Echelles continues de sous-espaces invariants. II

Par BÉLA SZ.-NAGY à Szeged et CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

On dit que la famille $\{H(\lambda)\}$ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ de sous-espaces d'un espace H de Hilbert forme une *échelle continue* si elle vérifie les conditions suivantes:

$$H(0)=\{0\}, \quad H(\lambda) \subset H(\mu) \quad \text{pour} \quad 0 \leqq \lambda < \mu \leqq 1, \quad H(1)=H,$$

$$\bigvee_{\varkappa<\lambda} H(\varkappa)=H(\lambda) \quad \text{pour} \quad 0<\lambda \leqq 1, \quad \text{et} \quad \bigcap_{\mu>\lambda} H(\mu)=H(\lambda) \quad \text{pour} \quad 0 \leqq \lambda < 1.$$

En désignant par $E(\lambda)$ la projection orthogonale de H dans $H(\lambda)$, ces conditions veulent dire que $\{E(\lambda)\}$ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ est une famille spectrale continue.

Dans la Note précédente [3] on a démontré un théorème dont il s'ensuit immédiatement que tout opérateur (linéaire borné) T dans un espace de Hilbert H de dimension infinie peut être prolongé à un opérateur S dans un espace de Hilbert $K(\supset H)$ tel que S admette dans K une échelle continue $\{K(\lambda)\}$ de sous-espaces invariants (c'est-à-dire $SK(\lambda) \subset K(\lambda)$); de plus on peut supposer que $K = H \oplus H'$ et $S = T \oplus T'$ où H' est un espace de même dimension que H, T' est un opérateur normal dans H', et $\|T'\| \leqq \|T\|$.

Dans la présente Note nous démontrons le suivant:

Théorème. *Tout opérateur T dans un espace H de dimension infinie est la limite forte d'une suite d'opérateurs S_n de H $(n=1, 2, \ldots)$ telle que chaque S_n admet une échelle continue de sous-espaces invariants et que de plus $\|S_n\| \leqq \|T\|$.*

Dans la démonstration nous utiliserons une méthode analogue à celle qui a été employée dans [2] pour démontrer, entre autres, la proposition suivante: Toute contraction T dans un espace de Hilbert H de dimension infinie est la limite faible d'une suite d'opérateurs unitaires dans le même espace. (D'ailleurs la méthode de [2] est voisine de celle de [1] où au lieu de limites faibles de suites il s'agit de points d'accumulation au sens de la topologie faible des opérateurs.)

Démonstration. Puisque la dimension de H est un nombre cardinal d infini, il existe dans H une suite de sous-espaces orthogonaux L_k $(k=1, 2, \ldots)$ tels que

$$\dim L_k = d \quad (k=1, 2, \ldots) \quad \text{et} \quad \bigoplus_{1}^{\infty} L_k = H.$$

En posant, pour $n=1, 2, \dots,$

$$H_n = \bigoplus_1^n L_k \quad \text{et} \quad H'_n = \bigoplus_{n+1}^{\infty} L_k$$

on aura

$$\dim H_n = \dim H'_n = d \quad \text{et} \quad H = H_n \oplus H'_n.$$

Soit P_n la projection orthogonale de H à H_n, et posons $T_n = P_n T | H_n$: T_n est un opérateur dans H_n. D'après le résultat cité de [3] il existe un opérateur (normal) T'_n dans H'_n tel que $\|T'_n\| \leqq \|T_n\|$ et que l'opérateur $S_n = T_n \oplus T'_n$ ait une échelle continue de sous-espaces invariants. Comme de plus $\|S_n\| = \|T_n\| \leqq \|T\|$ pour tout n, il ne nous reste qu'à montrer que S_n tend fortement vers T lorsque $n \to \infty$.

Soit $h \in H_m$. On a pour $n \geqq m$:

$$S_n h = T_n P_n h + T'_n (I - P_n) h = T_n h$$

parce que $h \in H_m \subset H_n$ donc $P_n h = h$. Par suite,

$$\|Th - S_n h\| = \|Th - T_n h\| = \|(I - P_n) Th\| \to 0 \quad \text{pour} \quad m \leqq n \to \infty.$$

Ainsi la convergence forte $S_n h \to Th$ est vérifiée par tous les vecteurs h dans $\bigcup_1^\infty H_m$, ce qui est une variété linéaire dense dans H. Vu que les S_n sont uniformément bornés, cela entraîne la convergence forte $S_n h \to Th$ pour tout $h \in H$. QED.

Ouvrages cités

[1] P. R. HALMOS, Normal dilations and extensions of operators, *Summa Brasil. Math.*, **2** (1950), 125—134.

[2] B. SZ.-NAGY, Suites faiblement convergentes de transformations normales de l'espace Hilbertien, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), 295—301.

[3] B. SZ.-NAGY et C. FOIAŞ, Echelles continues de sous-espaces invariants, *Acta Sci. Math.*, **28** (1967), 213—220.

(*Reçu le 10 septembre 1972*)