen der Modularität und der Relation } b_{ij}' < b_j') =$$

$$= [(w \cap b_{ij}) \cap b_j'] \cup b_{ij}' = (w \cap b_i) \cup b_{ij}' = v \cup b_{ij}' = b_{ij}'.$$

Aus Symmetriegründen folgen:

(1) $\quad t_{ij} \cup b_i = t_{ij} \cup b_j = u \qquad (i \neq j;\ \ i, j = 0, 1, \dots, n).$

(2) $\quad t_{ij} \cap b_i' = t_{ij} \cap b_j' = b_{ij}' \qquad (i \neq j;\ \ i, j = 0, 1, \dots, n).$

2. Da $t_{in} = (w \cap b_{in}) \cup b_{in}' \geqq b_{in}' \geqq b_j$ (wenn $j \neq i, n$) gilt, erhält man mit Hilfe von 2. 3 (1) und (1) die Relation

$$w^* \cup b_n' = \bigcap_{i=0}^{n-1} t_{in} \cup \bigcup_{i=0}^{n-1} b_i = \bigcap_{i=0}^{n-1} (t_{in} \cup b_i) = \bigcap_{i=0}^{n-1} u = u.$$

Für $j \neq n$ gilt: $t_{jn} \geqq b_i$ (wenn $i \neq j, n$), d. h. $t_{jn} \geqq \bigcup_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-1} b_i$.

Wendet man gemäß dieser Relation die modulare Identität an, so erhält man:

$$w^* \cup b_j' = \bigcap_{i=0}^{n-1} t_{in} \cup \bigcup_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} b_i = \left[\bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-1} t_{in} \cap t_{jn}\right] \cup \bigcup_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-1} b_i \cup b_n =$$

$$= \left\{\left[\bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-1} t_{in} \cup \bigcup_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-1} b_i\right] \cap t_{jn}\right\} \cup b_n.$$

Mit der Anwendung von 2. 3 (1) bekommt man, daß der Ausdruck in der eckigen Klammer mit u gleich ist, woraus mit Hilfe von (1)

$$w^* \cup b_j' = (u \cap t_{jn}) \cup b_n = t_{jn} \cup b_n = u \qquad (j = 0, 1, \dots, n-1)$$

folgt.

3. Mit der Anwendung von (2) ergibt sich:

$$w^* \cap b_n' = \bigcap_{i=0}^{n-1} t_{in} \cap b_n' = \bigcap_{i=0}^{n-1} (t_{in} \cap b_n') = \bigcap_{i=0}^{n-1} b_{in}' = v.$$

Wenn $j \neq n$ gilt, so erhält man mit wiederholter Anwendung von (2):

$$w^* \cap b_j' = \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-1} t_{in} \cap t_{jn} \cap b_j' = \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-1} t_{in} \cap b_{jn}' = \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-1} t_{in} \cap b_n' \cap b_j' =$$

$$= \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-1} (t_{in} \cap b_n') \cap b_j' = \bigcap_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n-1} b_{in}' \cap b_j' = b_j \cap b_j' = v.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

3. 2. Satz. *Für eine beliebige natürliche Zahl $n(>1)$ ist die Klasse $\mathbf{D}_{n-1}$ echter Teil von $\mathbf{D}_n$.*

Beweis. Ist $L \notin \mathbf{D}_n$, so enthält er eine $(n+1)$-dimensionale Boolesche Algebra B und ein Element w mit der Eigenschaft $K(B, w)$. Es seien (mit der Bezeichnungen des Beweises des Satzes 3. 1) $B_* = B \cap b_0'$, $w_* = w \cap b_0'$. Dann ist B_* eine n-dimensionale Boolesche Algebra, deren Atome und Schrankenelemente $b_1, b_2, \ldots, b_n$ bzw. v und b_0 sind. Für $i=1, \ldots, n$ gilt ferner $w_* \cap b_i = w \cap b_0' \cap b_i = (w \cap b_i) \cap \cap b_0' = v$ und $w_* \cup b_i = (w \cap b_0') \cup b_i = (w \cup b_i) \cap b_0' = u \cap b_0' = b_0'$, d. h. Eigenschaft $K(B_*, w_*)$. Folglich ist $L \notin \mathbf{D}_{n-1}$. Also gilt: $\mathbf{D}_{n-1} \subseteqq \mathbf{D}_n$.

Den Beweis des Satzes kann man mit dem folgenden Beispiel beenden:

Beispiel. Jeder der Verbände $PG_{n-1}(D)$ ist n-distributiv, aber nicht $(n-1)$-distributiv.

Beweis. Es ist bekannt, daß die Länge von $PG_{n-1}(D)$ gleich n ist; da die Länge einer $(n+1)$-dimensionalen Booleschen Algebra $n+1$ ist, kann man sie in $PG_{n-1}(D)$ nicht einbetten, somit (gemäß 2. 1) ist $PG_{n-1}(D)$ n-distributiv. Um die andere Behauptung zu beweisen, betrachten wir $PG_{n-1}(D)$ als den Unterraumverband des n-dimensionalen Vektorraumes über D. Die Verbandsoperationen in diesem Verband sind

$A \cap B =$ der gemeinsame Teil von A und B, bzw.

$A \cup B = \{A, B\}$, wobei $\{H\}$ den durch H erzeugten Unterraum bezeichnet.

Mit den Bezeichnungen $e_i = (0, 0, \ldots, 0, \overset{i}{\breve{1}}, 0, \ldots, 0)$, $e = (1, 1, \ldots, 1)$ und $o = (0, 0, \ldots, 0)$ bzw. $E_i = \{e_i\}$, $E = \{e\}$, $O = \{o\}$,

$$E_i' = \{\langle e_j \rangle_{j=1,\ldots,n;\, j\neq i}\}, \quad I = \{\langle e_i \rangle_{i=1,\ldots,n}\}$$

ist offenbar

$$E \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i = E \cap I = E > O = \bigcup_{j=1}^{n} (E \cap E_j') = \bigcup_{j=1}^{n} \Bigg(E \cap \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} E_i \Bigg).$$

Den Herrn B. CSÁKÁNY und E. T. SCHMIDT möchte ich für ihre wertvollen Ratschläge bestens danken.

Literaturverzeichnis

[1] K. A. BAKER, Equational classes of modular lattices, *Pacific J. Math.*, **28** (1969), 9—15.
[2] G. GRÄTZER, *Universal algebra*, Van Nostrand (Princeton, N. J., 1968).
[3] B. JÓNSSON, Modular lattices and Desargues' theorem, *Math. Scand.*, **2** (1954), 295—314.
[4] B. JÓNSSON, Algebras whose congruence lattices are distributive, *Math. Scand.*, **21** (1967), 110—121.
[5] O. ORE, Structures and group theory. II, *Duke Math. J.*, **4** (1938), 247—269.
[6] R. WILLE, Primitive Länge und primitive Weite bei modularen Verbänden, *Math. Z.*, **108** (1969), 129—136.
[7] R. WILLE, *Kongruenzklassengeometrien*, Springer Lecture Notes, **113** (1970).

(Eingegangen am 18. März 1971)