О некоторых обобщениях теории сильно демпфированных пучков на случай пучков произвольного порядка

А. С. МАРКУС, В. И. МАЦАЕВ и Г. И. РУССУ (Кишинев и Москва, СССР)

Посвящается академику Б. С.-Надь к его шестидесятилетию

Введение

Решение методом Фурье различных задач математической физики естественно приводит к изучению разложений по собственным векторам, отвечающим части спектра самосопряженного операторного пучка, т. е. полинома

$$L(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k A_k \qquad (A_k^* = A_k).$$

Общей спектральной теории такого рода пока не существует.

Необходимо отметить, что спектральная теория одного важного класса несамосопряженных пучков успешно развивается уже на протяжении более 20 лет, начиная с основополагающей работы М. В. Келдыша [1]. В то же время, построение общей теории самосопряженных пучков началось, по существу, только в 1964 году, когда появилась фундаментальная работа М. Г. Крейна и Г. Лангера [2], посвященная систематическому изучению самосопряженных квадратичных пучков. Одна из основных идей этой работы заключается в сопоставлении пучку $\lambda^2 I+\lambda B+C$ операторного квадратного уравнения Z^2+BZ+ $+C=0$ и в отыскании корня этого уравнения, спектр которого совпадает с некоторой частью спектра пучка.

Результаты работы [2] по спектральной теории самосопряженных квадратичных пучков получили дальнейшее развитие в работах Г. Лангера [3, 4]. В недавней работе Г. Лангера [5]*) были получены некоторые общие результаты по спектральной теории самосопряженных пучков произвольного порядка. Постановка задач в [5] близка к нашей.

---

*) Авторы благодарны Г. Лангеру за предоставленную им возможность ознакомиться с рукописью этой работы. Это позволило упростить некоторые доказательства в нашей статье.

Настоящая статья посвящена, в основном, обобщениям на пучки n-го порядка теории одного из классов квадратичных пучков, изученных в [2, 3], — сильно демпфированных пучков*). В отличие от работ [2—5], основной подход статьи заключается не в изучении корней операторного уравнения n-го порядка, а в факторизации пучка, т. е. представлении его в виде $L(\lambda) = L_+(\lambda)(Z-\lambda I)$, где спектр оператора Z совпадает с некоторой частью σ спектра $L(\lambda)$, а $L_+(\lambda)$ — пучок $n-1$-го порядка, обратимый на σ. Эти два подхода тесно связаны между собой (см. ниже замечание 1).

В работах [2—5] систематически используются методы и результаты теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой, в особенности теоремы о существовании специальных инвариантных подпространств. В нашей статье используются не геометрические, а аналитические методы. Основным инструментом являются недавние результаты И. Ц. Гохберга и Ю. Лайтерера о факторизации оператор-функций.

Объект исследования этой статьи — *гиперболический пучок*. Так мы называем самосопряженный пучок $L(\lambda)$, квадратичная форма которого имеет при любом $f\neq 0$ простые вещественные корни, а старший коэффициент A_n — равномерно положительный оператор.

Оказывается, что, как и в случае $n=2$, корни квадратичной формы $(L(\lambda)f, f)$ образуют неперекрывающиеся промежутки — спектральные зоны. Установлению этого факта и некоторых других утверждений о спектральных зонах посвящен первый параграф.

Основным результатом статьи является доказанная в § 2 теорема 4, в которой утверждается, что всякой спектральной зоне гиперболического пучка, замыкание которой не пересекается с замыканиями других зон, отвечает факторизация пучка $L(\lambda)$, причем соответствующий оператор Z подобен самосопряженному. Отметим, что при $n=2$ эта теорема вытекает из теоремы Г. Лангера [3].

В этом же параграфе строится пример, показывающий существенность условий теоремы 4 для подобия Z самосопряженному оператору. Здесь же рассматриваются обобщения теоремы 4 на случай, когда A_n не является дефинитным.

В последнем параграфе указываются некоторые ограничения на коэффициенты пучка, обеспечивающие выполнение условий теорем § 2. В заключение рассматривается один класс пучков, не являющихся гиперболическими, а именно, самосопряженные пучки, полученные малым возмущением линейного пучка $A-\lambda I$.

Авторы выражают благодарность И. Ц. Гохбергу и М. Г. Крейну за ценные обсуждения.

*) В матричном случае теория сильно демпфированных пучков была построена Даффином [6].

§ 1. Свойства спектральных зон

1. Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, $\mathfrak{R}$ — множество всех линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{H}$, и $\mathfrak{S}_\infty$ — множество всех вполне непрерывных операторов из $\mathfrak{R}$. Если $A \in \mathfrak{R}$, то через $\operatorname{im} A$ обозначается множество значений оператора A, а через $\ker A$ — его ядро. Как обычно, $\sigma(A)$ обозначает спектр оператора A, а $W(A)$ — его числовой образ, т. е. $W(A) = \{(Af, f): \|f\| = 1\}$. Неравенство $A \gg 0$ будет обозначать, что оператор A равномерно положителен, т. е. существует число $\delta > 0$ такое, что $(Af, f) \geqq \delta(f, f) \, (f \in \mathfrak{H})$.

Полиномиальным операторным пучком называют операторный полином

$$L(\lambda) = \lambda^n A_n + \lambda^{n-1} A_{n-1} + \cdots + \lambda A_1 + A_0 \tag{1.1}$$

с коэффициентами из $\mathfrak{R}$. Если $A_k^* = A_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, то пучок $L(\lambda)$ называется *самосопряженным.*

Через $\sigma(L)$ обозначим *спектр пучка* $L(\lambda)$, т. е. множество всех комплексных чисел λ, для которых оператор $L(\lambda)$ не обратим. Если уравнение $L(\lambda_0)\varphi = 0$ имеет решение $\varphi_0 \neq 0$, то λ_0 будем называть *собственным числом* пучка $L(\lambda)$, а вектор φ_0 — соответствующим ему *собственным вектором*. Вектор φ_k называется *присоединенным вектором* пучка $L(\lambda)$, соответствующим собственному числу λ_0, если существуют векторы $\varphi_0(\neq 0)$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$ такие, что

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} L^{(j)}(\lambda_0) \varphi_{m-j} = 0 \qquad (m = 0, 1, \ldots, k).$$

2. Самосопряженный пучок (1. 1) будем называть *гиперболическим,* если $A_n \gg 0$ и при любом $f \neq 0$ все корни многочлена $(L(\lambda) f, f)$ вещественны и различны.

Корни многочлена $(L(\lambda) f, f)$, занумерованные в порядке убывания, обозначим $p_k(f)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Так как $p_k(\alpha f) = p_k(f)$ $(f \neq 0, \alpha \neq 0)$, то можно рассматривать функционалы $p_k(f)$ на единичной сфере S пространства $\mathfrak{H}$. Очевидно, $p_k(f)$ является ограниченным непрерывным функционалом на S, и поэтому множество его значений Δ_k является непустым связным ограниченным подмножеством вещественной прямой, т. е. некоторым промежутком (или точкой). Этот промежуток Δ_k назовем k-ой *спектральной зоной* пучка $L(\lambda)$.

Установим вначале некоторые простые свойства гиперболических пучков.

1°. *Спектр гиперболического пучка* $L(\lambda)$ *вещественный, причем* $\sigma(L) \subset \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\Delta}_j$.

В самом деле, при $\|f\|=1$

(1. 2)

$$\|L(\lambda)f\| \geqq |(L(\lambda)f, f)| = (A_n f, f) \prod_{j=1}^{n} |\lambda - p_j(f)| \geqq \|A_n^{-1}\|^{-1} \prod_{j=1}^{n} \varrho(\lambda, \Delta_j),$$

где $\varrho(\lambda, \Delta_j)$ — расстояние от λ до Δ_j.

Подставляя в неравенство (1. 2) $\bar\lambda$ вместо λ, получим

$$\|[L(\lambda)]^* f\| \geqq \|A_n^{-1}\|^{-1} \prod_{j=1}^{n} \varrho(\lambda, \Delta_j).$$

Отсюда и из (1. 2) непосредственно вытекает, что если $\lambda \notin \bigcup_{j=1}^{n} \bar\Delta_j$, то оператор $L(\lambda)$ обратим.

2°. *Если $L(\lambda)$ — гиперболический пучок, то у него нет присоединенных векторов.*

В самом деле, допустим что существуют число λ_0 (вещественное в силу 1°) и векторы $\varphi_0(\neq 0)$ и φ_1 такие, что

$$L(\lambda_0)\varphi_0 = 0, \quad L(\lambda_0)\varphi_1 = -L'(\lambda_0)\varphi_0.$$

Умножая последнее равенство скалярно на φ_0, получим

$$(L'(\lambda_0)\varphi_0, \varphi_0) = -(L(\lambda_0)\varphi_1, \varphi_0) = -(\varphi_1, L(\lambda_0)\varphi_0) = 0.$$

Так как $(L(\lambda_0)\varphi_0, \varphi_0) = 0$, то отсюда следует, что λ_0 является кратным корнем многочлена $(L(\lambda)\varphi_0, \varphi_0)$, а это противоречит условию гиперболичности.

3. Здесь мы установим основное свойство спектральных зон гиперболического пучка, состоящее в том, что они не перекрываются. Для квадратичного пучка это свойство было установлено в случае $\dim \mathfrak{H} < \infty$ Даффином [6] и в общем случае М. Г. Крейном и Г. Лангером [2] (см. также [4, 7]).

Нам понадобится следующее простое предложение ([7], лемма 1. 1).

Лемма 1. *Пусть A и B — ограниченные самосопряженные операторы. Если для некоторых векторов f_1 и f_2*

$$(Af_1, f_1) = (Af_2, f_2) = 0, \quad (Bf_1, f_1) > 0, \quad (Bf_2, f_2) < 0,$$

то найдется вектор $f \neq 0$ такой, что $(Af, f) = (Bf, f) = 0$).*

---

*) Как заметил Б. С. Митягин, эта лемма вытекает из теоремы Теплица—Хаусдорфа о выпуклости числового образа оператора. В самом деле, полагая $C = B + iA$ и $\tilde f_k = f_k/\|f_k\|$ $(k = 1, 2)$, получаем, что $(C\tilde f_1, \tilde f_1) > 0$, $(C\tilde f_2, \tilde f_2) < 0$, и поэтому существует вектор f $(\|f\| = 1)$, такой что $(Cf, f) = 0$. Обратно, из леммы 1 с помощью аффинного преобразования без труда выводится теорема Теплица—Хаусдорфа.

Теорема 1. *Если $L(\lambda)$ — гиперболический пучок, то его различные спектральные зоны не пересекаются.*

Доказательство. Так как все корни многочлена $(L(\lambda)f, f)$ $(f \neq 0)$ вещественны и различны, то его производная в соседних корнях имеет противоположные знаки, и, следовательно,

(1. 3) $$(-1)^{k-1}\big(L'(p_k(f))f, f\big) > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n; \quad f \neq 0).$$

Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда $\Delta_k \cap \Delta_{k+1}$ непусто для некоторого k, т. е. найдутся вещественное число α и ненулевые векторы φ, ψ такие, что

(1. 4) $$\big(L(\alpha)\varphi, \varphi\big) = \big(L(\alpha)\psi, \psi\big) = 0,$$

причем $\alpha = p_k(\varphi) = p_{k+1}(\psi)$. В силу (1. 3)

(1. 5) $$\big(L'(\alpha)\varphi, \varphi\big)\big(L'(\alpha)\psi, \psi\big) < 0.$$

Из (1. 4) и (1. 5) согласно лемме 1 вытекает, что $\big(L(\alpha)g, g\big) = \big(L'(\alpha)g, g\big) = 0$ для некоторого $g \neq 0$, что противоречит простоте корней многочлена $\big(L(\lambda)g, g\big)$. Теорема доказана*).

4. Для получения основных результатов этой статьи свойство неперекрываемости спектральных зон оказывается недостаточным.

Будем говорить, что две спектральные зоны *отделены*, если их замыкания не пересекаются.

Следующая теорема идейно близка к теореме 1. Она показывает, что из существования равномерного зазора между соседними корнями многочлена $\big(L(\lambda)f, f\big)$ вытекает, что соответствующие спектральные зоны отделены.

Теорема 2. *Пусть $L(\lambda)$ — гиперболический пучок. Если для некоторого k $(1 \leqq k \leqq n-1)$ найдется положительное число ϱ такое, что $p_k(f) - p_{k+1}(f) \geqq \varrho$ для любого вектора $f \neq 0$, то спектральные зоны Δ_k и Δ_{k+1} отделены.*

Доказательство. Допустим, что утверждение теоремы не имеет места, т. е. что $\sup \Delta_{k+1} = \inf \Delta_k$. Обозначим это число через γ и докажем вначале существование положительных чисел ε, δ и μ таких, что из соотношений

$$\big|\big(L(\lambda)f, f\big)\big| < \varepsilon, \quad \|f\| = 1, \quad |\lambda - \gamma| < \mu$$

вытекает $\big|\big(L'(\lambda)f, f\big)\big| > \delta$.

В самом деле, если это не так, то найдутся нормированная последовательность векторов $\{f_j\}_1^\infty$ и сходящаяся к γ последовательность вещественных чисел $\{\gamma_j\}_1^\infty$ такие, что

$$\lim_{j\to\infty}\big(L(\gamma_j)f_j, f_j\big) = \lim_{j\to\infty}\big(L'(\gamma_j)f_j, f_j\big) = 0.$$

*) Аналогичное рассуждение для квадратичного пучка проведено в [4] (лемма 2.4).

Тогда, очевидно,

$$\lim_{j\to\infty}\left(L(\gamma)f_j,f_j\right)=\lim_{j\to\infty}\left(L'(\gamma)f_j,f_j\right)=0. \tag{1.6}$$

Так как коэффициенты многочленов $Q_j(\lambda)=\left(L(\lambda)f_j,f_j\right)$ ограничены, то (выделяя подпоследовательность и не меняя обозначений) можно считать, что последовательность $Q_j(\lambda)$ сходится (равномерно на любом компакте) к некоторому многочлену $Q(\lambda)$. При этом $Q(\lambda)\not\equiv 0$, так как коэффициент при λ^n положителен.

Из (1. 6) следует, что $Q(\gamma)=Q'(\gamma)=0$, и по теореме Гурвица [8] в любой окрестности точки γ многочлен $Q_j(\lambda)$ при достаточно большом j имеет два корня, т. е.

$$\lim_{j\to\infty}\left[p_k(f_j)-p_{k+1}(f_j)\right]=0,$$

а это противоречит условию теоремы.

Так как по допущению $\gamma=\sup\Delta_{k+1}=\inf\Delta_k$, то существуют нормированные последовательности векторов $\{h_j\}_1^\infty$, $\{g_j\}_1^\infty$ и последовательности вещественных чисел $\{\alpha_j\}_1^\infty$, $\{\beta_j\}_1^\infty$ такие, что

$$\left(L(\alpha_j)h_j,h_j\right)=\left(L(\beta_j)g_j,g_j\right)=0,$$

$$\alpha_j=p_k(h_j),\ \beta_j=p_{k+1}(g_j)\ \ (j=1,2,\dots);\quad \lim\alpha_j=\lim\beta_j=\gamma. \tag{1.7}$$

Из (1. 7) и доказанного выше утверждения следует, что при $j\geqq j_0$

$$\left|\left(L'(\alpha_j)h_j,h_j\right)\right|>\delta,\quad \left|\left(L'(\beta_j)g_j,g_j\right)\right|>\delta.$$

Точнее говоря, так как $\alpha_j=p_k(h_j)$, $\beta_j=p_{k+1}(g_j)$, то в силу (1. 3)

$$(-1)^{k-1}\left(L'(\alpha_j)h_j,h_j\right)>\delta,\ (-1)^{k-1}\left(L'(\beta_j)g_j,g_j\right)<-\delta\qquad (j\geqq j_0). \tag{1.8}$$

Из соотношений (1. 7) и (1. 8) вытекает, что

$$\lim_{j\to\infty}\left(L(\gamma)h_j,h_j\right)=0,\quad (-1)^{k-1}\left(L'(\gamma)h_j,h_j\right)>\frac{\delta}{2}\qquad (j\geqq j_1), \tag{1.9}$$

$$\lim_{j\to\infty}\left(L(\gamma)g_j,g_j\right)=0,\quad (-1)^{k-1}\left(L'(\gamma)g_j,g_j\right)<-\frac{\delta}{2}\qquad (j\geqq j_1). \tag{1.10}$$

Выделяя из ограниченных последовательностей $\left(L'(\gamma)h_j,h_j\right)$ и $\left(L'(\gamma)g_j,g_j\right)$ сходящиеся подпоследовательности, получим

$$(-1)^{k-1}\lim_{m\to\infty}\left(L'(\gamma)h_{j_m},h_{j_m}\right)=t_1\left(\geqq\frac{\delta}{2}\right), \tag{1.11}$$

$$(-1)^{k-1}\lim_{m\to\infty}\left(L'(\gamma)g_{j_m},g_{j_m}\right)=t_2\left(\leqq-\frac{\delta}{2}\right). \tag{1.12}$$

Рассмотрим оператор

$$C = (-1)^{k-1}(L'(\gamma)+iL(\gamma)).$$

Пусть $\overline{W(C)}$ — замыкание числового образа оператора C. Из соотношений (1. 9) и (1. 11) следует, что $t_1 \in \overline{W(C)}$, а из соотношений (1. 10) и (1. 12) — что $t_2 \in \overline{W(C)}$. Так как $\overline{W(C)}$ — выпуклое множество, то $0 \in \overline{W(C)}$. Это означает, что найдется такая нормированная последовательнисть $\{\psi_j\}_1^\infty$, для которой $(C\psi_j, \psi_j) \to 0$, т. е. $(L(\gamma)\psi_j, \psi_j) \to 0$, $(L'(\gamma)\psi_j, \psi_j) \to 0$. Последние соотношения противоречат утверждению, установленному в начале доказательства теоремы. Теорема доказана.

§ 2. Факторизация гиперболического пучка

1. Ниже нам понадобится следующее предложение, вытекающее из результатов И. Ц. Гохберга и Ю. Лайтерера [9].

Теорема 3. *Пусть $A(\zeta)$ — голоморфная на окружности $|\zeta|=1$ оператор-функция со значениями в $\mathfrak{R}$. Если*

(2. 1) $$\operatorname{Re} A(\zeta) \gg 0 \qquad (|\zeta| = 1),$$

то $A(\zeta)$ допускает каноническую факторизацию

$$A(\zeta) = A_+(\zeta)A_-(\zeta),$$

где оператор-функция $A_+(\zeta)$ (соответственно $A_-(\zeta)$) голоморфна и обратима при $|\zeta| \leqq 1$ (соответственно $|\zeta| \geqq 1$), причем $A_-(\infty) = I$.

Следующие два вспомогательных предложения будут применяться для проверки выполнения условия (2. 1) в нашем случае.

Лемма 2. *Пусть заданы вещественные числа $\{c_j\}_1^n$, $\{p_j\}_1^n$ и положительное число r, причем*

$$c_n \leqq p_n \leqq \dots \leqq c_{k+1} \leqq p_{k+1} < c_k - r < p_k < c_k + r < p_{k-1} \leqq c_{k-1} \leqq \dots \leqq p_1 \leqq c_1 .$$

Положим

$$a(\lambda) = \frac{\prod_{j=1}^{n} (\lambda - p_j)}{\prod_{j=1}^{n} (\lambda - c_j)} .$$

Тогда для любого комплексного числа λ, лежащего на окружности $|\lambda - c_k| = r$, выполняется неравенство

(2. 2) $$\operatorname{Re} a(\lambda) > 0.$$

Доказательство. Достаточно установить, что *)

$$|\arg a(\lambda)| < \frac{\pi}{2}. \tag{2.3}$$

Положим

$$\theta_1(\lambda) = \sum_{j=k+1}^{n} [\arg(\lambda - p_j) - \arg(\lambda - c_j)], \quad \theta_2(\lambda) = \arg(\lambda - p_k) - \arg(\lambda - c_k),$$

$$\theta_3(\lambda) = \sum_{j=1}^{k-1} [\arg(\lambda - c_j) - \arg(\lambda - p_j)], \quad \theta(\lambda) = \theta_1(\lambda) + \theta_2(\lambda) - \theta_3(\lambda).$$

Очевидно, $\theta(\lambda) \equiv \arg a(\lambda) \pmod{2\pi}$.

Предположим вначале, что $\operatorname{Im} \lambda > 0$. Нетрудно заметить, что тогда

$$\arg(\lambda - p_{k+1}) \geqq \arg(\lambda - c_{k+1}) \geqq \cdots \geqq \arg(\lambda - p_n) \geqq \arg(\lambda - c_n),$$
$$\arg(\lambda - c_1) \geqq \arg(\lambda - p_1) \geqq \cdots \geqq \arg(\lambda - c_{k-1}) \geqq \arg(\lambda - p_{k-1}),$$

и поэтому

$$0 \leqq \theta_1(\lambda) \leqq \arg(\lambda - p_{k+1}), \quad 0 \leqq \theta_3(\lambda) \leqq \arg(\lambda - c_1) - \arg(\lambda - p_{k-1}).$$

Следовательно,

$$0 \leqq \theta_1(\lambda) < \arg(\lambda - c_k + r) < \frac{\pi}{2}, \tag{2.4}$$

$$0 \leqq \theta_3(\lambda) < \pi - \arg(\lambda - c_k - r) < \frac{\pi}{2}. \tag{2.5}$$

Рассмотрим случай, когда $p_k \geqq c_k$. В этом случае

$$0 \leqq \theta_2(\lambda) < \arg(\lambda - c_k - r) - \arg(\lambda - c_k). \tag{2.6}$$

Так как

$$\frac{(\lambda - c_k + r)(\lambda - c_k - r)}{\lambda - c_k} = \lambda - c_k - \frac{r^2}{\lambda - c_k} = \lambda - c_k - \overline{(\lambda - c_k)} = 2i \operatorname{Im} \lambda,$$

то

$$\arg \frac{(\lambda - c_k + r)(\lambda - c_k - r)}{\lambda - c_k} = \frac{\pi}{2},$$

и, следовательно,

$$\arg(\lambda - c_k + r) + \arg(\lambda - c_k - r) - \arg(\lambda - c_k) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Учитывая, что

$$0 < \arg(\lambda - c_k + r) < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \arg(\lambda - c_k - r) - \arg(\lambda - c_k) < \arg(\lambda - c_k - r) < \pi,$$

*) Мы выбираем в качестве области значений $\arg z$ промежуток $(-\pi, \pi]$.

получаем

$$\arg(\lambda-c_k+r)+\arg(\lambda-c_k-r)-\arg(\lambda-c_k)=\frac{\pi}{2}. \tag{2.7}$$

Поэтому из (2. 4) и (2. 6) вытекает, что

$$0 \leqq \theta_1(\lambda)+\theta_2(\lambda)<\frac{\pi}{2}. \tag{2.8}$$

Из (2. 5) и (2. 8) непосредственно следует, что $|\theta(\lambda)|<\frac{\pi}{2}$, но тогда $\arg a(\lambda)=\theta(\lambda)$, и мы получаем неравенство (2. 3).

Рассмотрим теперь случай, когда $p_k<c_k$. Тогда

$$0>\theta_2(\lambda)>\arg(\lambda-c_k+r)-\arg(\lambda-c_k), \tag{2.9}$$

и из соотношений (2. 5), (2. 7) и (2. 9) вытекает, что

(2. 10)

$$0>\theta_2(\lambda)-\theta_3(\lambda)>\arg(\lambda-c_k+r)+\arg(\lambda-c_k-r)-\arg(\lambda-c_k)-\pi=-\frac{\pi}{2}.$$

Из (2. 4) и (2. 10) следует, что и в этом случае $|\theta(\lambda)|<\frac{\pi}{2}$, откуда снова вытекает (2. 3).

Так как $\arg a(\bar\lambda)=\arg\overline{a(\lambda)}=-\arg a(\lambda)$, то неравенство (2. 3) справедливо и при $\operatorname{Im}\lambda<0$. При $\operatorname{Im}\lambda=0$ неравенство (2. 3) очевидно, так как тогда $(\lambda-p_j)(\lambda-c_j)^{-1}>0$ $(j=1, 2, \ldots, n)$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть заданы вещественные числа* $\{\alpha_j\}_1^n$, $\{\beta_j\}_1^n$, *c и положительное число r, причем*

$$\alpha_n \leqq \beta_n \leqq \cdots \leqq \alpha_{k+1} \leqq \beta_{k+1}<c-r<\alpha_k \leqq \beta_k<c+r<\alpha_{k-1} \leqq \beta_{k-1} \leqq \cdots \leqq \alpha_1 \leqq \beta_1.$$

Положим

$$a(\lambda, p)=\frac{(\lambda-p_1)(\lambda-p_2)\cdots(\lambda-p_n)}{(\lambda-\beta_1)\cdots(\lambda-\beta_{k-1})(\lambda-\alpha_{k+1})\cdots(\lambda-\alpha_n)} \tag{2.11}$$

и через Γ обозначим окружность $|\lambda-c|=r$. Тогда существует такое число $\delta>0$, что $\operatorname{Re} a(\lambda, p) \geqq \delta$ для любых $\lambda \in \Gamma$ и $p_k \in[\alpha_k, \beta_k]$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Доказательство. В силу леммы 2 $\operatorname{Re} a(\lambda, p)>0$, и остается заметить, что функция $\operatorname{Re} a(\lambda, p)$ непрерывна на $\Gamma\times[\alpha_1, \beta_1]\times\cdots\times[\alpha_n, \beta_n]$.

2. Будем говорить, что оператор $Z\,(\in\mathfrak{R})$ *симметризуется справа (слева)* самосопряженным оператором $S(\in\mathfrak{R})$, если оператор $ZS\,(SZ)$ самосопряженный. Если при этом $S\gg0$, то, очевидно, Z подобен самосопряженному оператору:

$$Z=S^{1/2}(S^{-1/2}ZSS^{-1/2})S^{-1/2} \qquad (Z=S^{-1/2}(S^{-1/2}SZS^{-1/2})S^{1/2}).$$

Основным результатом этой статьи является следующая

Теорема 4. *Пусть*

$$L(\lambda) = \lambda^n A_n + \lambda^{n-1} A_{n-1} + \dots + \lambda A_1 + A_0$$

—гиперболический пучок). Если при некотором* k $(1 \leqq k \leqq n)$ *спектральная зона* Δ_k *пучка* $L(\lambda)$ *отделена от соседних зон,* то $L(\lambda)$ *допускает следующую факторизацию*

$$L(\lambda) = L_+(\lambda)(Z - \lambda I), \tag{2.12}$$

где $L_+(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j B_j$ *обратим при всех* $\lambda \in \bar{\Delta}_k$, *спектр оператора* Z *содержится в* $\bar{\Delta}_k$ *и оператор* Z *подобен самосопряженному.*

Доказательство. Пусть $\alpha_j = \inf \Delta_j$, $\beta_j = \sup \Delta_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$. Так как по условию $\beta_{k+1} < \alpha_k$ и $\beta_k < \alpha_{k-1}$, то можно выбрать вещественное число c и положительное число r так, чтобы $\beta_{k+1} < c - r < \alpha_k$, $\beta_k < c + r < \alpha_{k-1}$. Положим $\Gamma = \{\lambda : |\lambda - c| = r\}$ и

$$A(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{(\lambda - \beta_1) \cdots (\lambda - \beta_{k-1})(\lambda - c)(\lambda - \alpha_{k+1}) \cdots (\lambda - \alpha_n)}.$$

Так как $(L(\lambda) f, f) = (A_n f, f) \prod_{j=1}^{n} (\lambda - p_j(f))$, то, обозначая $p_j(f)$ через p_j, получим, что

$$(A(\lambda) f, f) = (A_n f, f)\, a(\lambda, p),$$

где функция $a(\lambda, p)$ определена равенством (2. 11). Поэтому из леммы 3 вытекает, что

$$\operatorname{Re} A(\lambda) \geqq \delta_1 I \qquad (\lambda \in \Gamma), \tag{2.13}$$

где $\delta_1 = \delta \inf_{\|f\|=1} (A_n f, f)$.

Таким образом, для рациональной оператор-функции $A(\lambda)$ выполнены условия теоремы 3 (относительно окружности Γ), и поэтому

$$A(\lambda) = A_+(\lambda) A_-(\lambda), \tag{2.14}$$

где множители $A_\pm(\lambda)$ обладают свойствами, указанными в теореме 3. Перепишем равенство (2. 14) в виде

$$A_+^{-1}(\lambda) A(\lambda) = A_-(\lambda) \qquad (\lambda \in \Gamma) \tag{2.15}$$

*) Используя последние результаты Г. Лангера ([16], теорема 1), нетрудно убедиться, что теорема 4 (без изменений в доказательстве) сохраняет силу если из определения гиперболичности исключить требование простоты корней $(L(\lambda)f, f)$. Аналогичные замечания имеют место для нижеследующих теорем 5 и 6.

Правая часть этого равенства голоморфна при $|\lambda - c| \geqq r$, а левая часть голоморфна при $|\lambda - c| \leqq r$, за исключением точки c, где она имеет простой полюс. Поэтому обе части равенства (2. 15) представляют единую голоморфную оператор-функцию, единственной особенностью которой во всей расширенной плоскости является простой полюс в точке c. Так как $A_-(\infty) = I$, то отсюда следует, что

$$A_-(\lambda) = I + \frac{X}{\lambda - c} \qquad (X \in \mathfrak{R}). \tag{2.16}$$

Переписывая (2. 14) в виде

$$A(\lambda) A_-^{-1}(\lambda) = A_+(\lambda).$$

видим, что обе части последнего равенства определяют единую голоморфную оператор-функцию, имеющую в расширенной плоскости особенности лишь в точках $\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$, причем все эти точки являются простыми полюсами. Следовательно,

$$A_+(\lambda) = \Pi^{-1}(\lambda) \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j C_j, \tag{2.17}$$

где $\Pi(\lambda) = (\lambda - \beta_1) \cdots (\lambda - \beta_{k-1})(\lambda - \alpha_{k+1}) \cdots (\lambda - \alpha_n)$ и $C_j \in \mathfrak{R}$.

Из (2. 14), (2. 16) и (2. 17) вытекает, что

$$L(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j C_j (\lambda I - cI + X),$$

причем первый множитель обратим при $|\lambda - c| \leqq r$, а второй — при $|\lambda - c| \geqq r$. Полагая $B_j = -C_j$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$, $Z = cI - X$, получим равенство (2. 12)*)

Для окончания доказательства теоремы осталось установить, что оператор Z подобен самосопряженному. Положим

$$M(\lambda) = (\lambda - c) A(\lambda) = \Pi^{-1}(\lambda) L(\lambda)$$

и рассмотрим ограниченные (в силу предложения 1°) операторы

$$G = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma M^{-1}(\lambda)\, d\lambda, \quad H = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma A^{-1}(\lambda)\, d\lambda.$$

Очевидно,

$$G^* = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma [M^{-1}(\lambda)]^* \, d\bar{\lambda} = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma M^{-1}(\bar{\lambda})\, d\bar{\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma M^{-1}(\lambda)\, d\lambda = G.$$

*) Отметим, что факторизация (2.12) единственна. В самом деле, если $L_+(\lambda)(Z - \lambda I) = \tilde{L}_+(\lambda)(\tilde{Z} - \lambda I)$, то из равенства $\tilde{L}_+^{-1}(\lambda)\, L_+(\lambda) = (\tilde{Z} - \lambda I)(Z - \lambda I)^{-1}$ вытекает, что $(\tilde{Z} - \lambda I)(Z - \lambda I)^{-1}$ — голоморфная во всей расширенной плоскости оператор-функция. Следовательно, $(\tilde{Z} - \lambda I)(Z - \lambda I)^{-1} \equiv I$, т. е. $\tilde{Z} = Z$, а значит и $\tilde{L}_+(\lambda) = L_+(\lambda)$.

Точно так же доказывается, что $H^* = H$.

Покажем, что оператор Z симметризуется справа оператором G. В самом деле,

$$ZG = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (Z-\lambda I)\, M^{-1}(\lambda)\, d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda - c)\, M^{-1}(\lambda)\, d\lambda + cG =$$

$$= H + cG + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \Pi(\lambda)(Z-\lambda I)\, L^{-1}(\lambda)\, d\lambda.$$

В силу равенства (2. 12) подынтегральное выражение в последнем интеграле равно $\Pi(\lambda)L_+^{-1}(\lambda)$, и так как эта оператор-функция голоморфна внутри Γ, то интеграл равен нулю. Таким образом $ZG = H_1$ (где $H_1 = H + cG$), а это и означает, что оператор Z симметризуется справа оператором G. Для завершения доказательства осталось установить, что $G \gg 0$.

Рассмотрим квадратичную форму оператора G:

$$(Gf, f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(M^{-1}(\lambda) f, f\right) d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(A^{-1}(\lambda) f, f\right)(\lambda - c)^{-1}\, d\lambda.$$

Производя замену $\lambda = c + re^{i\theta}$ и учитывая, что $(Gf, f) = \mathrm{Re}\,(Gf, f)$, получим

$$(Gf, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(A^{-1}(c + re^{i\theta}) f, f\right) d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(A^{-1}(c + re^{i\theta}) f, f\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(f, A^{-1}(c + re^{i\theta}) f\right) d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(A(c + re^{i\theta})\, g(\theta), g(\theta)\right) d\theta,$$

где $g(\theta) = A^{-1}(c + re^{i\theta}) f$. Так как $\|g(\theta)\| \geqq \varrho \|f\|$, где

$$\varrho^{-1} = \max_{\lambda \in \Gamma} \|A(\lambda)\|,$$

то в силу неравенства (2. 13) получим

$$(Gf, f) \geqq \frac{\delta_1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|g(\theta)\|^2\, d\theta \geqq \delta_1 \varrho^2 \|f\|^2.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *В условиях теоремы 4* $\sigma(Z) = \sigma(L) \cap \bar{\Delta}_k$, *собственные числа* $L(\lambda)$ *на отрезке* $\bar{\Delta}_k$ *совпадают с собственными числами оператора* Z, *и этим числам отвечают одни и те же собственные векторы.*

Это утверждение непосредственно следует из равенства (2. 12) и обратимости оператора $L_+(\lambda)$ $(\lambda \in \bar{\Delta}_k)$.

Следствие 2. *Если выполнены условия теоремы 4 и при некотором $\gamma \in \bar{\Delta}_k$ оператор $L(\gamma) \in \mathfrak{S}_\infty$, то $\sigma(L) \cap \bar{\Delta}_k$ состоит из γ и последовательности собственных чисел конечной кратности, сходящейся к γ. Если, кроме того, $\mathfrak{H}$ сепарабельно, то последовательность соответствующих собственных векторов пучка $L(\lambda)$ образует безусловный базис пространства $\mathfrak{H}$.*

В самом деле, из равенства (2. 12) и обратимости оператора $L_+(\lambda)$ вытекает, что $Z-\gamma I \in \mathfrak{S}_\infty$, и поэтому первое утверждение вытекает из следствия 1. Так как оператор $Z-\gamma I$ подобен самосопряженному, то его собственные векторы образуют безусловный базис в $\mathfrak{H}$, а в силу следствия 1 эти собственные векторы совпадают с соответствующими собственными векторами пучка $L(\lambda)$.

Замечание 1. Из факторизационного равенства

$$L(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j B_j (Z-\lambda I).$$

следует, что

$$A_0 = B_0 Z, \quad A_j = B_j Z - B_{j-1} \quad (j=1,2,\dots,n-1), \quad A_n = -B_{n-1},$$

и поэтому

$$\sum_{j=0}^{n} A_j Z^j = B_0 Z + \sum_{j=1}^{n-1} (B_j Z - B_{j-1}) Z^j - B_{n-1} Z^n = 0.$$

Таким образом, оператор Z является корнем уравнения

$$A_n Z^n + A_{n-1} Z^{n-1} + \dots + A_1 Z + A_0 = 0. \tag{2.18}$$

Заметим, что и обратно, если Z — корень уравнения (2. 18), то

$$L(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} A_k (\lambda^k I - Z^k) = L_+(\lambda)(Z-\lambda I),$$

где

$$L_+(\lambda) = -\sum_{k=1}^{n} A_k \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j Z^{k-j-1}.$$

Однако из (2. 18) еще не следует обратимость $L_+(\lambda)$ при $\lambda \in \sigma(Z)$, и для установления этого требуется провести дополнительное исследование (см., например, [2]).

Замечание 2. Нетрудно убедиться, что если Z является корнем уравнения (2. 18), то он симметризуется слева самосопряженным оператором

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} (Z^*)^j A_{k+1} Z^{k-j}. \tag{2.19}$$

Поэтому другой путь установления подобия оператора Z самосопряженному в теореме 4 состоит в доказательстве равномерной дефинитности оператора S. Этот метод и использовался вначале авторами, однако его применение натолкнулось на технические трудности, которые удалось преодолеть лишь в предположении, что $L(\gamma)\in\mathfrak{S}_\infty$ и $(-1)^{k-1}L'(\gamma)\gg 0$ для некоторого $\alpha\in\bar{\Delta}_k$*). Приведем схему этого доказательства.

С помощью сдвига $\lambda\to\lambda+\gamma$ доказательство сводится к случаю, когда $A_0\in\mathfrak{S}_\infty$, $(-1)^{k-1}A_1\gg 0$ и $0\in\bar{\Delta}_k$. Из неравенства (1. 2) выводится без труда, что

$$\|L^{-1}(\lambda)\|\leqq\frac{C_1}{|\operatorname{Im}\lambda|}\qquad(|\lambda-c|\leqq r),$$

и поэтому из (2. 12) вытекает, что

$$\|(Z-\lambda I)^{-1}\|\leqq\frac{C_2}{|\operatorname{Im}\lambda|}.$$

Так как оператор $Z\left(=L_+^{-1}(0)A_0\right)$ вполне непрерывен, то отсюда следует, что система собственных векторов каждого из операторов Z и Z^* полна в $\mathfrak{H}$ (см., например, [10], предложение 4. 5°). Если $Z\varphi_j=\lambda_j\varphi_j$, то, как нетрудно проверить, $(S\varphi_j,\varphi_j)=(L'(\lambda_j)\varphi_j,\varphi_j)$ и $(S\varphi_j,\varphi_k)=0$ $(\lambda_j\neq\lambda_k)$, и поэтому

$$\left(S\left(\sum_{j=1}^m a_j\varphi_j\right),\ \sum_{j=1}^m a_j\varphi_j\right)=\sum_{j=1}^m|a_j|^2\left(L'(\lambda_j)\varphi_j,\varphi_j\right).$$

Так как $\lambda_j=p_k(\varphi_j)$, то согласно (1. 3)

$$(-1)^{k-1}(S\psi,\psi)>0\tag{2.20}$$

для любого ψ $(\neq 0)$, являющегося линейной комбинацией собственных векторов Z. В силу полноты этих векторов $(-1)^{k-1}S\geqq 0$.

Из равенства (2. 19) следует, что $S=A_1+T$, где $T\in\mathfrak{S}_\infty$, и поэтому $\operatorname{im}S$ замкнуто и $\dim\ker S=\dim\mathfrak{H}/\operatorname{im}S<\infty$. Следовательно, для доказательства соотношения $(-1)^{k-1}S\gg 0$ достаточно показать, что $\overline{\operatorname{im}S}=\mathfrak{H}$, а для этого (в силу полноты собственных векторов оператора Z^*) достаточно установить, что любое собственное подпространство $\mathfrak{L}_\lambda(Z^*)$ оператора Z^* входит в $\operatorname{im}S$. Для простоты будем далее предполагать, что $\lambda\neq 0$, т. е. что $\ker Z^*=\{0\}$. Общий случай сводится к этому, так как имеет место разложение пространства

$$\mathfrak{H}=\ker Z\dotplus\overline{\operatorname{im}Z}$$

(см. [11], стр. 637), а для оператора $\tilde{Z}=Z|\overline{\operatorname{im}Z}$ указанное предположение выполняется.

---

*) Отметим, что равномерная положительность S в условиях теоремы 4 (и более общих) была установлена В. И. Ломоносовым [15] еще до того, как авторами было получено приведенное выше доказательство равномерной положительности правого симметризатора G.

Так как $SZ=Z^*S$, то $S(\mathfrak{L}_\lambda(Z))\subset\mathfrak{L}_\lambda(Z^*)$. Поскольку $\dim\mathfrak{L}_\lambda(Z)=\dim\mathfrak{L}_\lambda(Z^*)<$ $<\infty$ и из равенства $S\varphi=0$ $(\varphi\in\mathfrak{L}_\lambda(Z))$ следует, что $\varphi=0$ (см. (2. 20)), то $S(\mathfrak{L}_\lambda(Z))=$ $=\mathfrak{L}_\lambda(Z^*)$, что и завершает доказательство.

3. Здесь мы приведем пример, показывающий что утверждение теоремы 4 перестает быть верным без условия отделенности спектральной зоны Δ_k. Точнее говоря, строится квадратичный гиперболический пучок $L(\lambda)$, для которого не существует факторизации (2. 12) с оператором Z, подобным самосопряженному.

Отметим, что в силу результата Г. Лангера [3] всякий квадратичный гиперболический пучок $L(\lambda)=\lambda^2I+\lambda B+C$ допускает факторизацию $L(\lambda)=$ $=(Z_2^*-\lambda I)(Z_1-\lambda I)$, где $\sigma(Z_j)\subset\bar{\Delta}_j$ $(j=1,2)$*). Естественно предположить, что этот результат допускает обобщение на случай $n>2$, т. е. что любой гиперболический пучок $L(\lambda)$ допускает факторизацию (2. 12), где $\sigma(Z)\subset\bar{\Delta}_k$ и $L_+(\lambda)$ обратим для внутренних точек λ зоны Δ_k.

Перейдем к построению указанного выше примера. Пусть $\mathfrak{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство. Представим $\mathfrak{H}$ в виде ортогональной суммы двумерных подпространств $\mathfrak{H}_j$ и рассмотрим операторы B_j и C_j, заданные в некотором ортонормированном базисе пространства $\mathfrak{H}_j$ матрицами

$$B_j=\begin{pmatrix} b_j' & b_j \\ b_j & b_j'' \end{pmatrix},\quad C_j=\begin{pmatrix} c_j' & 0 \\ 0 & c_j'' \end{pmatrix},$$

где числа b_j', b_j'' вещественны, а b_j, c_j', c_j'' — положительны.

Обозначим через B и C операторы, являющиеся ортогональными суммами операторов B_j и C_j соответственно, и положим $L(\lambda)=\lambda^2I+\lambda B-C$. При условии

$$\lim b_j=\lim b_j'=\lim b_j''=\lim c_j'=\lim c_j''=0, \tag{2.21}$$

B и C являются вполне непрерывными самосопряженными операторами, причем $C>0$. Из последнего неравенства вытекает, что квадратный трехчлен $(L(\lambda)f,f)$ имеет при любом $f\neq0$ различные вещественные корни

$$p_{1,2}(f)=\frac{-(Bf,f)\pm\sqrt{(Bf,f)^2+4(Cf,f)(f,f)}}{2}.$$

Очевидно, $p_2(f)<0<p_1(f)$, а так как $B, C\in\mathfrak{S}_\infty$, то

$$\sup p_2(f)=\inf p_1(f)=0,$$

т. е. 0 является общей точкой $\bar{\Delta}_1$ и $\bar{\Delta}_2$.

---

*) М. Г. Крейн и Г. Лангер [2] получили ранее этот результат при дополнительных условиях $C>0$ и $C\in\mathfrak{S}_\infty$, установив, кроме того, что в этом случае операторы Z_1 и Z_2 подобны самосопряженным. Приводимый пример показывает, что без дополнительных ограничений последнее утверждение не имеет места.

Пучок $L(\lambda)$ распадается в ортогональную сумму двумерных пучков $L_j(\lambda) = \lambda^2 I_j + \lambda B_j - C_j$. Каждый из этих пучков имеет два положительных собственных числа $\lambda_{j1}, \lambda_{j2}$ (а также два отрицательных собственных числа). Эти собственные числа являются корнями уравнения

$$(\det L_j(\lambda) =)(\lambda^2 + \lambda b'_j - c'_j)(\lambda^2 + \lambda b''_j - c''_j) - \lambda^2 b_j^2 = 0. \tag{2.22}$$

Будем предполагать, что

$$\lambda_{j1} \neq \lambda_{j2}. \tag{2.23}$$

Собственные векторы пучка $L_j(\lambda)$, отвечающие собственным числам λ_{j1} и λ_{j2}, обозначим φ_{j1} и φ_{j2}. Очевидно, можно положить

$$\varphi_{j1} = (\lambda_{j1} b_j, c'_j - \lambda_{j1} b'_j - \lambda_{j1}^2), \quad \varphi_{j2} = (\lambda_{j2} b_j, c'_j - \lambda_{j2} b'_j - \lambda_{j2}^2).$$

Если выполнены условия

$$\lim \frac{c'_j - \lambda_{j1} b'_j - \lambda_{j1}^2}{\lambda_{j1} b_j} = \lim \frac{c'_j - \lambda_{j2} b'_j - \lambda_{j2}^2}{\lambda_{j2} b_j} = 0, \tag{2.24}$$

то, как легко видеть, угол между векторами φ_{j1} и φ_{j2} стремится к нулю. Отсюда вытекает, что последовательность векторов, полученная объединением в каком-либо порядке последовательностей $\{\varphi_{j1}\}_1^\infty$ и $\{\varphi_{j2}\}_1^\infty$, не является базисом $\mathfrak{H}$. Но тогда для спектральной зоны Δ_1 пучка $L(\lambda)$ не имеет место утверждение теоремы 4, так как в противном случае в силу условия $L(0) = -C \in \mathfrak{S}_\infty$ собственные векторы пучка $L(\lambda)$, отвечающие его положительным собственным числам, образовывали бы безусловный базис $\mathfrak{H}$ (см. следствие 2). Таким образом, построение примера свелось к выбору последовательностей вещественных чисел b'_j, b''_j и положительных чисел b_j, c'_j, c''_j, λ_{j1}, λ_{j2} так, чтобы выполнялись условия (2. 21), (2. 23), (2. 24) и чтобы числа λ_{j1}, λ_{j2} были корнями уравнения (2. 22).

Потребуем, чтобы выполнялись равенства

$$\lambda_{j1}^2 + \lambda_{j1} b'_j - c'_j - j^{-1} \lambda_{j1} b_j = 0, \tag{2.25}$$

$$\lambda_{j2}^2 + \lambda_{j2} b'_j - c'_j + j^{-1} \lambda_{j2} b_j = 0, \tag{2.26}$$

что будет гарантировать справедливость соотношений (2. 24). Если, кроме того, будут выполняться равенства

$$\lambda_{j1}^2 + \lambda_{j1} + b''_j - c''_j \lambda_{j1} b_j = 0, \tag{2.27}$$

$$\lambda_{j2}^2 + \lambda_{j2} b''_j - c''_j + j \lambda_{j2} b_j = 0, \tag{2.28}$$

то из (2. 25) и (2. 27) будет следовать, что λ_{j1} является корнем уравнения (2. 22), а из (2. 26) и (2. 28) — что λ_{j2} является корнем этого уравнения.

Будем считать b_j, b'_j и c'_j заданными и выразим λ_{j1} из (2. 25), а λ_{j2} из (2. 26):

$$(2.29)\qquad \lambda_{j1} = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{(b'_j - j^{-1}b_j)^2 + 4c'_j} - b'_j + j^{-1}b_j\right),$$

$$(2.30)\qquad \lambda_{j2} = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{(b'_j + j^{-1}b_j)^2 + 4c'_j} - b'_j - j^{-1}b_j\right)$$

(очевидно, $\lambda_{j1} > 0$, $\lambda_{j2} > 0$). Далее, из (2. 27) и (2. 28) находим b''_j и c''_j:

$$(2.31)\qquad b''_j = -(\lambda_{j1} + \lambda_{j2}) + \frac{jb_j(\lambda_{j1} + \lambda_{j2})}{\lambda_{j1} - \lambda_{j2}},$$

$$(2.32)\qquad c''_j = \lambda_{j1}\lambda_{j2}\left(\frac{2jb_j}{\lambda_{j1} - \lambda_{j2}} - 1\right).$$

Положим

$$(2.33)\qquad b_j = j^{-2}, \quad b'_j = j^{-4}, \quad c'_j = j^{-7}.$$

Тогда из (2. 29), (2. 30) и (2. 33) вытекают равенства

$$(2.34)\qquad \lim j^3\lambda_{j1} = 1, \quad \lim j^4\lambda_{j2} = 1.$$

Из (2. 31), (2. 33) и (2. 34) следует, что $b''_j \to 0$. В силу (2. 33) и (2. 34)

$$(3.35)\qquad \lim \frac{2jb_j}{\lambda_{j1} - \lambda_{j2}} = +\infty.$$

Выберем j_0 настолько большим, чтобы при $j \geqq j_0$ выполнялись неравенства (2. 23) и неравен ство $c''_j > 0$, и будем далее в качестве основного пространства $\mathfrak{H}$ рассматривать ортогональную сумму подпространств $\mathfrak{H}_j$ при $j \geqq j_0$.

Так как

$$c''_j < \lambda_{j1}\lambda_{j2}\frac{2jb_j}{\lambda_{j1} - \lambda_{j2}},$$

то $\lim c''_j = 0$. Таким образом, все требуемые условия выполнены, что и завершает построение примера.

4. Здесь мы рассмотрим некоторые обобщения полученных выше результатов на случай, когда старший коэффициент пучка не является равномерно положительным.

Всюду в этом пункте предполагается, что рассматриваемый пучок

$$(2.36)\qquad L(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \lambda^j A_j \qquad (A_j^* = A_j \in \mathfrak{R},\ j = 0, 1, \ldots, n;\ A_n \neq 0)$$

удовлетворяет следующим условиям: 1) при $(A_n f, f) \neq 0$ многочлен $\big(L(\lambda)f, f\big)$ имеет n различных вещественных корней; 2) при $f \neq 0$ и $(A_n f, f) = 0$ выполняется неравенство $(A_{n-1}f, f) \neq 0$ и $\big(L(\lambda)f, f\big)$ имеет $n-1$ различных вещественных корней (в этом случае n-ый корень можно считать бесконечным); 3) из соотношений $\lim\limits_{j\to\infty} (A_k f_j, f_j) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ вытекает, что $\|f_j\| \to 0$.

Нетрудно убедиться, что условие 3) существенно. Если оно не выполнено, то спектр пучка $L(\lambda)$ может заполнить всю плоскость, как показывает следующий пример. Пусть a_0, a_1, a_2 — вещественные числа такие, что $a_1^2>4a_0a_2$; $T\in\mathfrak{S}_\infty$, $T>0$ и $L(\lambda)=(a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2)T$. Легко видеть, что $(L(\lambda)f,f)$ имеет при любом $f\neq 0$ различные вещественные корни (которые не зависят от f), и в то же время спектр $L(\lambda)$ есть вся плоскость.

Обозначим через $\Delta(L)$ множество вещественных чисел, состоящее из всех корней многочленов $(L(\lambda)f,f)$ при любых $f\neq 0$.

Лемма 4. *Если выполнены условия 1)—3), то $\sigma(L)\subset\overline{\Delta(L)}$. Если, кроме того, $\lambda_0\notin\overline{\Delta(L)}$ и вещественно, то оператор $L(\lambda_0)$ равномерно дефинитный.*

Доказательство. Так как $\sigma(A)\subset\overline{W(A)}$ для любого оператора A, то достаточно показать, что из условия $\lambda_0\notin\overline{\Delta(L)}$ вытекает: $0\notin\overline{W(L(\lambda_0))}$. Допустим, что это не так. Тогда найдется последовательность векторов $\{f_j\}_1^\infty$ такая, что $\|f_j\|=1$ и $\lim(L(\lambda_0)f_j,f_j)=0$. Последовательность многочленов $(L(\lambda)f_j,f_j)$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторому многочлену $P(\lambda)$. Очевидно, $P(\lambda_0)=0$ и $P(\lambda)\not\equiv 0$ (в силу условия 3)). По теореме Гурвица в любой окрестности точки λ_0 должен содержаться хотя бы один корень всякого многочлена с достаточно большим номером из указанной подпоследовательности, что противоречит условию $\lambda_0\notin\overline{\Delta(L)}$.

Если же $\bar\lambda_0=\lambda_0$, то $[L(\lambda_0)]^*=L(\lambda_0)$, и так как $0\notin\overline{W(L(\lambda_0))}$, то оператор $L(\lambda_0)$ является равномерно дефинитным. Лемма доказана.

Покажем теперь, как с помощью леммы 4 можно свести пучок (2. 36) к некоторому гиперболическому пучку. При этом мы будем предполагать, что существует хотя бы одно вещественное число $\lambda_0\notin\overline{\Delta(L)}$. Тогда в силу леммы 4 оператор $L(\lambda_0)$ является равномерно дефинитным. Полагая $\lambda=\lambda_0+\mu^{-1}$, получим

$$L(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\frac{L^{(k)}(\lambda_0)}{k!}\mu^{-k}=\frac{M(\mu)}{\mu^n}, \tag{2.37}$$

где

$$M(\mu)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}L^{(k)}(\lambda_0)\mu^{n-k}.$$

Очевидно, один из пучков $M(\mu)$ и $-M(\mu)$ является гиперболическим.

Если Δ_j' $(j=1, 2, \ldots, n)$ — спектральные зоны пучка $M(\mu)$, то спектральными зонами*) пучка $L(\lambda)$ назовем множества $\Delta_j=f(\Delta_j')$ $(j=1, 2, \ldots, n)$, где $f(\mu)=\lambda_0+\mu^{-1}$. Очевидно, $\bigcup_{j=1}^{n}\Delta_j=\Delta(L)$.

*) Можно было бы дать непосредственное определение спектральных зон для пучка (2.36), однако мы предпочитаем приведенное формальное определение, использующее редукцию к гиперболическому пучку.

Из приведенного определения следует, что у пучка (2. 36) могут быть одна или две неограниченные спектральные зоны.

Будем говорить, что две спектральные зоны пучка $L(\lambda)$ отделены, если отделены соответствующие спектральные зоны пучка $M(\mu)$.

Теорема 5. *Пусть $L(\lambda)$ удовлетворяет условиям 1)—3) и $\overline{\Delta(L)}$ не совпадает с вещественной осью. Если Δ — ограниченная (соответственно неограниченная) спектральная зона $L(\lambda)$, отделенная от других зон, то $L(\lambda)$ допускает факторизацию $L(\lambda) = L_+(\lambda)(Z-\lambda I)$ (соответственно $L(\lambda) = L_+(\lambda)(I-(\lambda-\lambda_0)Z))$,** где первый множитель обратим при всех $\lambda \in \bar{\Delta}$, а второй — при всех $\lambda \notin \bar{\Delta}$, причем Z подобен самосопряженному оператору.*

Эта теорема непосредственно выводится из теоремы 4 с помощью равенства (2. 37).

§ 3. Некоторые частные случаи

1. Здесь мы будем рассматривать гиперболический пучок (1. 1) с неотрицательными коэффициентами. Заметим, что с помощью сдвига $\lambda = \mu+a$ $(a>0)$ к такому виду можно свести любой гиперболический пучок. Начнем с алгебраической леммы, в доказательстве которой используются методы статьи [12].

Лемма 5. *Пусть многочлен*

$$l(\lambda) = a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_0 \qquad (a_n>0;\ a_j \geqq 0,\ j=0,1,\ldots,n-1;\ n\geqq 2)$$

имеет различные вещественные корни $\{p_j\}_1^n$ $(p_1>p_2>\cdots>p_n)$. Если при некотором k $(1\leqq k\leqq n-1)$

$$a_k^2 \geqq 4a_{k-1}a_{k+1}, \tag{3. 1}$$

то

$$p_k-p_{k+1} \geqq \frac{1}{2l'(|p_{k+1}|)}\left[\left(\frac{a_k}{2a_{k+1}}\right)^{k-2} a_{k-2}+\left(\frac{a_k}{2a_{k+1}}\right)^{k+2} a_{k+2}\right].^{*)} \tag{3. 2}$$

Доказательство. Так как $p_j<p_1\leqq 0$ $(j>1)$, то $a_j>0$ $(j>0)$. Из вещественности всех корней $l(\lambda)$ следуют неравенства (см., например, [13], стр. 22)

$$\frac{a_{j-1}}{a_j} \leqq \frac{j}{j+1}\,\frac{a_j}{a_{j+1}} \qquad (j=1,2,\ldots,n-1). \tag{3. 3}$$

---

*) Здесь λ_0 — какое-нибудь вещественное число, не принадлежащее $\overline{\Delta(L)}$.

**) Мы считаем $a_j=0$ при $j<0$ и $j>n$.

Положим $z_k = -a_k/2a_{k+1}$ и

$$l_1(\lambda) = \sum_{j=2}^{k} a_{k-j}\lambda^{k-j}, \quad l_2(\lambda) = a_{k-1}\lambda^{k-1} + a_k\lambda^k + a_{k+1}\lambda^{k+1}, \quad l_3(\lambda) = \sum_{j=2}^{n-k} a_{k+j}\lambda^{k+j}.$$

В силу неравенства (3. 1)

$$(3.4) \qquad (-1)^k l_2(z_k) = (-1)^{2k-1}\left(\frac{a_k}{2a_{k+1}}\right)^{k-1} \frac{4a_{k-1}a_{k+1} - a_k^2}{4a_{k+1}} \geqq 0.$$

Из неравенств (3. 1) и (3. 3) следует, что при $1 \leqq j \leqq k-2$

$$\frac{a_{j-1}|z_k|^{j-1}}{a_j|z_k|^j} = \frac{a_{j-1}}{a_j}\frac{2a_{k+1}}{a_k} \leqq \frac{1}{2}\frac{a_{j-1}a_k}{a_j a_{k-1}} < \frac{1}{2},$$

и поэтому $(-1)^k l_1(z_k)$ представляет собой сумму убывающих по абсолютной величине и знакочередующихся слагаемых. Следовательно,

$$(3.5) \qquad (-1)^k l_1(z_k) \geqq \tfrac{1}{2}(-1)^k a_{k-2} z_k^{k-2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{a_k}{2a_{k+1}}\right)^{k-2} a_{k-2}.$$

Из неравенств (3. 3) вытекает, что при $k+2 \leqq j < n$

$$\frac{a_{j+1}|z_k|^{j+1}}{a_j|z_k|^j} = \frac{a_{j+1}}{a_j}\frac{a_k}{2a_{k+1}} < \frac{1}{2},$$

и поэтому

$$(3.6) \qquad (-1)^k l_3(z_k) \geqq \tfrac{1}{2}(-1)^k a_{k+2} z_k^{k+2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{a_k}{2a_{k+1}}\right)^{k+2} a_{k+2}.$$

Из неравенств (3. 4)—(3. 6) получаем

$$(3.7) \qquad (-1)^k l(z_k) \geqq \tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{a_k}{2a_{k+1}}\right)^{k-2} a_{k-2} + \left(\frac{a_k}{2a_{k+1}}\right)^{k+2} a_{k+2}\right].$$

Если мы установим, что $p_{k+1} < z_k \leqq p_k$, то тогда $p_k - p_{k+1} \geqq z_k - p_{k+1}$. По теореме Лагранжа

$$z_k - p_{k+1} = \frac{l(z_k) - l(p_{k+1})}{l'(\xi)} = \frac{l(z_k)}{l'(\xi)} \qquad (p_{k+1} < \xi < z_k),$$

и поэтому

$$(3.8) \qquad p_k - p_{k+1} \geqq \left|\frac{l(z_k)}{l'(\xi)}\right| \geqq \frac{|l(z_k)|}{l'(|p_{k+1}|)}.$$

Неравенство (3. 2) вытекает тогда из (3. 7) и (3. 8). Таким образом, для доказательства леммы осталось установить, что всякий многочлен $l(\lambda)$, удовлетворяющий условиям леммы, имеет на отрезке $[z_k, 0]$ ровно k корней.

Докажем это утверждение индукцией по k. Пусть вначале $k=1$. Так как $l(0) \geqq 0$ и $l(z_1) \leqq 0$ (см. (3. 7)), то на отрезке $[z_1, 0]$ есть хоть один корень $l(\lambda)$.

С другой стороны, $l'(\lambda) \geqq 3a_3\lambda^2+\cdots+na_n\lambda^{n-1}$ при $z_1 \leqq \lambda \leqq 0$, и так как в силу (3. 3)

$$\frac{(j+1)a_{j+1}|\lambda|^j}{ja_j|\lambda|^{j-1}} \leqq \frac{(j+1)a_{j+1}}{ja_j}\frac{a_1}{2a_2} \leqq \frac{a_ja_1}{2a_{j-1}a_2} < \tfrac{1}{2} \qquad (|\lambda| \leqq |z_1|, \quad 3 \leqq j < n),$$

то $l'(\lambda) \geqq \frac{3}{2}a_3\lambda^2 \geqq 0$ $(z_1 \leqq \lambda \leqq 0)$. Поэтому $l(\lambda)$ имеет на отрезке $[z_1, 0]$ ровно один корень.

Предположим теперь, что утверждение верно для $k-1$ (и для многочленов любой степени $\geqq k$) и установим его справедливость для индекса k $(\geqq 2)$.

Рассмотрим $l'(\lambda) = a_1+2a_2\lambda+\cdots+na_n\lambda^{n-1}$. Из (3. 1) вытекает, что

$$(ka_k)^2 > 4(k-1)a_{k-1}(k+1)a_{k+1},$$

и в силу индуктивного предположения многочлен $l'(\lambda)$ имеет на отрезке $[z'_{k-1}, 0]$ (где $z'_{k-1} = -ka_k[2(k+1)a_{k+1}]^{-1}$) ровно $k-1$ корней. Очевидно, $z_k < z'_{k-1}$. Покажем, что $l'(\lambda) \neq 0$ на интервале (z_k, z'_{k-1}). Для этого представим $l'(\lambda)$ в виде $l'(\lambda) = l'_1(\lambda)+l'_2(\lambda)+l'_3(\lambda)$ и оценим каждое слагаемое.

Положим

$$r(\lambda) = (k-1)a_{k-1}+ka_k\lambda+(k+1)a_{k+1}\lambda^2.$$

Так как $r(z'_{k-1})<0$ и $r(z_k) \leqq 0$, то $r(\lambda)<0$ на интервале (z_k, z'_{k-1}) и, следовательно,

(3. 9) $$(-1)^{k-1}l'_2(\lambda) > 0 \qquad (z_k < \lambda < z'_{k-1}).$$

В силу (3. 1) и (3. 3) при $|\lambda| \geqq |z'_{k-1}|$ и $1 \leqq j \leqq k-3$ выполняются неравенства

$$\frac{ja_j|\lambda|^{j-1}}{(j+1)a_{j+1}|\lambda|^j} \leqq \frac{ja_j}{(j+1)a_{j+1}}\frac{2(k+1)a_{k+1}}{ka_k} < \frac{a_ja_k}{2a_{j+1}a_{k-1}} < \tfrac{1}{2},$$

и поэтому

(3. 10) $$(-1)^{k-1}l'_1(\lambda) \geqq \tfrac{1}{2}(k-2)a_{k-2}|\lambda|^{k-3} \qquad (\lambda \leqq z'_{k-1})$$

Наконец, из (3. 3) вытекает, что при $|\lambda| \leqq |z_k|$ и $k+2 \leqq j < n$

$$\frac{(j+1)a_{j+1}|\lambda|^j}{ja_j|\lambda|^{j-1}} \leqq \frac{(j+1)a_{j+1}}{ja_j}\frac{a_k}{2a_{k+1}} \leqq \frac{a_ja_k}{2a_{j-1}a_{k+1}} < \tfrac{1}{2}.$$

Следовательно,

(3. 11) $$(-1)^{k-1}l'_3(\lambda) \geqq \tfrac{1}{2}(k+2)a_{k+2}|\lambda|^{k+1} \qquad (0 \geqq \lambda \geqq z_k).$$

Из (3. 9)—(3. 11) получаем, что $(-1)^{k-1}l'(\lambda)>0$ $(z_k<\lambda<z'_{k-1})$. Таким образом, $l'(\lambda)$ имеет ровно $k-1$ корней в полуинтервале $(z_k, 0]$. Так как корни $l(\lambda)$ и $l'(\lambda)$ перемежаются, то $l(\lambda)$ имеет на отрезке $[z_k, 0]$ не более k и не менее $k-2$ корней. Однако, учитывая, что $l(0) \geqq 0$, $l'(0)>0$ и $(-1)^k l(z_k) \geqq 0$, заключаем, что $l(\lambda)$ имеет на отрезке, $[z_k, 0]$ ровно k корней.

Лемма доказана.

Нам понадобится следующая лемма, являющаяся следствием общего предложения Ю. Л. Шмульяна ([14], лемма 1. 1), которое относится к операторам в банаховом пространстве.

Лемма 6. *Пусть A, B, C — ограниченные неотрицательные операторы, $B \gg 0$ и $C \neq 0$. Если $(Af, f)^2 \geqq (Bf, f)(Cf, f)$ для любого $f \in \mathfrak{H}$, то $A \gg 0$.*

Отметим, что при условии $C > 0$ приведенный результат был установлен ранее М. Г. Крейном и Г. Лангером [2].

Теорема 6. *Пусть $L(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \lambda^j A_j$ $(n > 3)$ — гиперболический пучок, $A_j \geqq 0$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ и $A_0 \neq 0$. Если при некотором k $(1 \leqq k \leqq n)$ и при любом $f \in \mathfrak{H}$*

(3. 12) $(A_k f, f)^2 \geqq 4(A_{k-1} f, f)(A_{k+1} f, f)$, $\quad (A_{k-1} f, f)^2 \geqq 4(A_k f, f)(A_{k-2} f, f)$, *)

то спектральная зона Δ_k отделена от соседних зон.

Доказательство. Так как $L(\lambda)$ — гиперболический пучок, то имеют место неравенства (3. 3), т. е.

(3. 13) $$(A_j f, f)^2 \geqq \frac{j+1}{j} (A_{j-1} f, f)(A_{j+1} f, f) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1; \quad f \in \mathfrak{H}).$$

Отметим также, что $(A_j f, f) > 0$ $(j > 0, f \neq 0)$, ибо $p_j(f) < 0$ при $j > 1$. Поэтому применяя последовательно (начиная с $j = n-1$) лемму 6, получаем из (3. 13), что $A_j \gg 0$ $(j > 0)$.

Из леммы 5 вытекает, что

$$p_k(f) - p_{k+1}(f) \geqq \frac{1}{2 \sum_{j=1}^{n} j \|A_j\| |\alpha_{k+1}^{j-1}|} \left[\left(\frac{m_k}{2\|A_{k+1}\|} \right)^{k-2} m_{k-2} + \left(\frac{m_k}{2\|A_{k+1}\|} \right)^{k+2} m_{k+2} \right],$$

где $\alpha_{k+1} = \inf \Delta_{k+1}$, $m_j = \inf\limits_{\|f\|=1} (A_j f, f)$. В силу сказанного выше $m_k > 0$, и так как $n > 3$, то положительно также хоть одно из чисел m_{k-2}, m_{k+2}. Поэтому существует число $\delta_1 > 0$ такое, что при любом $f \neq 0$

$$p_k(f) - p_{k+1}(f) > \delta_1.$$

Аналогично устанавливается, что при некотором $\delta_2 > 0$ и любом $f \neq 0$

$$p_{k-1}(f) - p_k(f) > \delta_2.$$

*) Мы полагаем $A_{-1} = A_{n+1} = 0$, так что при $k = 1$ или $k = n$ остается одно из этих неравенств.

Теперь для окончания доказательства теоремы достаточно сослаться на теорему 2.

Замечание 3. Здесь мы обсудим случаи $n=2$, 3, которые не охватываются приведенной формулировкой теоремы 6. Отметим прежде всего, что в случае $n=3$ и $k=1$ теорема 6 сохраняет силу (без всяких изменений в доказательстве). Из доказательства теоремы 6 видно также, что она остается справедливой в случае $n=3$ и $k=2$ при дополнительном ограничении $A_0 \gg 0$. С другой стороны, просматривая доказательство леммы 5, нетрудно убедиться, что для справедливости утверждения теоремы 6 в случае $n=3$ и $k=2$ достаточно потребовать, чтобы при любом $f \in \mathfrak{H}$

$$(A_1 f,f)^2 \geqq 4(A_0 f,f)(A_2 f,f), \quad (A_2 f,f) \geqq (4+\varepsilon)(A_1 f,f)(A_3 f,f),$$

где ε — некоторое положительное число*).

Если же $n=2$, то зоны Δ_1 и Δ_2 отделены тогда и только тогда, когда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$(A_1 f,f)^2 \geqq (4+\varepsilon)(A_0 f,f)(A_2 f,f) \qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

Это утверждение непосредственно вытекает из равенства

$$p_1(f) - p_2(f) = \frac{\sqrt{(A_1 f,f)^2 - 4(A_0 f,f)(A_2 f,f)}}{(A_2 f,f)},$$

теоремы 2 и равномерной положительности A_1.

Замечание 4. Если $A_n \gg 0$, $A_j \geqq 0$ $(j=0, 1, \ldots, n-1)$ и $A_0 \neq 0$, то при $n>3$ из неравенств

$$(A_k f,f)^2 \geqq 4(A_{k-1} f,f)(A_{k+1} f,f) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1;\ f \in \mathfrak{H})$$

вытекает, что $L(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \lambda^j A_j$ — гиперболический пучок и что все его спектральные зоны отделены друг от друга.

Первое утверждение этого замечания выводится без труда из леммы 6 и теоремы А. Ю. Левина [12], а тогда второе утверждение непосредственно следует из теоремы 6.

2. Рассмотрим квадратичный пучок вида

$$L(\lambda) = A - \lambda I + \lambda^2 B,$$

*) Приведем пример, показывающий, что в указанном случае утверждение теоремы 6 без дополнительных ограничений уже не верно. Пусть $L(\lambda) = 8\lambda^3 I + 16\lambda^2 I + 8\lambda I + A_0$, где $A_0 > 0$, $A_0 \in \mathfrak{S}_\infty$ и $\|A_0\| \leqq 1$. При $k=2$ условия (3.12), очевидно, выполнены, однако, если $\|f_j\| = 1$ и $(A_0 f_j, f_j) \to 0$, то $p_2(f_j) - p_3(f_j) \to 0$, и, следовательно, $\bar{\Delta}_2 \cap \bar{\Delta}_3$ непусто.

где A и B — ограниченные самосопряженные операторы. Если выполнено условие

(3.14) $$(Af,f)(Bf,f) < \tfrac{1}{4}(f,f)^2 \qquad (f \neq 0),$$

то при $(Bf,f)\neq 0$ трехчлен $\big(L(\lambda)f,f\big)$ имеет два различных вещественных корня

(3.15) $$p_{1,2}(f) = \frac{(f,f) \pm \sqrt{(f,f)^2 - 4(Af,f)(Bf,f)}}{2(Bf,f)}.$$

и, как легко видеть, пучок $L(\lambda)$ удовлетворяет условиям 1)—3) п. 4 § 2.

Обозначим через Δ_1 (соответственно Δ_2) множество всех корней $p_1(f)$ (соответственно $p_2(f)$). Для применения теоремы 5 надо показать, что $\overline{\Delta(L)}$ не совпадает с вещественной осью. Покажем, что $\bar{\Delta}_1 \cap \bar{\Delta}_2 = \varnothing$. При этом потребуем, чтобы выполнялся следующий усиленный вариант неравенства (3. 14):

(3.16) $$(Af,f)(Bf,f) \leqq (\tfrac{1}{4} - \delta)(f,f)^2 \qquad (f \in \mathfrak{H})$$

при некотором $\delta > 0$.

Так как в силу (3. 15)

(3.17) $$|p_1(f) - p_2(f)| = \frac{\sqrt{(f,f)^2 - 4(Af,f)(Bf,f)}}{|(Bf,f)|},$$

то из (3. 16) вытекает, что

$$|p_1(f) - p_2(f)| \geqq \frac{2\sqrt{\delta}}{\|B\|}.$$

Если теперь допустить, что существует вещественное число $\gamma \in \bar{\Delta}_1 \cap \bar{\Delta}_2$, то, повторяя рассуждения из доказательства теоремы 2, придем к противоречию. При этом соотношение $Q(\lambda) \not\equiv 0$ гарантируется тем, что коэффициент при λ в пучке $L(\lambda)$ равен $-I$. Кроме того, надо воспользоваться следующими соотношениями, вытекающими из (3. 15):

$$\big(L'(p_1(f))f,f\big) > 0 \quad ((Bf,f) \neq 0), \ \big(L'(p_2(f))f,f\big) < 0 \qquad (f \neq 0).$$

Таким образом, при условии (3. 16) $\bar{\Delta}_1 \cap \bar{\Delta}_2 = \varnothing$. Теперь нетрудно убедиться, что Δ_1 и Δ_2 — спектральные зоны пучка $L(\lambda)$ в смысле определения п. 4 § 2. Легко видеть, что зона Δ_2 ограничена, а Δ_1 ограничена тогда и только тогда, когда оператор B равномерно дефинитен. Так как соотношение $\bar{\Delta}_1 \cap \bar{\Delta}_2 = \varnothing$ означает, что зоны Δ_1 и Δ_2 отделены, то, в силу теоремы 5, из приведенных рассуждений вытекает следующая

Теорема 7. *Если при некотором $\delta > 0$ выполнено неравенство* (3. 16), *то имеет место равенство*

$$A - \lambda I + \lambda^2 B = (I - BZ - \lambda B)(Z - \lambda I),$$

где линейный пучок $I - BZ - \lambda B$ обратим при всех $\lambda \in \bar{\Delta}_2$, спектр оператора Z содержится в $\bar{\Delta}_2$ и Z подобен самосопряженному оператору.

Мы не приводим здесь формулировку теоремы о факторизации относительно зоны Δ_1, которая также вытекает из теоремы 5.

Замечание 5. Очевидно условие (3.16) будет выполнено, если $A \geqq 0$ и $B \leqq 0$ (или $A \leqq 0$ и $B \geqq 0$). Оно также выполнено, если $\|A\|\,\|B\| < \frac{1}{4}$.

Замечание 6. Если оба оператора A и B вполне непрерывны, то теорема 7 сохраняет силу при замене условия (3.16) условием (3.14).

Действительно, достаточно показать, что

$$\inf_{\|f\|=1} |p_1(f)-p_2(f)| > 0,$$

а для этого, в силу равенства (3.17), достаточно установить, что $\inf\limits_{\|f\|=1} F(f) > 0$, где

$$F(f) = 1-4(Af,f)(Bf,f).$$

Допустим, что это не так. Тогда существует такая нормированная последовательность $\{f_n\}_1^\infty$, что $F(f_n)\to 0$. Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{f_n\}_1^\infty$ слабо сходится к некоторому вектору g, и, следовательно,

$$\lim (Af_n, f_n) = (Ag, g), \quad \lim (Bf_n, f_n) = (Bg, g).$$

Так как $F(f_n)\to 0$, то $4(Ag, g)(Bg, g) = 1$, и из условия (3.14) вытекает, что $\|g\| > 1$. Последнее неравенство невозможно, так как g является слабым пределом нормированной последовательности $\{f_n\}_1^\infty$.

3. В этом пункте приводятся две теоремы, показывающие, что методы настоящей статьи допускают применение к некоторым классам пучков, квадратичные формы которых могут иметь и невещественные корни.

Теорема 8. *Пусть*

$$L(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \lambda^j A_j,$$

где A_j $(j=0, 1, \ldots, n)$ — *ограниченные самосопряженные операторы. Если существуют вещественное число* c *и положительное число* r *такие, что для всех точек окружности* $\Gamma = \{\lambda : |\lambda - c| = r\}$ *выполняется условие*

$$\operatorname{Re}\frac{L(\lambda)}{\lambda-c} \gg 0, \tag{3.18}$$

то $L(\lambda)$ *допускает факторизацию*

$$L(\lambda) = L_+(\lambda)(Z-\lambda I), \tag{3.19}$$

где $L_+(\lambda) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \lambda^j B_j$ *обратим при* $|\lambda - c| \leqq r$, *спектр* Z *лежит в круге* $|\lambda - c| < r$ *и* Z *подобен самосопряженному оператору.*

Доказательство. Из условия (3. 18), в силу теоремы 3, следует что имеет место каноническая факторизация

$$\frac{L(\lambda)}{\lambda-c}=A_+(\lambda)A_-(\lambda).$$

Как и в доказательстве теоремы 4, убеждаемся, что

$$A_+(\lambda)=\sum_{j=0}^{n-1}\lambda^j C_j,\quad A_-(\lambda)=I+\frac{X}{\lambda-c}\qquad (C_j, X\in\mathfrak{R}).$$

Полагая $B_j=-C_j$ $(j=0, 1, \ldots, n-1)$, $Z=cI-X$, получим равенство (3. 19). Для окончания доказательства осталось установить подобие оператора Z самосопряженному оператору. Это осуществляется так же, как и в доказательстве теоремы 4, с тем лишь отличием, что оператор G, симметризующий Z, следует определить равенством

$$G=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^{-1}(\lambda)\,d\lambda$$

Теорема 9. *Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор и $r>\|A\|$. Тогда для любого операторного многочлена $B(\lambda)$ с ограниченными самосопряженными коэффициентами, удовлетворяющего условию*

$$\|B(\lambda)\|<r-\|A\|\qquad (|\lambda|=r),\tag{3.20}$$

пучок $L(\lambda)=A-\lambda I+B(\lambda)$ допускает факторизацию

$$L(\lambda)=L_+(\lambda)(Z-\lambda I),$$

где $L_+(\lambda)$ — операторный многочлен, обратимый в круге $|\lambda|\leqq r$, $\sigma(Z)\subset(-r, r)$ и Z подобен самосопряженному оператору.

В самом деле,

$$\operatorname{Re}\frac{(L(\lambda)f,f)}{\lambda}\leqq -1+r^{-1}\left(\|A\|+\max_{|\lambda|=r}\|B(\lambda)\|\right)\qquad (\|f\|=1).$$

Следовательно, при условии (3. 20) $\operatorname{Re}\,[L(\lambda)/\lambda]\ll 0$, и утверждение теоремы вытекает из теоремы 8.

Отметим в заключение, что для теорем 5 и 7—9 имеют место естественные аналоги следствий 1 и 2.

Цитированная литература

[1] М. В. Келдыш, О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, *ДАН СССР*, **77** (1951), 11—14.

[2] М. Г. Крейн и Г. К. Лангер, О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов, *Труды международного симпозиума по применению теории функций комплексного переменного в механике сплошной среды*, т. 2 (Москва, 1965), 283—322.

[3] Г. К. Лангер, Об инвариантных подпространствах линейных операторов, действующих в пространстве с индефинитной метрикой, *ДАН СССР*, **169** (1966), 12—15.

[4] H. Langer, Über stark gedämpfte Scharen im Hilbertraum, *J. Math. and Mech.*, **17** (1968), 685—706.

[5] H. Langer, Über eine Klasse nichtlinearer Eigenwertprobleme, *Acta Sci. Math.* (в печати).

[6] R. J. Duffin, A minimax theory for overdamped networks, *J. Rat. Mech. and Anal.*, **4** (1955), 221—233.

[7] R. Kühne, Minimaxprinzipe für stark gedämpfte Scharen, *Acta Sci. Math.*, **29** (1968), 39—68.

[8] А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций*. 1 (Москва, 1967).

[9] И. Ц. Гохберг и Ю. Лайтерер, О канонической факторизации непрерывных оператор-функций относительно окружности, *Функц. анализ и его приложения*, **6:1** (1972), 73—74.

[10] А. С. Маркус, Некоторые признаки полноты системы корневых векторов линейного оператора в банаховом пространстве, *Матем. сб.*, **70** (112) (1966), 526—561.

[11] Н. Данфорди и Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория* (Москва, 1962).

[12] А. Ю. Левин, Элементарный признак вещественности корней целой функции с положительными коэффициентами, *Проблемы матем. анализа сложных систем*, вып. 2 (Воронеж, 1968), 72—77.

[13] Э. Беккенбах и Р. Беллман, *Неравенства* (Москва, 1965).

[14] Ю. Л. Шмульян, Дробно-линейные преобразования верхней операторной полуплоскости, *Известия ВУЗов, Математика*, № **1** (80) (1969), 97—105.

[15] В. И. Ломоносов, О равномерной поломжительности симметризатора, *Матем. исслед. Кишинев* (в печати).

[16] H. Langer, Über eine Klasse polynomiaber Scharen selbstadjungierter Operatoren im Hilbertraum, *J. Funct. Anal.*, **12:1** (1973), 13—29.

(Поступило 3/VII/1972)