

Über die Metrisierung der affinen Geometrie

Von ROLF NEVANLINNA in Helsinki (Finnland)

Prof. Béla Szökefalvi-Nagy zum 60. Geburtstag gewidmet

§ 1. Affine Geometrie

Im folgenden beschränken wir uns auf die Frage der Einführung der Metrik in der zweidimensionalen affinen Ebene.

Die affine Geometrie kann auf Grund der folgenden Axiome aufgebaut werden.

I. 1. *Axiome der Inzidenz.* Gegeben seien zwei Mengen: der Punkte (P) und der Geraden (L). Jedem Punkt P ist eine Menge von mit P inzidenten Geraden (L_P) zugeordnet. Die Inzidenz von P und L bezeichnen wir: $P-L$. (oder $L-P$). Die Inzidenz soll folgenden Axiomen genügen:

I. 1. Zu jedem Punkt gibt es mindestens zwei inzidente Geraden und zu jeder Geraden mindestens zwei inzidente Punkte.

I. 2. Zu zwei Punkten gibt es genau eine inzidente Gerade.

I. 3. (Parallelenaxiom). Zu jedem Punkt P , der mit einer Geraden L_1 nicht-inzident ist, gibt es genau eine Gerade L_2-P , so daß L_1 und L_2 keinen gemeinsamen inzidenten Punkt besitzen (L_1 und L_2 sind parallel: $L_1 \parallel L_2$).

I. 4. (Satz von Desargues). Wenn die Punkttupel A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 den Bedingungen $A_1 A_2 \parallel B_1 B_2 \parallel C_1 C_2$, $A_1 B_1 \parallel A_2 B_2$, $B_1 C_1 \parallel B_2 C_2$ genügen, so gilt auch $A_1 C_1 \parallel A_2 C_2$.

I. 2. *Axiome der Anordnung.* Als zweite Grundrelation des Systems (P), (L) führt man die Anordnung ein: jedem Punktepaar A, B ist eine wohlbestimmte Unter-*menge* (C) von der Menge (P) zugeordnet. Man sagt, C liegt zwischen A und B , und bezeichnet dies: ACB (oder BCA).

Die Anordnung wird durch nachstehende Axiome geregelt:

II. 1. Wenn ABC , so sind die Punkte A, B, C kollinear (es gibt eine mit ihnen inzidente Gerade).

II. 2. Von drei kollinearen Punkten liegt genau ein Punkt zwischen den zwei übrigen.

II. 3. Zu dem Punktepaar A, B gibt es mindestens drei weitere Punkte C, D, E , so daß ACB, ABD, EAB .

II. 4. (Axiom von Pasch.) Wenn die Gerade L mit den drei Punkten A, B, C nichtinzident ist, und ist $L-P, APB$, so gibt es einen Punkt $Q-L$, so daß AQC oder BQC gilt.

II. 5. (Stetigkeitsaxiom.) Wenn die Menge aller Punkte (P), $P-L$, in zwei punktfremde Klassen (A) und (B) eingeteilt sind, so daß, kein Punkt A zwischen zwei B -Punkten liegt und kein Punkt B zwischen zwei A -Punkten liegt, so gibt es entweder in (A) oder in (B) einen *äußersten* Punkt C , der weder zwischen zwei A -Punkten noch zwischen zwei B -Punkten liegt.

Das affine System (I, II) genügt den logischen Grundforderungen der Unabhängigkeit, der Widerspruchsfreiheit und der Vollständigkeit.

§ 2. Einführung der Metrik

2. 1. *Kongruenz paralleler Vektoren.* Das Parallelenaxiom und der Desargues'sche Satz ermöglichen die eindeutige parallele Verschiebung eines Vektors von der Anfangslage A_0B_0 in die Endlage A_nB_n , längs eines Polygonzuges $A_0A_1 \dots A_n$. Erklärt man zwei parallel verschobene Vektoren bzw. die entsprechenden nicht orientierten Strecken) als kongruent, so bilden sie eine Äquivalenzklasse.

2. 2. *Kongruenz nichtparalleler Strecken. Die Eichlinie.* Unter Beachtung des Permanenzprinzips sucht man den Kongruenzbegriff für beliebige (nichtparallele) Vektoren und Strecken zu erweitern. Zu diesem Zweck verschieben wir die Vektoren parallel so, daß sie einen beliebig festgesetzten Punkt O als Anfangspunkt erhalten. Man betrachte dann eine Punktmenge E_0 , mit folgenden Eigenschaften:

- 1°. E_0 ist in Bezug auf O symmetrisch.
- 2°. E_0 ist in Bezug auf O sternförmig (jede Halbstrahl, der von O ausgeht, trifft E_0 in genau einem Punkt).

Die Wahl einer solchen *Eichlinie* („Kreislinie“) E_0 setzt den Kongruenzbegriff der Strecken eindeutig fest: 1) Alle „Radien“ OX ($X \in E_0$) werden als kongruent erklärt; 2) Die affinen Axiome definieren eine wohlbestimmte Menge von weiteren (punktfremden) Eichlinien E , die mit E_0 in Bezug auf O homotetisch sind. Die Radien einer Linie E werden als kongruent definiert.

Damit ist der Kongruenzbegriff für beliebige Vektoren (Strecken) als eine Äquivalenz erklärt.

Falls die Eichlinie E_0 *konvex* ist, so gelangt man zu der von Minkowski eingeführten Metrik, bei der die Maßzahlen der Strecken der *Dreiecksungleichung* genügen¹⁾.

¹⁾ Die Erweiterung der Minkowskischen Geometrie zu unendlichdimensionalen Räumen ergibt die Banach-Geometrie.

2. 3. *Winkelkongruenz.* Zwei Winkel W und W' , deren Schenkel paarweise *parallel* sind, werden als kongruent definiert. Sucht man diese Erklärung auf beliebige Winkel zu erweitern, unter Beachtung des Permanenzprinzips, so liegt es nahe die Winkelkongruenz auf die Streckenkongruenz zurückzuführen.

Hierzu bemerke man, daß wenn die Winkel W und W' (mit den Scheitelpunkten O bzw. O') *parallel* sind, folgendes gilt:

Trägt man auf den Schenkeln L_1 und L_2 von W zwei beliebige Vektoren OA_1 und OA_2 ab, und auf den Schenkeln L'_1 und L'_2 von W' zwei zu jenen Vektoren kongruente Vektoren $O'A'_1 (= OA_1)$ und $O'A'_2 (= OA_2)$ ab, so gilt, daß die Vektoren A_1A_2 und $A'_1A'_2$ kongruent sind, und umgekehrt.

2. 4. *Erweiterung der Definition der Winkelkongruenz.* Diese letzte Eigenschaft läßt sich als erweiterte Erklärung der Kongruenz von zwei *beliebigen* Winkeln W und W' verwenden: Sei $O'A'_1 = OA_1$ (wobei = das Zeichen für die Kongruenzrelation ist) und $O'A'_2 = OA_2$; falls dann auch die Strecken A_1A_2 und $A'_1A'_2$ kongruent sind, so heißen die Winkel W und W' kongruent.

2. 5. *Eindeutigkeit der Definition der Winkelkongruenz.* Im Falle paralleler Winkel ist diese definierende Eigenschaft von der Wahl der Punkte A_1 und A_2 unabhängig. Damit die aufgestellte Erklärung der Kongruenz nichtparalleler Winkel eindeutig (ebenfalls von der Wahl der Hilfspunkte A_1, A_2 unabhängig) ist, muß folgendes gefordert werden:

Postulat III: Es seien die vier Punkte O, A_1, A_2, A_3 so gegeben, daß O, A_2, A_3 kollinear sind. Sei ferner O', A'_1, A'_2, A'_3 eine zweite Gruppe von vier Punkten (O', A'_2, A'_3 kollinear). Wenn dann $OA_1 = O'A'_1, OA_2 = O'A'_2, OA_3 = O'A'_3, A_1A_2 = A'_1A'_2$ gilt, so soll auch $A_1A_3 = A'_1A'_3$ sein.

Bei beliebiger Wahl der symmetrischen, sternförmigen Eichlinie E ist dieses Postulat i. A. nicht erfüllt. In der Tat schränkt das Bestehen des für die Eindeutigkeit des Begriffs der Winkelkongruenz *notwendigen* Postulats III die Wahl der Linie E stark ein, wie im folgenden kurz gezeigt werden soll.

2. 6. *Konstruktion der Eichlinie mittels des Postulats III.* Wir zeigen zunächst, daß das Postulat III erlaubt, zu *drei* gegebenen Punkten A, B, C auf einer Eichlinie E einen neuen, vierten Punkt C_1 von E zu konstruieren. Wählt man OA und OB als aufspannende Einheitsvektoren eines affinen Koordinatensystems, so erhalten die drei gegebenen Punkte A, B, C die Koordinaten $(x=1, y=0), (x=0, y=1)$ und $C=C_0(x_0, y_0)$. Mittels des Postulats III bestimmt man dann einen vierten Punkt $C_1(x_1, y_1)$ mit den Koordinaten

$$x_1 = \frac{x_0^2 - 1}{y_0}, \quad y_1 = x_0,$$

der ebenfalls auf der Eichlinie E liegt.

Andererseits bestimmen die Punkte O, A, B, C_0 eine einzige quadratische Form

$$Q(x, y) = x^2 - 2cxy + y^2 \quad \left(c = \frac{x_0^2 + y_0^2 - 1}{2x_0y_0} \right),$$

die an den Punkten A, B, C_0 den Wert 1 annimmt. Die Koordinaten (x_1, y_1) von C_1 lassen sich schreiben:

$$(2.6) \quad x_1 = 2cx_0 - y_0, \quad y_1 = x_0,$$

und diese affine Transformation erhält die quadratische Form Q invariant.

2.7. *Euklidische Metrik.* Wir nehmen jetzt an, daß die vorgegebenen drei Punkte A, B, C der Eichlinie E eine in Bezug auf den Mittelpunkt O konvexe Figur bilden; d.h. daß die Punkte O und $C (= C_0)$ auf verschiedenen Seiten der Geraden AB liegen. Die quadratische Form Q ist dann *positiv definit* ($|c| < 1$).

Durch Iteration der Transformation (2.6) bestimmt man eine Folge von Punkten $C_n(x_n, y_n)$, die alle sowohl auf der Eichlinie E als auf der Ellipse $Q=1$ liegen.

Nimmt man dann noch an, daß die Eichlinie *beschränkt* ist, so ergibt das Iterationsverfahren:

- 1) Die Eichlinie E ist stetig, und daraus ferner:
- 2) E fällt mit der Ellipse $Q=1$ zusammen.

Damit ist gezeigt, daß die Vorgabe von drei Punkten A, B, C einer Eichlinie E , die in Bezug auf den Mittelpunkt O eine konvexe Konfiguration bilden, alle Eichlinien (mit O als Mittelpunkt) eindeutig festlegt, als eine Schar von (in Bezug auf O) homotetischen Ellipsen.

Die Streckenmetrik ist eindeutig bestimmt, und zwar als eine *euklidische*.

Das skalare Produkt wird durch Polarisation aus Q erhalten. Die euklidische Winkelmessung ergibt sich dann in üblicher Weise.

2.8. *Der indefinite und der semidefinite Fall.* Falls die Konfiguration A, B, C in Bezug auf O *konkav* ist, so führt die Anwendung des Postulats III (sofern man die Forderung der Beschränktheit der Eichlinie fallen läßt) zu dem Ergebnis, daß E mit den *Hyperbeln* $Q(x, y) = \pm 1$ ($|C| > 1$) zusammenfällt. Die Metrik ist also *indefinit*; die Richtungen der Asymptoten verbleiben unmetriert.

Sind schließlich die drei Eichpunkte A, B, C *kollinear*, so ist $Q(x, y)$ *semidefinit*, und die Anwendung des Postulats III zeigt, daß die Eichlinie E mit dem *Geradenpaar* $Q = \pm 1$ zusammenfällt.

Die Transformationen (2.6), die im konvexen Fall die euklidischen Drehungen darstellen, können im indefiniten Fall als die Lorentztransformationen, im semidefiniten Fall als die Galileitransformationen gedeutet werden.

Die vollständige Ausführung der Beweise der Ergebnisse von 2.6 bis 2.8 soll in einem anderen Zusammenhang gegeben werden.

(Eingegangen am 31. Oktober 1972)