Über einseitige Approximation durch Polynome. III

Von G. FREUD und G. P. NÉVAI in Budapest

1. Einführung

In dieser Arbeit, die die Fortsetzung der Arbeiten [1] bis [4] bildet, werden wir den folgenden Satz beweisen.

Hauptsatz. *Es sei* $w_k(x)=e^{-x^{2k}}$ $(k=1, 2, \dots)$. *Ferner sei* $F(x)$ *die* r*-fache* $(r=0, 1, \dots)$ *Integralfunktion einer Funktion* $F^{(r)}(x)$, *die auf jedem endlichen Intervall von beschränkter Schwankung ist und der Bedingung*

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_k(x)|dF^{(r)}(x)| < +\infty \tag{1}$$

genügt, ferner sei

$$|F(x)| < C_1(1+x^{2s}) \qquad (-\infty<x<\infty), \tag{2}$$

wobei s *eine festgehaltene, nichtnegative ganze Zahl bezeichnet*). Dann existieren für jede ganze Zahl* $n(>s)$ *Polynome* $p_n(x)$ *und* $P_n(x)$ *höchstens* $(2n-2)$*-ten Grades, mit denen die folgenden Relationen bestehen:*

$$p_n(x) \leqq F(x) \leqq P_n(x) \qquad (-\infty<x<\infty), \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [P_n(x)-p_n(x)]w_k(x)dx = O\{n^{-1-\left(\frac{1}{2k}\right)(r+1)}\}. \tag{4}$$

Wir bemerken, daß dieser Satz für $k=1$ in [2] bewiesen wurde.

Die Ergebnisse bezüglich der einseitigen Approximation auf $[0, \infty)$ der Arbeit [3] kann man ganz analog verallgemeinern. Die Resultate des 2. Teiles vorliegender Arbeit sind dabei in beiden Fällen wesentlich.

In dieser Arbeit wollen wir die Bezeichnungen des Buches [5] von G. FREUD gebrauchen. Also bedeuten $p_n(w; x)$ $(n=0, 1, \dots)$ orthonormale Polynome mit der Gewichtsfunktion $w(x)$:

$$x_{1n}(w) > x_{2n}(w) > \cdots > x_{nn}(w)$$

* C_1 und später C_2, usw. bedeuten nichtnegative, von x und n unabhängige Konstanten.

sind die Nullstellen des Polynoms $p_n(w; x)$;

$$\psi_n(w; x, \xi) = p_{n-1}(w; \xi)p_n(w; x) - p_n(w; \xi)p_{n-1}(w; x)$$

ist das zu $w(x)$ gehörende, in der Veränderlichen x quasi-orthogonale Polynom; n^* bedeutet den Grad von $\psi_n(w; x, \xi)$,

$$\xi_1 = \xi_{1n}(w; \xi) > \xi_2 > \dots > \xi_{n^*}$$

sind die Nullstellen von $\psi_n(w; x, \xi)$ (wir bemerken, daß $\xi \in \{\xi_i\}_{i=1}^{n^*}$ und zwar im folgenden immer $\xi = \xi_\sigma$); $\lambda_n(w; \xi)$ bezeichne die Christoffelsche Funktion des zu $w(x)$ gehörenden Gauß—Jacobischen Quadraturverfahrens. Mit $\mathbf{P}_n$ wollen wir die Menge der Polynome höchstens n-ten Grades bezeichnen.

2. Die Abschätzung der Christoffelschen Funktionen und der Entfernungen zwischen den Nullstellen der quasiorthogonalen Polynome

In diesem Paragraphen werden wir von den folgenden bekannten Ergebnissen Gebrauch machen.

Hilfssatz A (vgl. [5] Satz I. 4. 1). *Bezeichnet $w(x)$ eine beliebige Gewichtsfunktion, so gilt*

$$\lambda_{n+1}(w; \xi) = \min_{\substack{\pi_n \in \mathbf{P}_n \\ \pi_n(\xi) \neq 0}} \pi_n^{-2}(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \pi_n^2(x) w(x)\, dx \qquad (n = 0, 1, \dots). \tag{5}$$

Hilfssatz B (vgl. G. Freud [6], Satz 2). *Für jedes Polynom $\pi_n \in \mathbf{P}_n$ gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \pi_n^2(x) w_k(x)\, dx \leq C_2 \int_{-C_3 n^{\frac{1}{2k}}}^{C_3 n^{\frac{1}{2k}}} \pi_n^2(x) w_k(x)\, dx. \tag{6}$$

Hilfssatz C (vgl. G. Freud [6], Hilfssatz 1). *Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es ein Polynom $\varrho_n \in \mathbf{P}_n$, für welches die Ungleichungen*

$$0 < \varrho_n(x) < e^{\frac{x^k}{2}} \qquad (0 \leq x < \infty) \tag{7}$$

und

$$\varrho_n(x) > \frac{1}{2} e^{\frac{x^k}{2}} \qquad (0 \leq x \leq c_4 n^{\frac{1}{2k}}) \tag{8}$$

erfüllt sind.

Hilfssatz D (vgl. [5], Satz III. 3. 2). *Es sei* $v(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ *für* $0<x<1$ *und* $v(x)=0$ *sonst. Dann gilt*

(9) $$\lambda_{n+1}(v;\xi)<C_5 n^{-1} \qquad (0\leqq\xi\leqq 1).$$

Auf Grund dieser Ergebnisse läßt sich der folgende Satz einfach beweisen. Es sei $u_k(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}w_k(\sqrt{x})$ $(x>0)$.

Satz 1. *Für eine beliebige natürliche Zahl n gilt*

(10) $$\lambda_{n+1}(u_k;\xi)<C_6 n^{-1+\frac{1}{2k}}w_k\left(\sqrt{\xi}\right) \qquad \left(0\leqq\xi<C_7 n^{\frac{1}{k}}\right).$$

Beweis. Infolge von (5) und (6) besteht die Ungleichung

$$\lambda_{n+1}(u_k;\xi)<C_8 \min_{\substack{\pi_n\in \mathbf{P}_n\\ \pi_n(\xi)\neq 0}} \pi_n^{-2}(\xi)\int_0^{C_9 n^{\frac{1}{k}}}\pi_n^2(x)u_k(x)\,dx.$$

Nun sei $\pi_n=\varrho_{\left[\frac{n}{2}\right]}\cdot\varphi_{\left[\frac{n}{2}\right]}$, wobei $\varphi_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ ein beliebiges Polynom höchstens $\left[\frac{n}{2}\right]$-ten Grades bezeichnet. Infolge von (7) und (8) bestehen die folgenden Zusammenhänge:

$$\lambda_{n+1}(u_k;\xi)<C_{10}w_k\left(\sqrt{\xi}\right)\min_{\substack{\varphi_{\left[\frac{n}{2}\right]}\in \mathbf{P}_{\left[\frac{n}{2}\right]}\\ \varphi_{\left[\frac{n}{2}\right]}(\xi)\neq 0}}\varphi_{\left[\frac{n}{2}\right]}^{-2}(\xi)\int_0^{C_9 n^{\frac{1}{k}}}\varphi_{\left[\frac{n}{2}\right]}^2(x)\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=$$

$$=C_{11}w_k\left(\sqrt{\xi}\right)n^{\frac{1}{2k}}\min_{\substack{\varphi_{\left[\frac{n}{2}\right]}\in \mathbf{P}_{\left[\frac{n}{2}\right]}\\ \varphi_{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(C_9^{-1}n^{-\frac{1}{k}}\xi\right)\neq 0}}\varphi_{\left[\frac{n}{2}\right]}^{-2}\left(C_9^{-1}n^{-\frac{1}{k}}\xi\right)\int_0^1\varphi_{\left[\frac{n}{2}\right]}^2(x)\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Der letzte Ausdruck ist auf Grund der Formel (5) gleich

$$C_{11}w_k\left(\sqrt{\xi}\right)n^{\frac{1}{2k}}\lambda_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\left(v;C_9^{-1}n^{-\frac{1}{k}}\xi\right).$$

Satz 1 folgt unmittelbar aus (9).

Folgerung 1. *Für jedes n gilt die Ungleichung*

(11) $$\lambda_{n+1}(w_k;\xi)<C_{12}n^{-1+\frac{1}{2k}}w_k(\xi) \qquad \left(|\xi|<C_{13}n^{\frac{1}{2k}}\right).$$

Tatsächlich ist laut Hilfssatz A

$$\lambda_{n+1}(w_k;\xi) \leqq \min_{\substack{\pi_{\left[\frac{n}{2}\right]} \in P_{\left[\frac{n}{2}\right]} \\ \pi_{\left[\frac{n}{2}\right]}(\xi^2) \neq 0}} \pi_{\left[\frac{n}{2}\right]}^{-2}(\xi^2) \int_{-\infty}^{\infty} \pi_{\left[\frac{n}{2}\right]}^{2}(x^2) w_k(x)\,dx = \lambda_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}(u_k;\xi^2)$$

(vgl. G. FREUD [6]; der Grundgedanke des Beweises von Satz 1 wurde ebenfalls aus dieser Arbeit entnommen).

Satz 2. *Bezeichne ξ' die größte der von ξ links liegenden Nullstellen des quasi-orthogonalen Polynoms $\psi_n(u_k; x, \xi)$. Falls $\xi' \geqq 0$ gilt, so besteht die Ungleichung*

$$\xi - \xi' < C_{14} n^{-1+\frac{1}{2k}} \sqrt{\xi} \quad \left(0 < \xi < C_7 n^{\frac{1}{k}}\right). \tag{12}$$

Beweis. Infolge der Posseschen Ungleichungen (vgl. [5], I. (5. 10)) ist die Relation

$$\int_{\xi'}^{\xi} e^{x^k} u_k(x)\,dx \leqq e^{\xi'^k} \lambda_n(u_k;\xi') + e^{\xi^k} \lambda_n(u_k;\xi)$$

erfüllt. Wendet man auf die rechte Seite Satz 1 an, so gelant man zur Ungleichung

$$\left(\sqrt{\xi} - \sqrt{\xi'}\right) < C_6 n^{-1+\frac{1}{2k}} \quad \left(0 < \xi < C_7 n^{\frac{1}{k}}\right). \tag{13}$$

Durch Multiplikation beider Seiten mit $\left(\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi'}\right)$ ergibt sich (12).

Aus Satz 2 ergibt sich mit Hilfe der Theorie der Orthogonalpolynome (mit allgemeiner Gewichtsfunktion):

Folgerung 2. *Bezeichne ξ^* jene Nullstelle des quasi-orthogonalen Polynoms $\psi_n(w_k; x, \xi)$, die im Intervall $(-|\xi|, |\xi|)$ am nächsten zu ξ liegt; diese Nullstelle genügt der Ungleichung*

$$|\xi - \xi^*| < C_{15} n^{-1+\frac{1}{2k}} \quad \left(|\xi| < C_{16} n^{\frac{1}{2k}}\right), \tag{14}$$

wobei $C_{16} < C_{13}$ gilt.

3. Hilfssätze

Hilfssatz 1. *Für beliebige reelle Zahlen $x > 0$, $\alpha \leqq 0$, $\beta \geqq 1$ und für $j = 0, 1, 2, \ldots$ gilt*

$$I_j(x) = \int_{x}^{\infty} (y-x)^j y^\alpha e^{-y^\beta}\,dy \leqq \frac{j!}{(\beta x^{\beta-1})^{j+1}} \cdot x^\alpha e^{-x^\beta}. \tag{15}$$

Beweis. Wir führen eine Induktion bezüglich j durch. Offensichtlich bestehen die Zusammenhänge

$$I_0(x) = \int_x^\infty y^\alpha e^{-y^\beta}\,dy \leqq x^\alpha \frac{1}{\beta x^{\beta-1}} \int_x^\infty \beta y^{\beta-1} e^{-y^\beta}\,dy = \frac{1}{\beta x^{\beta-1}} x^\alpha e^{-x^\beta},$$

und falls $j \geqq 1$ ist, dann gilt

$$I_j(x) = j\int_x^\infty (y-x)^{j-1} I_0(y)\,dy \leqq j\int_x^\infty (y-x)^{j-1}\frac{1}{\beta y^{\beta-1}} y^\alpha e^{-y^\beta}\,dy \leqq$$

$$\leqq \frac{j}{\beta x^{\beta-1}} I_{j-1}(x).$$

Hilfssatz 2. *Falls die Bedingung*

$$\int_{-\infty}^\infty w_k(x)\,|dF^{(r)}(x)| < +\infty$$

erfüllt ist, so gilt die Ungleichung

(16) $$|F^{(j)}(x)|w_k(x)|x|^{(2k-1)(r-j)} < C_{17} \qquad (j=0, 1, \dots, r; -\infty < x < \infty).$$

Beweis. Der Hilfssatz muß nur für große Absolutwerte von x bewiesen werden; für kleine Werte von x ist nämlich die Behauptung trivialerweise erfüllt. Falls $j=r$, so gelten die Beziehungen

$$|w_k(x)[F^{(r)}(x)-F^{(r)}(0)]| \leqq \left|\int_0^x w_k(y)\,|dF^{(r)}(y)|\right| \leqq \int_{-\infty}^\infty w_k(y)\,|dF^{(r)}(y)| < +\infty.$$

Weiß man, daß für x die Ungleichung

$$|F^{(j)}(x)| < C_{18}\, w_k^{-1}(x) x^{(1-2k)(r-j)} \quad (x>0)$$

besteht, so folgt hieraus die Ungleichung

$$|F^{(j-1)}(x)-F^{(j-1)}(\omega)| \leqq C_{18}\int_\omega^x w_k^{-1}(y) y^{(1-2k)(r-j)}\,dy =$$

$$\equiv C_{18}\int_\omega^x \frac{[w_k^{-1}(y)y^{(1-2k)(r-j+1)}]'}{[2k-(2k-1)(r-j+1)y^{-2k}]}\,dy \quad (x>\omega>0).$$

Ist nun beispielweise $\omega = (r+1)^{1/2k}$, so ist im letzteren Integral der Nenner nicht kleiner als 1, also gilt die Ungleichung

$$|F^{(j-1)}(x)-F^{(j-1)}(\omega)| \leqq C_{18}\int_\omega^x [w_k(y)y^{(1-2k)(r-j+1)}]'\,dy \quad (x>\omega>0),$$

woraus sich (16) für positive Werte von x bereits leicht ergibt. Für negative x-Werte verläuft der Beweis ganz analog.

4. Beweis des Hauptsatzes

Hilfssatz 3 (vgl. [4], Satz 1). *Es sei $w(x)$ eine beliebige, im Intervall (a, b) definierte Gewichtsfunktion. Ferner sei $f(x)$ die r-fache ($r=0, 1, \ldots$) Integralfunktion einer Funktion $f_r(x)$ mit beschränkter Schwankung in (a, b). Ist $n \geqq r+6$ und $f_r(x) \equiv$ $\equiv$const. außerhalb des Intervalls $(a_1, b_1) \subset \left(x_{n-\left[\frac{r}{2}\right]-4,n}(w), x_{\left[\frac{r}{2}\right]+4,n}(w)\right)$, so gibt es Polynome $\pi_n(x)$ und $\pi_n^*(x)$ höchstens $(2n-2)$-ten Grades, für welche die Ungleichungen*

$$\pi_n(x) \leqq f(x) \leqq \pi_n^*(x) \qquad (a<x<b)$$

erfüllt sind und die Relation

$$\int_a^b [\pi_n^*(x)-\pi_n(x)]w(x)\,dx = 0\left\{\int_{a_1}^{b_1} \Phi(\xi)\,|df_r(\xi)|\right\} \quad (n = r+6, r+7, \ldots)$$

besteht, wobei $\Phi(\xi)$ eine beliebige solche Majorante der Funktion

$$\varphi(\xi) = \left[\xi_{\sigma-\left[\frac{r}{2}\right]-1,n}(w;\xi)-\xi_{\sigma+\left[\frac{r}{2}\right]+1,n}(w;\xi)\right]^r \max_{\xi_{\sigma+\left[\frac{r}{2}\right]+1} \leqq t \leqq \xi_{\sigma-\left[\frac{r}{2}\right]-1}} \lambda_n(w;t)$$

bezeichnet, für welche das Integral auf der rechten Seite existiert.

Wir wenden uns nun dem Beweis des Hauptsatzes zu. Die folgenden Überlegungen sind für $n \geqq n_0$ richtig, wobei n_0 nicht von x abhängt. Besteht $n<n_0$, so ist die Behauptung infolge von (2) trivialerweise wahr. Wie es in [2] bemerkt wurde, genügt es die Betrachtung von Funktionen, die für $x<0$ verschwinden.

Es sei

$$\omega_n \in \left[\frac{1}{4} C_{16} n^{\frac{1}{2k}}, \frac{1}{2} C_{16} n^{\frac{1}{2k}}\right]$$

eine Stetigkeitsstelle der Funktion $F^{(r)}(x)$, und es bestehe

$$F(x) = \sum_{j=0}^{r} \frac{F^{(j)}(\omega_n)}{j!}(x-\omega_n)^j + F^*(x) + F^{**}(x), \tag{17}$$

wobei F^* und F^{**} die Bedingungen des Hauptsatzes erfüllen, ferner $F^*(x)$ für $x \geqq \omega_n$ und $F^{**}(x)$ für $x \leqq \omega_n$ verschwinden, und in jedem endlichen Intervall die Schwankung von $F^{*(r)}$ bzw. von $F^{**(r)}$ nicht größer ist, als die Schwankung von $F^{(r)}$.

Auf $F^*(x)$ läßt sich Hilfssatz 3 unmittelbar anwenden. Auf Grund dessen gibt es ein Paar $p_n^*, P_n^* \in \mathbf{P}_{2n-2}$ derart, daß die Ungleichungen

$$p_n^*(x) \leqq F^*(x) \leqq P_n^*(x) \qquad (-\infty<x<\infty)$$

bestehen; aus (11) und (14) erhält man ferner mit Hilfe einfacher Rechnungen den Zusammenhang

$$\int_{-\infty}^{\infty} [P_n^*(x)-p_n^*(x)]w_k(x)\,dx \leqq C_{19} n^{-\left(1-\frac{1}{2k}\right)(r+1)} \int_0^{\omega_n} w_k(\xi)\,|dF^{*(r)}(\xi)| \leqq$$

$$\leqq C_{19} n^{-\left(1-\frac{1}{2k}\right)(r+1)} \int_{-\infty}^{\infty} w_k(\xi)\,|dF^{(r)}(\xi)| = O\{n^{-\left(1-\frac{1}{2k}\right)(r+1)}\}.$$

Da $F^{**}(x)$ für $x<\omega_n$ verschwindet, ergibt sich aus (2) und (17) das Bestehen von

$$|F^{**}(x)| < C_{20}\omega_n^{2s}\gamma_0(x,\omega_n) + C_{21}\gamma_{2s}(x,\omega_n) + \tag{18}$$

$$+\sum_{\nu=0}^{r} |F^{(\nu)}(\omega_n)|\,\gamma_\nu(x,\omega_n) \equiv T_r(x,\omega_n),$$

wobei

$$\gamma_j(x,\omega_n) = \begin{cases} 0 & \text{für } x<\omega_n \\ \dfrac{1}{j!}(x-\omega_n)^j & \text{für } x\geqq\omega_n \end{cases}$$

($j=0, 1, \ldots$). Da $\gamma_j(x,\omega_n)$ als Funktion von x die j-fache Integralfunktion der Funktion $\gamma_0(x,\omega_n)$ ist, und die letztere auf der ganzen reellen Achse von beschränkter Schwankung ist, läßt sich Hilfssatz 3 anwenden. Also gibt es ein $p_n(x,\omega_n,j)$ und ein $P_n(x,\omega_n,j)$, die in x Polynome höchstens $(2n-2)$-ten Grades sind und mit denen die Ungleichungen

$$p_n(x,\omega_n,j) \leqq \gamma_j(x,\omega_n) \leqq P_n(x,\omega_n,j) \qquad (-\infty<x<\infty)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} [P_n(x,\omega_n,j)-p_n(x,\omega_n,j)]\,w_k(x)\,dx \leqq$$

$$\leqq C_{22} n^{-\left(1-\frac{1}{2k}\right)(j+1)} \int_{\omega_n-0}^{\omega_n} w_k(\xi)\,|d\gamma_0(\xi,\omega_n)| = C_{22} n^{-\left(1-\frac{1}{2k}\right)(j+1)} w_k(\omega_n)$$

bestehen. Hierbei wurden die Abschätzungen (11) und (14) angewendet.

Nun sei

$$P_n^{**}(x) = C_{20}\omega_n^{2s} P_n(x,\omega_n,0) + C_{21} P_n(x,\omega_n,2s) + \sum_{\nu=0}^{r} |F^{(\nu)}(\omega_n)|\,P_n(x,\omega_n,\nu).$$

Es ist klar, daß

$$-P_n^{**}(x) \leqq F^{**}(x) \leqq P_n^{**}(x) \qquad (-\infty<x<\infty)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n^{**}(x) w_k(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} [P_n^{**}(x) - T_r(x, \omega_n)] w_k(x)\, dx + \int_{\omega_n}^{\infty} T_r(x, \omega_n) w_k(x)\, dx \leqq$$

$$\leqq C_{22} w_k(\omega_n) [C_{20} \omega_n^{2s} n^{-1+\frac{1}{2k}} + C_{21} n^{-\left(1+\frac{1}{2k}\right)(2s+1)} +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{r} |F^{(\nu)}(\omega_n)| n^{-\left(1-\frac{1}{2k}\right)(\nu+1)}] + \int_{\omega_n}^{\infty} T_r(x, \omega_n) w_k(x)\, dx.$$

richtig sind. Der Ausdruck auf der rechten Seite der Ungleichung ist infolge der Hilfssätze 1 und 2, der Relation (18) und der Definition von ω_n von der Größenordnung $0\{n^{-\left(1-\frac{1}{2k}\right)(r+1)}\}$. Den Hauptsatz selbst erhalten wir schließlich, indem wir

$$p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{r} \frac{F^{(\nu)}(\omega_n)}{\nu!} (x-\omega_n)^{\nu} + p_n^{**}(x) - P_n^{**}(x)$$

und

$$P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{r} \frac{F^{(\nu)}(\omega_n)}{\nu!} (x-\omega_n)^{\nu} + P_n^{**}(x) + P_n^{**}(x)$$

setzen.

Literatur

[1] G. Freud, Über einseitige Approximation durch Polynome. I, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 12—28.

[2] G. Freud—J. Szabados, Über einseitige Approximation durch Polynome. II, *Acta Sci. Math.*, **16** (1970), 59—67.

[3] G. P. Névai, Einseitige Approximation durch Polynome in $(0, \infty)$, *Periodica Math. Hungar.* **2** (1972).

[4] G. P. Névai, Einseitige Approximation durch Polynome, mit Anwendungen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **23** (1972), 495—506.

[5] G. Freud, *Orthogonale Polynome* (Budapest, 1969).

[6] G. Freud, On weighted L_1-approximation by polynomials, *Studia Math.*, **46** (1973), 125—133.

(Eingegangen am 21. März 1972)