Eine neue Charakterisierung der halbeinfachen Ringe

Von A. KERTÉSZ in Debrecen

Herrn Prof. B. Sz.-Nagy anläßlich seines 60. Geburtstages in Verehrung und Zuneigung gewidmet

Ein (assoziativer) Ring R heißt *halbeinfach*, falls er (rechts-)artinsch und (im Sinne von Jacobson) radikalfrei ist. Die Klasse der halbeinfachen Ringe ist in der Literatur — wegen ihrer großen Bedeutung für die Ringtheorie — sehr oft und intensiv behandelt worden. Das Ziel dieser kleinen Note ist, eine neue Charakterisierung der halbeinfachen Ringe anzugeben.

Nach der Terminologie von [4] nennen wir ein Rechtsideal A des Ringes R *quasimodular*, wenn es für jedes $x \notin A$ $(x \in R)$ ein $y (\in R)$ gibt, so daß $yx \notin A$ gilt. Ein Rechstsideal B von R heißt *modular*, wenn R ein Linkseinselement e mod B besitzt, d.h., wenn für jedes $r (\in R)$

$$r - er \in B$$

gilt. Offensichtlich ist jedes modulare Rechtsideal in R auch quasimodular. Es gibt dagegen Ringe, die gewisse quasimodulare Rechtsideale besitzen, welche aber nicht modular sind (vgl. [3]).

Es gilt der folgende

Satz. *Ein Ring R ist genau dann halbeinfach, falls es in ihm endlich viele quasimodulare maximale Rechtsideale gibt, deren Durchschnitt das Nullideal ist.*[1])

Beweis. Es sei zunächst R halbeinfach. Dann besitzt R nach der wohlbekannten Noetherschen Charakterisierung der halbeinfachen Ringe ein Linkseinselement und ist eine (modultheoretische) direkte Summe von endlich vielen minimalen Rechtsidealen:

$R = A_1 + \cdots + A_n$ (A_i minimales Rechtsideal in R; $i = 1, \ldots, n$) (diesbezüglich vgl. etwa Satz 8. 9, S. 189 in [2]). Die Rechtsideale

$$A^{(i)} = A_1 + \cdots + A_{i-1} + A_{i+1} + \cdots + A_n \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

[1]) Dieser Satz ist eine Verschärfung der Behauptung der Äquivalenz der Aussagen (V) und (X) in Satz 8.9 des Buches [2] (S. 189).

sind offensichtlich quasimodulare maximale Rechtsideale in R und es gilt

$$A^{(i)} \cap \cdots \cap A^{(n)} = (0).$$

Umgekehrt sei (0) der Durchschnitt von endlich vielen quasimodularen maximalen Rechtsidealen. Dann ist R gemäß Satz 5. 24 in [2] (S. 132) radikalfrei. Ferner ist R nach Lemma von [1] eine (modultheoretische) direkte Summe von endlich vielen seiner minimalen Rechtsideale und erst recht artinsch. Folglich ist R ein halbeinfacher Ring.

Damit ist der Beweis des Satzes erbracht.

Literatur

[1] A. Kertész, Modules and semi-simple rings. II, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1955—56), 229—236.

[2] A. Kertész, *Vorlesungen über artinsche Ringe* (Budapest—Leipzig, 1968).

[3] F. Szász, Lösung eines Problems bezüglich einer Charakterisierung des Jacobsonschen Radikals, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **18** (1967), 261—272.

[4] F. Szász, Eine Charakterisierung des Jacobsonschen Radikals eines Ringes, *Bull. Acad. Polon. Ser. math. astr. phys.*, **15** (1967), 53—56.

(Eingegangen am 28. August 1972)