Über eine Klasse nichtlinearer Eigenwertprobleme

Von HEINZ LANGER in Dresden (DDR)

In der Arbeit [1] betrachtet R. E. L. TURNER die Schar

$$M(\mu) = A - \mu I - \mu^2 B_2 - \cdots - \mu^N B_N$$

mit nichtnegativen Operatoren $A, B_2, \ldots, B_N \in \mathfrak{R}$[1] in einem seperablen Hilbertraum $\mathfrak{H}$. Für einen vollstetigen Operator A erweist sich das nichtnegative Spektrum der Schar M als diskret. Wählt man in jedem der zugehörigen Eigenräume eine Basis, so zeigt R. E. L. TURNER, daß das System aller dieser Eigenvektoren eine Rieszsche Basis von $\mathfrak{H}$ bildet, wenn nur eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) $A \in \mathfrak{S}_p$ für $p < \frac{1}{2}$;

b) $A \in \mathfrak{S}_p$ für $p < \frac{2}{3}$ und $B_2, \ldots, B_N \in \mathfrak{S}_2$.

Unlängst wurden diese Bedingungen von A. S. MARKUS und G. I. RUSSU [2] abgeschwächt zu einer der folgenden:

c) $A \in \mathfrak{S}_p$ für ein $p < 1$;

d) $A \in \mathfrak{S}_p$ für $p < m-1$ $(2 \leqq m \leqq N)$ und $B_2 = \cdots = B_{m-1} = 0$.

In der vorliegenden Note zeigen wir, daß für die Gültigkeit der obigen Aussage an Stelle von a), b), c) oder d) nur vorausgesetzt zu werden braucht, daß A vollstetig ist, und auch die Voraussetzungen über $B_2, \ldots, B_N$ abgeschwächt werden können.[2] Darüber hinaus läßt sich im allgemeineren Falle $A \in \mathfrak{R}$, $A \geqq 0$, aus unseren

---

[1] $\mathfrak{R}$ bezeichne den Ring aller beschränkten linearen, $\mathfrak{S}_\infty$ die Menge der vollstetigen Operatoren in $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{S}_p$, $p > 0$, sei die Menge aller $A \in \mathfrak{S}_\infty$ mit $\Sigma \lambda_j^{p/2}(A^*A) < \infty$, wobei sich die Summation über alle Eigenwerte von A^*A erstreckt, jeder entsprechend seiner Vielfachheit oft gezählt. Der Operator $A \in \mathfrak{R}$ heißt nichtnegativ (streng positiv), wenn für alle $x \in \mathfrak{H}$ gilt: $(Ax, x) \geqq 0$ $((Ax, x) \geqq \gamma \|x\|^2$ für ein geeignetes $\gamma > 0)$, wir schreiben dafür $A \geqq 0$ $(A \gg 0)$.

[2] Neulich bewiesen auch V. I. MACAJEV und A. I. VIROZUB (erscheint in *Funkcional. Anal. i Priložen.*) die Gültigkeit der obigen Aussage unter solchen allgemeinen Bedingungen. Ihre Methode unterscheidet sich jedoch wesentlich von unserer, indem sie zum Beweis der Existenz einer Lösung $Y \in \mathfrak{R}$ mit den Eigenschaften 1)—3) aus Satz 2 ein Ergebnis von I. C. GOHBERG und J. LEITERER zur Faktorisierung von Operatorfunktionen benutzen.

Ergebnissen die Existenz einer „Spektralschar" für das nichtnegative Spektrum der Schar M herleiten, worauf wir an anderer Stelle eingehen werden.

Zum Beweis der obigen Aussage führen wir die Schar M durch eine Parametertransformation auf eine Schar L:

(1) $$L(\lambda) = \lambda^N I + \lambda^{N-1} D_{N-1} + \cdots + \lambda D_1 + D_0,$$

$D_0, \ldots, D_{N-1} \in \mathfrak{R}$, zurück, für die ein Intervall $[\lambda_1, \lambda_2]$ der reellen Achse mit

$$L(\lambda_1) \ll 0, \quad L(\lambda_2) \gg 0, \quad L'(\lambda) \gg 0 \quad \text{für} \quad \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$$

existiert, und zeigen, daß es dann eine Lösung $Z \in \mathfrak{R}$ der Operatorengleichung

(2) $$L(Z) \equiv Z^N + D_{N-1} Z^{N-1} + \cdots + D_1 Z + D_0 = 0$$

gibt, die ähnlich zu einem selbstadjungierten Operator ist.[3] Diese Methode der Betrachtung der zur Schar (1) gehörigen Operatorengleichung wurde von M. G. KREIN und dem Verfasser für gewisse quadratische Scharen in [3], [4] (siehe auch [5], [6]) entwickelt. Wesentliche Hilfsmittel für unsere Betrachtungen sind die von P. H. MÜLLER [7] angegebene Linearisierung der Schar L sowie einige einfache Aussagen der Theorie linearer Operatoren in J-Räumen.

Herrn Professor M. G. KREIN danke ich sehr dafür, daß er mich auf die Arbeit [1] aufmerksam und mir diese zugänglich gemacht hat, den Herren Dr. A. S. MARKUS und Dr. Ju. L. Šmul'jan danke ich für wertvolle Hinweise.

1. In diesem Abschnitt stellen wir einige einfache Begriffe aus der Theorie der linearen Operatoren in J-Räumen zusammen.

Es sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbertraum für das Skalarprodukt (x, y) $(x, y \in \mathfrak{H})$, G ein beschränkter und beschränkt invertierbarer indefiniter (d.h., es gibt Elemente $x, y \in \mathfrak{H}$ mit $(Gx, x) > 0$ und $(Gy, y) < 0$) selbstadjungierter Operator in $\mathfrak{H}$. Wir definieren in $\mathfrak{H}$ ein indefinites, sog. G-Skalarprodukt $[x, y]$ durch die Gleichung

(3) $$[x, y] = (Gx, y) \quad (x, y \in \mathfrak{H}).$$

Dann ist $\mathfrak{H}$ ein J-Raum für dieses indefinite Skalarprodukt und ein geeignetes positiv definites Skalarprodukt, dessen Norm der Ausgangsnorm äquivalent ist. Ein Element $x \in \mathfrak{H}$ heißt G-positiv (G-nichtnegativ usw.), wenn $[x, x] > 0$ ($[x, x] \geqq 0$ usw.) gilt. Die Menge aller G-nichtnegativen Elemente von $\mathfrak{H}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_+$.

Ein Teilraum, der außer $x = 0$ nur aus G-positiven (G-nichtnegativen) Elementen besteht, heiße G-positiv (G-nichtnegativ). Gilt für die Elemente x eines G-positiven Teilraumes $\mathfrak{L}$ sogar

$$[x, x] \geqq \gamma \|x\|^2$$

mit einem $\gamma > 0$, so nennen wir $\mathfrak{L}$ streng G-positiv.

---

[3] D. h., es gibt einen Operator $S \gg 0$, so daß SZ selbstadjungiert ist.

Das G-orthogonale Komplement $\mathfrak{E}^{[\perp]}$ eines Teilraumes $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{H}$ besteht definitionsgemäß aus allen $x \in \mathfrak{H}$ mit $[x, \mathfrak{E}] = \{0\}$.

Ein beschränkter linearer Operator A in $\mathfrak{H}$ heißt bekanntlich G-selbstadjungiert, wenn

$$[Ax, y] = [x, Ay] \quad (x, y \in \mathfrak{H})$$

gilt.

Wir benötigen die folgenden einfachen Aussagen:

1°. *Liegt die Spektralmenge σ des G-selbstadjungierten Operators A symmetrisch zur reellen Achse, so ist auch der zu σ gehörige Rieszsche Projektor G-selbstadjungiert* ([8]).

2°. *Ist der Wertebereich eines G-selbstadjungierten Projektors G-nichtnegativ, so ist er sogar streng G-positiv* ([9]), *bildet also einen Hilbertraum bezüglich des G-Skalarproduktes.*

Die Aussage 2° benutzen wir zum Beweis des

Lemma 1. *Es sei E_t, $0 \leqq t \leqq 1$, eine Familie G-selbstadjungierter Projektoren, die bezüglich der gleichmäßigen Operatorentopologie stetig vom Parameter t abhängt. Dann folgt aus $E_0 \mathfrak{H} \subset \mathfrak{P}_+$, daß $E_t \mathfrak{H}$ für alle $0 \leqq t \leqq 1$ streng G-positiv ist.*

Beweis. Die Menge

$$\tau = \{t : E_t \mathfrak{H} \subset \mathfrak{P}_+\}$$

ist offensichtlich abgeschlossen. Wäre $\tau \neq [0, 1]$, so gäbe es einen Punkt t_0 mit

$$t_0 = \inf([0, 1] \setminus \tau).$$

Dann gilt auf Grund von 2° für ein geeignetes $\gamma > 0$:

$$[E_{t_0} x, E_{t_0} x] \geqq \gamma \|E_{t_0} x\|^2$$

Für alle t aus einer hinreichend kleinen Umgebung von t_0 gilt weiter $E_t E_{t_0} \mathfrak{H} = E_t \mathfrak{H}$. Wählen wir $\delta > 0$ so, daß $\gamma - (2\delta + \delta^2)\|G\| > 0$ ausfällt, dann folgt für alle $x \in \mathfrak{H}$ und t mit $\|E_t - E_{t_0}\| \leqq \delta$:

$$[E_t F_{t_0} x, E_t E_{t_0} x] \geqq [E_{t_0} x, E_{t_0} x] - 2\|E_t - E_{t_0}\| \, \|E_{t_0} x\|^2 \|G\| -$$
$$- \|E_t - E_{t_0}\|^2 \|E_{t_0} x\|^2 \|G\| \geqq \big(\gamma - (2\delta + \delta^2)\|G\|\big) \|E_{t_0} x\|^2,$$

im Widerspruch zu der Tatsache, daß in jeder Umgebung von t_0 ein t mit $E_t \mathfrak{H} \not\subset \mathfrak{P}_+$ liegt.

2. Wir betrachten zunächst allgemein die Schar L:

$$L(\lambda) = \lambda^N D_N + \lambda^{N-1} D_{N-1} + \cdots + \lambda D_1 + D_0$$

mit Operatoren $D_0, \ldots, D_N \in \mathfrak{R}$. Definitionsgemäß besteht das Spektrum $\sigma(L)$ der Schar L aus allen Punkten λ der komplexen Ebene, für die der Nullpunkt $z = 0$

ein Punkt des Spektrums des Operators $L(\lambda)$ ist; sein Komplement bildet die Resolventenmenge $\varrho(L)$.

Ist $z=0$ ein Eigenwert von $L(\lambda_0)$, d.h., besteht die Gleichung $L(\lambda_0)x^{(0)}=0$ mit einem Element $x^{(0)}\in\mathfrak{H}$, $x^{(0)}\neq 0$, so heißt λ_0 ein Eigenwert der Schar L und das Element $x^{(0)}$ ein Eigenelement zu diesem Eigenwert; der von allen solchen Eigenelementen gebildete Teilraum heißt der zu λ_0 gehörige Eigenraum. Die Menge der Eigenwerte der Schar L bezeichnen wir mit $\sigma_p(L)$.

Ist $\lambda_0\in\sigma_p(L)$ und genügen die Elemente $x^{(0)}\neq 0, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ den Gleichungen

$$L(\lambda_0)x^{(\varkappa)}+\frac{1}{1!}\frac{\partial L(\lambda_0)}{\partial\lambda_0}x^{(\varkappa-1)}+\dots+\frac{1}{\varkappa!}\frac{\partial^\varkappa L(\lambda_0)}{\partial\lambda_0^\varkappa}x^{(0)}=0, \qquad \varkappa=0,1,\dots,k,$$

so bilden sie definitionsgemäß eine Jordansche Kette zum Eigenwert λ_0.

Wir setzen jetzt $D_N=I$ voraus. Dann ordnet man ([7], vergl. auch [4], [10]) der Schar L den Operator

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix} -D_{N-1} & -D_{N-2} & \dots & -D_1 & -D_0 \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

im Produktraum $\mathbf{\mathfrak{H}}=\mathfrak{H}^{(1)}\oplus\mathfrak{H}^{(2)}\oplus\dots\oplus\mathfrak{H}^{(N)}$ mit $\mathfrak{H}^{(1)}=\mathfrak{H}^{(2)}=\dots=\mathfrak{H}^{(N)}=\mathfrak{H}$ zu. Bekanntlich gilt dabei

$$\sigma(L)=\sigma(\mathbf{L}), \quad \sigma_p(L)=\sigma_p(\mathbf{L}), \tag{5}$$

und die zu einem Eigenwert λ_0 gehörenden Jordanschen Ketten von L und $\mathbf{L}$ entsprechen einander eineindeutig; insbesondere besteht zwischen den Eigenelementen $x^{(0)}\in\mathfrak{H}$ und $\mathbf{x}^{(0)}\in\mathbf{\mathfrak{H}}$ von L bzw. $\mathbf{L}$ der Zusammenhang

$$\mathbf{x}^{(0)}=\begin{pmatrix} \lambda_0^{N-1}x^{(0)} \\ \vdots \\ \lambda_0 x^{(0)} \\ x^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Die Resolvente $(\mathbf{L}-\lambda\mathbf{I})^{-1}$ gestattet für $\lambda\in\varrho(\mathbf{L})=\varrho(L)$ die Matrixdarstellung

$$(\mathbf{L}-\lambda\mathbf{I})^{-1}=\left(R_{ij}(\lambda)\right)_{i,j=1,\dots,N} \tag{6}$$

mit

$$R_{ij}(\lambda)=-\lambda^{N-i}L^{-1}(\lambda)\sum_{m=1}^{j}D_{N-m+1}\lambda^{j-m}+\dots, \qquad i,j=1,2,\dots,N, \tag{7}$$

wobei $D_N=I$ gesetzt wurde und die nicht aufgeschriebenen Summanden Polynome in λ sind.

Sind die Operatoren $D_0, D_1, \dots, D_{N-1}$ selbstadjungiert, so überzeugt man sich leicht davon, daß der Operator $\mathbf{L}$ für den selbstadjungierten und beschränkt invertierbaren Operator

$$\mathbf{G}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & I \\ 0 & 0 & \dots & I & D_{N-1} \\ 0 & 0 & . \cdot & D_{N-1} & D_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots \\ 0 & I & D_{N-1} & \cdot & \\ I & D_{N-1} & D_{N-2} & \dots & D_1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{G}$-selbstadjungiert ist.

Setzen wir für ein reelles λ und $x \in \mathfrak{H}$

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} \lambda^{N-1}x \\ \vdots \\ \lambda x \\ x \end{pmatrix},$$

so ergibt sich für das $\mathbf{G}$-Skalarprodukt (3) leicht

$$[\mathbf{x}, \mathbf{x}]=(L'(\lambda)x, x). \tag{8}$$

3. Neben der Schar L betrachten wir entsprechend wie in [4], [5], [6] die Operatorengleichung

$$L(Z) \equiv D_N Z^N + D_{N-1} Z^{N-1} + \dots + D_1 Z + D_0 = 0.$$

Ist $Z \in \mathfrak{R}$ eine Lösung dieser Gleichung, so ist offensichtlich jedes Eigenelement von Z auch ein Eigenelement von L zu demselben Eigenwert. Man kann zeigen, daß dies für Jordansche Ketten von Z ebenfals zutrifft. Außerdem sieht man leicht, daß auch jeder approximative Eigenwert von Z[4] zu $\sigma(L)$ gehört.

Es sei von jetzt an stets $D_N = I$ vorausgesetzt. Wie in [4], [5] erhalten wir eine Lösung Z von (2) mit Hilfe des folgenden

Lemma 2. *Ist $\mathfrak{E}$ ein invarianter Teilraum von* $\mathbf{L}$ *der Gestalt*

$$\mathfrak{E}=\left\{\begin{pmatrix} Z^{(N-1)}x \\ \vdots \\ Z^{(1)}x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathfrak{H}\right\} \quad \text{mit} \quad Z^{(1)}, \dots, Z^{(N-1)} \in \mathfrak{R},$$

so gilt $Z^{(j)}=(Z^{(1)})^j$, $j = 1, 2, \dots, N-1$, und der Operator $Z=Z^{(1)}$ bildet eine Lösung

[4] Die komplexe Zahl λ heißt ein approximativer Eigenwert von Z, wenn eine Folge (x_n) mit $\|x_n\|=1$ und $Zx_n-\lambda x_n \to 0$ existiert.

der Gleichung (2). *Ist umgekehrt* $Z \in \mathfrak{R}$ *eine Lösung von* (2), *so läßt* $\mathbf{L}$ *den Teilraum*

$$\mathfrak{E}_Z = \left\{ \begin{pmatrix} Z^{N-1}x \\ \vdots \\ Zx \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathfrak{H} \right\}$$

invariant; dabei gilt $\sigma(Z) = \sigma(\mathbf{L}|\mathfrak{E}_Z)$.

Der einfache Beweis der ersten Aussagen dieses Lemmas kann dem Leser überlassen werden. Zum Beweis der Aussage über das Spektrum beachten wir die Beziehung

$$\mathbf{L} \begin{pmatrix} Z^{N-1}x \\ \vdots \\ Zx \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z^{N}x \\ \vdots \\ Z^2x \\ Zx \end{pmatrix},$$

somit sind die Gleichungen

$$\mathbf{L} \begin{pmatrix} Z^{N-1}x \\ \vdots \\ Zx \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z^{N-1}y \\ \vdots \\ Zy \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Zx = y$$

äquivalent, woraus leicht die Behauptung folgt.

Wir ergänzen diese Betrachtungen über die Wurzeln von (2) durch ein Lemma, das jedoch im folgenden nicht benötigt wird.

Jede Lösung Z von (2) erzeugt eine Darstellung von L in der Form $L(\lambda) = L_Z(\lambda)(\lambda I - Z)$ mit der Schar

$$L_Z(\lambda) = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda^{N-j-1} \Big(\sum_{k=0}^{j} D_{N-k} Z^{j-k} \Big), \quad D_N = I,$$

vom Grade $N-1$. Weiter bezeichne $\bar{L}_Z$ die Schar $\bar{L}_Z(\lambda) = L_Z^*(\bar{\lambda})$.

Lemma 3. *Ist* $Z \in \mathfrak{R}$ *eine Lösung von* (2), *so ist der der Schar* $\bar{L}_Z$ *zugeordnete Operator* $\mathbf{L}_Z$ *im Raume* $\mathfrak{H}^{N-1}$ *der Einschränkung von* $\mathbf{L}$ *auf das* $\mathbf{G}$*-orthogonale Komplement* $\mathfrak{E}_Z^{[\perp]}$ *von* $\mathfrak{E}_Z$ *isomorph.*[5] *Insbesondere gilt also*

$$\sigma(\bar{L}_Z) = \sigma(\mathbf{L}|\mathfrak{E}_Z^{[\perp]}).$$

[5] D. h., es gibt eine eineindeutige und in beiden Richtungen stetige Abbildung von $\mathfrak{H}^{N-1}$ auf $\mathfrak{E}_Z$, die $\bar{\mathbf{L}}_Z$ in $\mathbf{L}|\mathfrak{E}_Z$ überführt.

Beweis. Der Teilraum $\mathfrak{E}_Z^{[\perp]}$ ist offensichtlich invariant bezüglich $\mathbf{L}$. Man überzeugt sich unmittelbar davon, daß er aus allen Elementen von $\mathfrak{H}$ der Form

$$\begin{pmatrix} -\sum\limits_{j=1}^{N-1}\left(\sum\limits_{k=0}^{j} Z^{*j-k} D_{N-k}\right) x_{N-j-1} \\ x_{N-2} \\ \vdots \\ x_0 \end{pmatrix}, \quad x_0, x_1, \ldots, x_{N-2} \in \mathfrak{H},$$

besteht ($D_N = I$). Für zwei solche Elemente ist die Beziehung

$$\mathbf{L}\begin{pmatrix} \cdots \\ x_{N-2} \\ \vdots \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ y_{N-2} \\ \vdots \\ y_0 \end{pmatrix}$$

äquivalent den folgenden $N-1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{j} Z^{*j-k} D_{N-k}\right) x_{N-j-1} &= y_{N-2}, \\ x_{N-2} &= y_{N-3}, \\ &\vdots \\ x_1 &= y_0. \end{aligned}$$

Daraus folgt leicht die Behauptung.

4. Hauptergebnis dieser Mitteilung ist der

Satz 1. *Die Schar L: $L(\lambda) = \lambda^N I + \lambda^{N-1} D_{N-1} + \cdots + \lambda D_1 + D_0$ genüge der folgenden Bedingung: Es existiert ein Intervall $[\lambda_1, \lambda_2]$ der reellen Achse mit $L(\lambda_1) \ll 0$, $L(\lambda_2) \gg 0$ und $\dfrac{\partial L(\lambda)}{\partial \lambda} \gg 0$ für alle $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Dann gibt es einen Operator $Z \in \mathfrak{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1) $L(Z) = 0$;
2) *Z ist ähnlich zu einem selbstadjungierten Operator*;
3) $\sigma(Z) = \sigma(L) \cap [\lambda_1, \lambda_2]$, $\sigma_p(Z) = \sigma_p(L) \cap [\lambda_1, \lambda_2]$, *und die zu einem solchen Eigenwert gehörenden Eigenelemente von Z und L stimmen überein.*

Der Operator Z ist durch die Eigenschaft 1) *und die erste Gleichung von* 3) *eindeutig bestimmt.*

Folgerung. *Ist $\sigma(L) \cap [\lambda_1, \lambda_2]$ eine höchstens abzählbare Menge, so gibt es eine Rieszsche Basis von $\mathfrak{H}$, die aus Eigenelementen von L zu Eigenwerten in $[\lambda_1, \lambda_2]$ besteht; diese Eigenwerte bilden dann zusammen mit ihren Häufungspunkten die Menge $\sigma(L) \cap [\lambda_1, \lambda_2]$, ihre Eigenräume werden von Elementen der Basis aufgespannt.*

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir im Beweis des Satzes $0 \leqq \lambda_1 \leqq \leqq \lambda_2 < \infty$ voraus. Wir wählen einen Punkt $\alpha \in (\lambda_1, \lambda_2)$ und betrachten neben der Schar L die Scharen L_t:

$$L_t(\lambda) = L(\lambda) + (t-1) L(\alpha), \qquad 0 \leqq t \leqq 1.$$

Offensichtlich gilt $\dfrac{\partial L_t(\lambda)}{\partial \lambda} = \dfrac{\partial L(\lambda)}{\partial \lambda}$, und die Scharen L_t genügen bezüglich $[\lambda_1, \lambda_2]$ denselben Voraussetzungen wie die Schar L.

Im Verlauf des Beweises des Satzes formulieren wir einige Lemmata; dabei seien stets die im Satz über die Schar L getroffenen Voraussetzungen erfüllt.

Lemma 4. *Es gibt eine Umgebung* $\mathfrak{A}$ *von* $[\lambda_1, \lambda_2]$ *mit*

$$\mathfrak{A} \setminus [\lambda_1, \lambda_2] \subset \varrho(L_t) \quad \textit{für} \quad 0 \leqq t \leqq 1.$$

Beweis. Offensichtlich gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $t \in [0, 1]$ folgendes gilt:

$$L_t(\lambda) \ll 0 \quad \text{für} \quad \lambda \in [\lambda_1 - \delta, \lambda_1],$$

$$L_t(\lambda) \gg 0 \quad \text{für} \quad \lambda \in [\lambda_2, \lambda_2 + \delta],$$

$$L'(\lambda) \gg 0 \quad \text{für} \quad \lambda \in [\lambda_1 - \delta, \lambda_2 + \delta].$$

Für $\lambda = \tau + i\varepsilon$, $\tau \in [\lambda_1 - \delta, \lambda_2 + \delta]$, gilt dann

$$L_t(\lambda) = L_t(\tau) + i\varepsilon L'(\tau) + \varepsilon^2 O(1) \qquad (\varepsilon \to 0),$$

wobei das Glied $O(1)$ für $t \in [0, 1]$ gleichmäßig beschränkt ist. Deshalb hat für $|\varepsilon|$ hinreichend klein einer der Operatoren $\pm L_t(\lambda)$ einen streng positiven Imaginärteil, ist also beschränkt invertierbar.

Wir wählen jetzt $\eta > 0$ so, daß der durch die Eckpunkte $\lambda_1 - i\eta \ldots \lambda_2 - i\eta \ldots \ldots \lambda_2 + i\eta \ldots \lambda_1 + i\eta \ldots \lambda_1 - i\eta$ definierte orientierte Streckenzug $\mathfrak{C}$ ganz in der Umgebung $\mathfrak{A}$ aus Lemma 4 verläuft. Weiter sei

$$K_t^{(j)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \lambda^j L_t^{-1}(\lambda)\, d\lambda, \quad j = 0, \pm 1, \ldots.$$

Auf Grund der Beziehung (5) und Lemma 4 ist $\sigma(L_t) \cap [\lambda_1, \lambda_2]$ eine Spektralmenge für den gemäß (4) gebildeten Operator $\mathbf{L}_t$ und der zugehörige Rieszsche Projektor $\mathbf{E}_t$ gestattet die Matrixdarstellung

$$\text{(9)} \qquad \mathbf{E}_t = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} (\mathbf{L}_t - \lambda \mathbf{I})^{-1}\, d\lambda = \begin{pmatrix} K_t^{(N-1)} & \ldots \\ \vdots & \\ K_t^{(1)} & \ldots \\ K_t^{(0)} & \ldots \end{pmatrix};$$

wir vermerken noch die später benötige Beziehung

$$(10)\qquad \mathbf{L}_t^j\mathbf{E}_t = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \lambda^j(\mathbf{L}_t-\lambda\mathbf{I})^{-1}\,d\lambda = \begin{pmatrix} K_t^{(N+j-1)} & \dots \\ \vdots & \\ K_t^{(j+1)} & \dots \\ K_t^{(j)} & \dots \end{pmatrix}, \quad j=0,\pm 1,\dots$$

Gemäß der Aussage 1° von Abschnitt 1 ist der Operator $\mathbf{E}_t$ G-selbstadjungiert. Der Wertebereich von $\mathbf{E}_0$ besteht aus allen $\mathbf{x}\in\mathfrak{H}$ der Gestalt

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} \alpha^{N-1}x \\ \vdots \\ \alpha x \\ x \end{pmatrix}, \quad x\in\mathfrak{H}.$$

Um das zu sehen, beachten wir die für alle λ aus einer hinreichend kleinen Umgebung von $\lambda=\alpha$ bestehende Beziehung

$$L^{-1}(\lambda)=\frac{1}{\lambda-\alpha}L'^{-1}(\alpha)+\dots,$$

wobei die nicht aufgeschriebenen Summanden holomorph von λ abhängen. Aus (6) und (7) folgt dann leicht die Behauptung.

Auf Grund der Beziehung (8) ist der Teilraum $\mathbf{E}_0\mathfrak{H}$ G-positiv. Da $\mathbf{E}_t$ in der gleichmäßigen Operatorentopologie für $0\leqq t\leqq 1$ analytisch von t abhängt, ist gemäß Lemma 1 auch $\mathbf{E}_t\mathfrak{H}$, $0\leqq t\leqq 1$, ein streng G-positiver Teilraum, also ein Hilbertraum für das G-Skalarprodukt. In diesem Hilbertraum ist $\mathbf{L}_t$ G-selbstadjungiert, und es gilt $\sigma(\mathbf{L}_t|\mathbf{E}_t\mathfrak{H})\subset[\lambda_1,\lambda_2]$. Für beliebiges $\mathbf{x}\in\mathfrak{H}$ gilt also

$$[\mathbf{E}_t\mathbf{x},\mathbf{x}]\geqq 0,\quad \lambda_1[\mathbf{L}_t^{j-1}\mathbf{E}_t\mathbf{x},\mathbf{x}]\leqq[\mathbf{L}_t^j\mathbf{E}_t\mathbf{x},\mathbf{x}]\leqq\lambda_2[\mathbf{L}_t^{j-1}\mathbf{E}_t\mathbf{x},\mathbf{x}].$$

Wenden wir diese Beziehungen auf die Elemente

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x\in\mathfrak{H},$$

an, so ergibt sich bei Beachtung von (10)

$$(11)\qquad K_t^{(0)}\geqq 0;\quad \lambda_1 K_t^{(j-1)}\leqq K_t^{(j)}\leqq\lambda_2 K_t^{(j-1)},\qquad j=0,\pm 1,\pm 2,\dots.$$

Lemma 5. *Es gilt* $K_t^{(0)}\gg 0$ $(0\leqq t\leqq 1)$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß der Nullpunkt nicht zu $\sigma(K_t^{(0)})$ gehört. Zuerst überlegen wir uns, daß der Nullpunkt kein Eigenwert von $K_t^{(0)}$ ist. Aus $K_t^{(0)}x_0=0$,

$x_0 \neq 0$, folgt gemäß (11) $K_t^{(j)} x_0 = 0$ für $j = 1, 2, \ldots$, also ist dann auf Grund von (9) auch $\mathbf{E}_t \mathbf{x}_0 = 0$ für $\mathbf{x}_0 = (x_j)$ mit $x_1 = x_0, x_2 = x_3 = \cdots = x_N = 0$. Somit läßt sich $(\mathbf{L}_t - \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{x}_0$ auf ganz $\mathfrak{A}$ holomorph fortsetzen, insbesondere gestattet auch $L_t^{-1}(\lambda) x_0$ eine solche Fortsetzung. Wir bezeichnen sie mit $y(\lambda)$. Für $\varphi(\lambda) = (y(\lambda), x_0)$ gilt dann $\varphi(\lambda_1) < 0$, $\varphi(\lambda_2) > 0$, andererseits ist aber für Punkte $\lambda \neq \bar{\lambda}$, $\lambda \in \mathfrak{A}$,

$$\varphi'(\lambda) = -(L_t^{-1}(\lambda) L_t'(\lambda) L_t^{-1}(\lambda) x_0, x_0) = -(L_t'(\lambda) y(\lambda), y(\bar{\lambda})),$$

also auch $\varphi'(\lambda) \leqq 0$ für $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$.

Um zu zeigen, daß $K_t^{(0)}$ sogar streng positiv ist, führen wir gemäß [11] einen Hilbertraum $\tilde{\mathfrak{H}}$ in folgender Weise ein: Die lineare Menge $\mathfrak{L}$ aller beschränkten Folgen $(x^{(n)})$ von Elementen aus $\mathfrak{H}$ versehen wir mit dem Skalarprodukt

$$((x^{(n)}), (y^{(n)})) = \operatorname*{LIM}_n (x^{(n)}, y^{(n)}),$$

wobei $\operatorname*{LIM}_n$ einen beliebigen, im folgenden festgehaltenen Banachlimes bezeichnet, bilden den Faktorraum nach $\mathfrak{L}_0 = \{(x^{(n)}) \in \mathfrak{L} : ((x^{(n)}), (x^{(n)})) = 0\}$ und vervollständigen diesen. Für einen beschränkten linearen Operator A in $\mathfrak{H}$ bezeichne $\tilde{A}$ den durch die Festsetzung

$$\tilde{A}(x^{(n)}) = (Ax^{(n)})$$

in $\tilde{\mathfrak{H}}$ induzierten Operator. Dann gilt für $A, A_j \in \mathfrak{R}$, $j = 1, 2, \ldots : \widetilde{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2} = \alpha_1 \tilde{A}_1 + \alpha_2 \tilde{A}_2$, $\widetilde{A^{-1}} = \tilde{A}^{-1}$ falls $0 \in \varrho(A)$, $\sigma(A) = \sigma_p(\tilde{A})$ falls $A = A^*$, und für eine bezüglich der Operatorennorm gegen A konvergente Folge (A_j) konvergiert auch $(\tilde{A}_j)$ bezüglich der Operatorennorm in $\tilde{\mathfrak{H}}$ gegen $\tilde{A}$.

Die Schar $\tilde{L}_t : \tilde{L}_t(\lambda) = \tilde{L}(\lambda) + (t-1)\tilde{L}(\alpha)$ in $\tilde{\mathfrak{H}}$ genügt denselben Voraussetzungen wie L_t in $\mathfrak{H}$, und es ist gemäß den oben vermerkten Regeln für den Übergang $A \to \tilde{A}$

$$\widetilde{K_t^{(0)}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \tilde{L}_t^{-1}(\lambda) \, d\lambda.$$

Nach dem ersten Teil des Beweises gilt folglich $0 \notin \sigma_p(\widetilde{K_t^{(0)}})$, d.h. $0 \notin \sigma(K_t^{(0)})$. Damit ist das Lemma bewiesen.

Wir untersuchen den Teilraum $\mathbf{E}_t \mathfrak{H}$ genauer. Zunächst gibt es für hinreichend kleine t Operatoren $\mathbf{T}_t$, die $\mathbf{E}_0 \mathfrak{H}$ eineindeutig und stetig auf $\mathbf{E}_t \mathfrak{H}$ abbilden und zusammen mit ihrer Inversen stetig (bezüglich der gleichmäßigen Operatorentopologie) von t abhängen. Wir setzen

$$\mathfrak{H}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} : \quad x \in \mathfrak{H} \right\}$$

und betrachten den Teilraum $\overset{-1}{\mathbf{T}}_t\mathbf{E}_t\mathfrak{H}_1$. Für $t=0$ gilt $\overset{-1}{\mathbf{T}}_0\mathbf{E}_0\mathfrak{H}_1=\mathbf{E}_0\mathfrak{H}$. Dann bildet aber $\overset{-1}{\mathbf{T}}_t\mathbf{E}_t$ auch für hinreichend kleine t den Teilraum $\mathfrak{H}_1$ eineindeutig auf $\mathbf{E}_0\mathfrak{H}$ ab, d.h., es gilt

$$\overset{-1}{\mathbf{T}}_t\mathbf{E}_t\mathfrak{H}_1=\mathbf{E}_0\mathfrak{H} \quad \text{oder} \quad \mathbf{E}_t\mathfrak{H}_1=\mathbf{T}_t\mathbf{E}_0\mathfrak{H}=\mathbf{E}_t\mathfrak{H}.$$

Für die betrachteten t läßt sich $\mathbf{E}_t\mathfrak{H}$ also in der Form

$$\mathbf{E}_t\mathfrak{H}=\left\{\begin{pmatrix} K_t^{(N-1)}x \\ \vdots \\ K_t^{(1)}x \\ K_t^{(0)}x \end{pmatrix}:\quad x\in\mathfrak{H}\right\}$$

schreiben. Auf Grund von Lemma 5 folgt daraus mit $Z_t^{(j)}=K_t^{(j)}(K_t^{(0)})^{-1}$:

$$\mathbf{E}_t\mathfrak{H}=\left\{\begin{pmatrix} Z_t^{(N-1)}x \\ \vdots \\ Z_t^{(1)}x \\ x \end{pmatrix}:\quad x\in\mathfrak{H}\right\}.$$

Anwendung von Lemma 2 ergibt mit $Z_t=Z_t^{(1)}:Z_t^{(j)}=Z_t^j$ und

(12) $$L_t(Z_t)=0$$

für alle hinreichend kleinen t. Nun hängen sowohl der Operator Z_t als auch die Koeffizienten der Schar L_t für $0\leqq t\leqq 1$ analytisch von t ab. Deshalb besteht die Beziehung (12) auch für $t=1$, d.h., der Operator

$$Z=K_1^{(1)}(K_1^{(0)})^{-1}$$

genügt der Gleichung (2). Offensichtlich ist Z von links symmetrisierbar durch den streng positiven Operator $(K_1^{(0)})^{-1}$. Damit sind die ersten beiden Aussagen des Satzes bewiesen. Die erste Beziehung der Aussage 3) ergibt sich aus den Gleichungen (beachte Lemma 2)

$$\sigma(Z)=\sigma(\mathbf{L}|\mathbf{E}_1\mathfrak{H})=\sigma(\mathbf{L})\cap[\lambda_1,\lambda_2]=\sigma(L)\cap[\lambda_1,\lambda_2];$$

die Beweise der übrigen Aussagen von 3) überlassen wir dem Leser.

Genügt Z' der Gleichung $L(Z')=0$ und gilt $\sigma(Z')\subset[\lambda_1,\lambda_2]$, so ist der Teilraum $\mathfrak{E}_{Z'}$ invariant unter $\mathbf{L}$ und es gilt $\sigma(\mathbf{L}|\mathfrak{E}_{Z'})\subset[\lambda_1,\lambda_2]$. Daraus folgt $\mathfrak{E}_{Z'}\subset\mathfrak{E}_Z$, woraus sich leicht $Z=Z'$ ergibt. Damit ist Satz 1 bewiesen.

5. Aus Satz 1 folgern wir jetzt ohne Schwierigkeit den

Satz 2. *Gegeben sei die Schar*

(13) $$M(\mu)=A-\mu I-\mu^2 B(\mu),\quad B(\mu)=\sum_{j=2}^{N}\mu^{j-2}B_j$$

mit einem Operator $A \in \mathfrak{R}$, $A \geqq 0$ *und einem Operatorpolynom* $B(\mu)$, *das für* $\mu \geqq 0$ *zusammen mit seiner Ableitung* $B'(\mu)$ *nichtnegative Werte (in* $\mathfrak{R}$*) annimmt. Dann gibt es einen Operator* $Y \in \mathfrak{R}$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

1) $M(Y)=0$;
2) Y *ist ähnlich zu einem selbstadjungierten Operator*;
3) $\sigma(Y) = \sigma(M) \cap [0, \infty)$, $\sigma_p(Y) = \sigma_p(M) \cap [0, \infty)$, *und die zu einem solchen Eigenwert gehörenden Eigenelemente von* Y *und* M *stimmen überein.*

Folgerung. *Ist* $\sigma(M) \cap [0, \infty)$ *eine höchstens abzählbare Menge, so gibt es eine Rieszsche Basis von* $\mathfrak{H}$, *die aus Eigenelementen von* M *zu Eigenwerten in* $[0, \infty)$ *besteht; diese Eigenwerte bilden zusammen mit ihren Häufungspunkten die Menge* $\sigma(M) \cap [0, \infty)$, *ihre Eigenräume werden von Elementen dieser Basis aufgespannt.*

Beweis. Aus der Gestalt der Schar M ersieht man leicht, daß Zahlen μ_1, μ_2 und η mit $\mu_1 < 0$; $\|A\| < \mu_2 < \eta$ so gewählt werden können, daß

$$M(\mu_1) \gg 0, \quad M(\mu_2) \ll 0$$

und

$$N \frac{\eta}{\eta - \mu} M(\mu) + \eta M'(\mu) \ll 0 \quad \text{für} \quad \mu_1 \leqq \mu \leqq \mu_2 \tag{14}$$

gilt. Wir betrachten die Schar

$$L(\lambda) = -(1+\lambda)^N F^{-1/2} M\left(\frac{\eta\lambda}{1+\lambda}\right) F^{-1/2} \quad \text{mit} \quad F = -M(\eta).$$

Dann gilt für $\lambda_i = \dfrac{\mu_i}{\eta - \mu_i}$, $i = 1, 2$,

$$L(\lambda_1) = -(1+\lambda_1)^N F^{-1/2} M(\mu_1) F^{-1/2} \ll 0;$$

$$L(\lambda_2) = -(1+\lambda_2)^N F^{-1/2} M(\mu_2) F^{-1/2} \gg 0;$$

$$L'(\lambda) = -(1+\lambda)^{N-2} F^{-1/2} \left[N(1+\lambda) M\left(\frac{\eta\lambda}{1+\lambda}\right) + \eta M'\left(\frac{\eta\lambda}{1+\lambda}\right)\right] F^{-1/2}.$$

Durchläuft λ das Intervall $[\lambda_1, \lambda_2]$, so ist $1+\lambda = \dfrac{\eta}{\eta - \mu}$ stets positiv, und für den Ausdruck in der eckigen Klammer auf der rechten Seite ergibt sich mit $\mu = \dfrac{\eta\lambda}{1+\lambda}$:

$$N \frac{\eta}{\eta - \mu} M(\mu) + \eta M'(\mu), \quad \mu_1 \leqq \mu \leqq \mu_2,$$

also ist $L'(\lambda)$ auf $[\lambda_1, \lambda_2]$ wegen (14) streng positiv. Schließlich ist der Koeffizient von λ^N die identische Abbildung.

Die Schar L genügt also allen Voraussetzungen von Satz 1. Daraus folgt die Existenz eines Operators Z mit $L(Z)=0$ und $\sigma(Z)\subset[\lambda_1, \lambda_2]$. Wegen $-1<\lambda_1$ existiert der Operator $(I+Z)^{-1}\in\mathfrak{R}$, und man überzeugt sich leicht davon, daß

$$Y=\eta F^{-1/2}Z(I+Z)^{-1}F^{1/2}$$

die im Satz genannten Eigenschaften hat.

Bemerkung. *Hat A aus* (13) *die Gestalt $A = aI+A_1$ mit $a\geqq 0$ und einem vollstetigen Operator A_1, so ist das Spektrum von Y im Intervall (a, ∞) diskret; insbesondere zieht die Vollstetigkeit von A stets die Vollstetigkeit von Y nach sich.*

Zum Beweis dieser Aussage genügt es zu zeigen, daß für $\lambda>a$ und jede beschränkte Folge (x_n) mit $(Y-\lambda I)x_n \to 0$ (stark), $x_n\to 0$ (schwach) für $n\to\infty$ auch $\|x_n\|\to 0$ folgt. Aus den Voraussetzungen ergibt sich aber

$$(a-\lambda)\|x_n\|^2-\lambda^2(B(\lambda)x_n, x_n) \to 0,$$

woraus leicht die Behauptung folgt.

Literatur

[1] R. E. L. Turner, A class of nonlinear eigenvalue problems, *J. Functional Analysis*, **2** (1968), 297—322.

[2] A. S. Markus und G. I. Russu, Über die Basis aus den Eigenvektoren einer selbstadjungierten polynomialen Schar, *Mat. Issled. Kišinev*, **VI**: **1 (19)** (1971), 114—125. [Russisch]

[3] M. G. Kreĭn und H. Langer, Zur Theorie quadratischer Scharen selbstadjungierter Operatoren, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **154** (6) (1964), 1258—1261. [Russisch]

[4] M. G. Kreĭn und H. Langer, Über einige mathematische Prinzipe der linearen Theorie gedämpfter Schwingungen der Kontinua, *Arbeiten des Internationalen Symposiums über die Anwendungen der Funktionentheorie in der Kontinuumsmechanik*, Tbilissi 1963, Band II, 283—322 (Moskau, 1965). [Russisch]

[5] H. Langer, *Spektraltheorie linearer Operatoren in J-Räumen und einige Anwendungen auf die Schar $L(\lambda) = \lambda^2 I+\lambda B+C$*, Habilitationsschrift Techn. Universität Dresden, 1965.

[6] H. Langer, Über stark gedämpfte Scharen im Hilbertraum, *J. Math. Mech.*, **17** (7) (1968), 685—706.

[7] P. H. Müller, Zu einer Spektralbetrachtung von Atkinson und Sz.-Nagy., *Acta Sci. Math.*, **17** (1956), 195—197.

[8] H. Langer, Zur Spektraltheorie *J*-selbstadjungierter Operatoren, *Math. Ann.*, **146** (1962), 60—85.

[9] M. G. Kreĭn, Einführung in die Geometrie indefiniter J-Räume und die Theorie der Operatoren in diesen Räumen, *II. Math. Sommerschule der Akademie der Wissenschaften der USSR* (Kaciveli, 1964), 15—92 (Kiev, 1965). [Russisch]

[10] I. C. Gohberg und M. G. Kreĭn, *Einführung in die Theorie linearer nichtselbstadjungierter Operatoren* (Moskau, 1965). [Russisch]

[11] S. K. Berberian, Approximate proper vectors, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1) (1962), 111—114.

(Eingegangen am 8. Oktober 1971)