Eine Abschätzung des Maximums der Partialsummen von Orthogonalreihen

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

1. Es sei $\lambda(x)$ eine monoton wachsende Funktion mit $\lambda(1)\geqq 1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\lambda(x)=\infty$ und $\lambda(x)=O(\log^2 x)$. Wir bezeichnen mit Λ^* die Klasse der im Intervall (0, 1) orthonormierten Systeme $\varphi=\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$, für die

$$L_n(\varphi;x)=\int\limits_0^1\left|\sum_{k=1}^n \varphi_k(x)\varphi_k(t)\right|dt\leqq\lambda(n)\qquad (0\leqq x\leqq 1;\ n=1,2,\ldots)$$

erfüllt ist. Für eine Folge $a=\{a_n\}_1^\infty$ setzen wir

$$\|a;\lambda\|^*=\sup_{\varphi\in\Lambda^*}\int\limits_0^1\sup_{1\leqq i\leqq j}|a_i\varphi_i(x)+\cdots+a_j\varphi_j(x)|\,dx.$$

In dieser Note werden wir die folgenden Behauptungen beweisen. ($C_1, C_2, \ldots$ bezeichnen im Folgenden positive Konstanten.)

Satz I. *Es sei $\lambda(x)$ konkav von unten. Ist $|a_n|\geqq|a_{n+1}|$ $(n=1,2,\ldots)$, dann gilt*

$$C_1\left\{\sum_{n=1}^\infty a_n^2\lambda(n)\right\}^{1/2}\leqq\|a;\lambda\|^*. \tag{1}$$

Satz II. *Es sei $\lambda(x)$ konkav von unten mit $\lambda(n^2)\leqq C_2\lambda(n)$ $(n=1,2,\ldots)$. Dann gilt*

$$C_3\left\{\sum_{n=1}^\infty a_n^2\lambda\left(\sum_{k=1}^\infty a_k^2/a_n^2\right)\right\}^{1/2}\leqq\|a;\lambda\|^*.\ ^{1)} \tag{2}$$

Ähnliche Abschätzungen wurden für die Klasse Λ^* aller in (0, 1) orthonormierten Systeme, bzw. für die Klasse der in (0, 1) orthonormierten Systeme φ mit der Eigenschaft $|\varphi_n(x)|\leqq K$ $(K>1;\ 0\leqq x\leqq 1;\ n=1,2,\ldots)$ bewiesen ([2], [3], [4], [5]).

---

1) Im Falle $a_k=0$ soll man unter $a_n^2\lambda\left(\sum\limits_{k=1}^\infty a_k^2/a_n^2\right)$ 0 verstehen.

Es sei Λ die Klasse der im Intervall (0, 1) orthonormierten Systeme φ, für die

$$\int_0^1 \sup_n \frac{L_n(\varphi; x)}{\lambda(n)} dx \leqq 1$$

erfüllt ist. Für eine Folge a setzen wir

$$\|a; \lambda\| = \sup_{\varphi \in \Lambda} \int_0^1 \sup_{1 \leqq i \leqq j} |a_i \varphi_i(x) + \ldots + a_j \varphi_j(x)| \, dx.$$

Offensichtlich gilt für jede Folge a

$$\|a; \lambda\|^* \leqq \|a; \lambda\|. \tag{3}$$

Also ist Satz I die Verschärfung eines vorigen Resultates vom Verfasser ([4], Satz IV).

In [4] haben wir gezeigt, daß für jede Folge a

$$\|a; \lambda\| \leqq C_4 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda(n) \right\}^{1/2}$$

besteht. Daraus und aus (3) folgt, auf Grund des Satzes I, daß im Falle, wenn $\lambda(x)$ konkav ist und $|a_n| \geqq |a_{n+1}|$ $(n=1, 2, \ldots)$ besteht, man $\|a; \lambda\|$ und $\|a; \lambda\|^*$ genau abschätzen kann:

$$C_1 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda(n) \right\}^{1/2} \leqq \|a; \lambda\|, \quad \|a; \lambda\|^* \leqq C_4 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda(n) \right\}^{1/2}.$$

Ist $\lambda(x)$ konkav mit $\lambda(n^2) \leqq C_2 \lambda(n)$ $(n=1, 2, \ldots)$, und gilt $|a_n| \geqq |a_{n+1}|$ $(n=1, 2, \ldots)$, dann sind die Abschätzungen (1) und (2) gleichwertig. Das folgt aus den Ungleichungen

$$C_5 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 / a_n^2 \right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda(n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 / a_n^2 \right). \tag{4}$$

Zum Beweis von (4) kann man $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 1$ voraussetzen. Dann ist aber $n a_n^2 \leqq 1$ $(n=1, 2, \ldots)$, und so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda(n) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda(1/a_n^2)$$

offensichtlich. Es seien σ_1 und σ_2 die Mengen derjenigen Indizes n, für die $a_n^2 \geqq 1/n^2$, bzw. $a_n^2 < 1/n^2$ erfüllt ist. Durch einfache Rechnung erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda(1/a_n^2) = \sum_{n \in \sigma_1} a_n^2 \lambda(1/a_n^2) + \sum_{n \in \sigma_2} a_n^2 \lambda(1/a_n^2) \leqq$$

$$\leqq \sum_{n \in \sigma_1} a_n^2 \lambda(n^2) + C_6 \sum_{n \in \sigma_2} \frac{1}{n^{3/2}} a_n^{1/2} \log^2 (1/a_n^2) \leqq$$

$$\leqq C_7 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda(n) + C_8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \leqq C_9 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda(n).$$

Damit haben wir (4) bewiesen.

In [6] haben wir gezeigt, daß im Falle $\|a;\lambda\|=\infty$ ein System $\varphi\in\Lambda$ derart existiert, daß die Reihe

$$\sum a_n\varphi_n(x) \tag{5}$$

in (0, 1) fast überall divergiert.

Auf Grund von (3) bekommen wir aus Satz I, bzw. aus Satz II:

Folgerung I. *Es sei $\lambda(x)$ konkav von unten. Gelten $|a_n|\geqq|a_{n+1}|$ $(n=1,2,\ldots)$ und*

$$\sum a_n^2\lambda(n)=\infty,$$

dann gibt es $\varphi\in\Lambda$ derart, daß die Reihe (2) *in* (0, 1) *fast überall divergiert.*

Folgerung II. *Es sei $\lambda(x)$ konkav von unten, mit $\lambda(n^2)\leqq C_2\lambda(n)$ $(n=1,2,\ldots)$. Gilt*

$$\sum a_n^2\lambda\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2/a_n^2\right)=\infty,$$

so gibt es ein System $\varphi\in\Lambda$ derart, daß die Reihe (5) *in* (0, 1) *fast überall divergiert.*

Bemerkung. Durch Anwendung der Methode in [4] kann man zeigen, daß Folgerungen I—II mit einem solchen System φ richtig sind, für welches

$$L_n(\varphi;x)=O(\lambda(n))\qquad(0\leqq x\leqq1)$$

besteht.

2. Zum Beweis der Sätze werden wir einige Hilfssätze benützen.

Hilfssatz I. ([1], S. 46—50.) *Für das Haarsche System $\chi=\{\chi_n(x)\}$ gilt*

$$L_n(\chi;x)\leqq1\qquad(0\leqq x\leqq1;\ n=1,2,\ldots).$$

Hilfssatz II. ([5], Hilfssatz XIV.) *Es seien $p(\geqq2)$, q natürliche Zahlen. Dann gibt es ein in* (0, 1) *orthonormiertes System von Treppenfunktionen $g_l(p,q;x)$ $(l=1,\ldots,2pq)$ mit den folgenden Eigenschaften. Es gilt*

$$\int_0^1\left|\sum_{l=1}^{n}g_l(p,q;x)g_l(p,q;t)\right|dt\leqq C_{10}\log^2p\qquad(0\leqq x\leqq1;\ n=1,\ldots,2pq;\ C_{10}\geqq1),$$

und es gibt eine einfache Menge $E(\subseteqq(0,1))$ mit $m(E)=\frac{1}{5}$ derart, daß für jedes $x\in E$ ein Index $m(x)(<2pq)$ existiert, mit $g_l(p,q;x)\geqq0$ $(l=1,\ldots,m(x))$ und

$$\sum_{l=1}^{m(x)}g_l(p,q;x)\geqq C_{11}\sqrt{2pq}\log p\,.$$

(Eine Funktion $f(x)$ in einem Intervall I wird eine Treppenfunktion genannt, wenn sie stückweise konstant ist. Eine Menge wird einfach genannt, wenn sie die Vereinigung endlichvieler Intervalle ist. In dieser Note bezeichnet $\log\alpha$ den Logarithmus mit der Basis 2.)

Es sei $\lambda(x)$ eine monoton wachsende, von unten konkave Funktion mit $\lambda(1)\geqq 1$, $\lim_{x\to\infty} \lambda(x)=\infty$ und

(6) $$\lambda(x)\leqq C_{12}\log^2 x \quad (C_{12}\geqq 1;\ x\geqq 2).$$

Wir werden eine Indexfolge $\{m_k\}$ definieren. Es sei $m_1=1$, und m_{k+1} sei die kleinste natürliche Zahl mit $\lambda(m_{k+1}) > 2\lambda(m_k+1)$ $(k=1, 2, \ldots)$. Wegen der Konkavität gilt

$$\frac{\lambda(2m_k)-\lambda(m_k+1)}{m_k-1}\leqq\frac{\lambda(m_k+1)-\lambda(m_1)}{m_k-m_1+1},$$

woraus

$$\lambda(2m_k)-\lambda(m_k+1)\leqq\frac{m_k-m_1}{m_k}\lambda(m_k+1)\leqq\lambda(m_k+1)$$

folgt. Nach der Definition von m_{k+1} gilt also $m_{k+1}>2m_k$ $(k\geqq 2)$. Daraus erhalten wir

$$C_{12}\log^2(m_{k+1}-m_k) > C_{12}\log^2 m_k \geqq \lambda(m_k) \qquad (k=2, 3, \ldots).$$

Ist k genügend groß $(k>k_0)$, dann gelten

$$\lambda(m_k)\leqq\lambda(m_k-1)+1, \quad \lambda(m_k)/C_{10}C_{12}\geqq 8,$$

und es gibt eine natürliche Zahl $\bar{q}_k$ mit $m_{k+1}-m_k > 2\bar{q}_k$ und

$$4C_{10}C_{12}\leqq\frac{\lambda(m_k)}{2}\leqq C_{10}C_{12}\log^2\left[\frac{m_{k+1}-m_k}{2\bar{q}_k}\right]\leqq\lambda(m_k).$$

($[\alpha]$ bezeichnet den ganzen Teil von α; die Konstanten sind in Hilfssatz II, bzw. in (6) definiert.) Es seien $n_0=1$, $n_k=m_{k+k_0}$, $q_k=\bar{q}_{k+k_0}$ $(k=1, 2, \ldots)$. Dann gelten

(7) $$n_{k+1}>2n_k \qquad (k=1, 2, \ldots),$$

(8) $$\lambda(n_{k+1})\leqq 7\lambda(n_k-1) \qquad (k=1, 2, \ldots),$$

(9) $$4C_{10}C_{12}\leqq\frac{\lambda(n_k)}{2}\leqq C_{10}C_{12}\log^2\left[\frac{n_{k+1}-n_k}{2q_k}\right]\leqq\lambda(n_k) \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Beweis des Satzes I. Für eine Folge $a=\{a_n\}_1^\infty$ und für eine natürliche Zahl N setzen wir $a(1, N)=\{a_1, \ldots, a_N, 0, \ldots\}$. Offensichtlich gilt

$$\|a(1, N); \lambda\|^* \leqq \|a(1, N+1); \lambda\|^* \to \|a; \lambda\|^* \qquad (N\to\infty).$$

So ist es genügend die Ungleichung

(10) $$C_1\left\{\sum_{n=1}^{n_{k_0}-1} a_n^2\lambda(n)\right\}^{1/2}\leqq\|a(1, n_{k_0}-1); \lambda\|^* \qquad (k_0=2, 3, \ldots)$$

zu beweisen. Weiterhin gilt $\|\{\pm a_n\}; \lambda\|^*=\|\{a_n\}; \lambda\|^*$ offensichtlich für jede Vorzeichensverteilung von a_n; also kann man $a_n\geqq 0$ $(n=1, 2, \ldots)$ annehmen.

Es sei also $k_0(\geqq 3)$ eine natürliche Zahl. Wir setzen

$$\varphi_n(1;x)=\chi_n(x) \qquad (n=1,\dots,n_2-1).$$

Dann gelten

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(1;x)\varphi_k(1;t)\right| dt \leqq 1 \leqq \lambda_n \qquad (0\leqq x\leqq 1;\, n=1,\dots,n_2-1), \tag{11}$$

$$\int_0^1 \sup_{1\leqq s\leqq t<n_2} |a_s\varphi_s(1;x)+\dots+a_t\varphi_t(1;x)|\,dx \geqq a_1 \geqq C_{13}\left\{\sum_{n=1}^{n_2-1} a_n^2\lambda(n)\right\}^{1/2}. \tag{12}$$

Weiterhin werden wir für jedes k $(2\leqq k\leqq k_0)$ ein in $(0,1)$ orthonormiertes System $\varphi_l(k;x)$ $(l=n_k,\dots,n_{k+1}-1)$ derart definieren, daß für jedes k gilt:

$$\int_0^1 \left|\sum_{l=n_k}^{n} \varphi_l(k;x)\varphi_l(k;t)\right| dt \leqq \lambda_n \qquad (0\leqq x\leqq 1;\, n=n_k,\dots,n_{k+1}-1), \tag{13}$$

$$\int_0^1 \sup_{n_k\leqq s\leqq t<n_{k+1}} |a_s\varphi_s(k;x)+\dots+a_t\varphi_t(k;x)|\,dx \geqq C_{14}A_k, \tag{14}$$

mit

$$A_k=\left\{\sum_{i=1}^{c(k)}(n_k-n_{k-1})a^2_{n_k+i(n_k-n_{k-1})}\lambda(n_k)\right\}^{1/2}, \quad c(k)=\left[\frac{n_{k+1}-n_k}{n_k-n_{k-1}}\right].$$

Wir wenden zu diesem Zwecke den Hilfssatz II im Falle

$$p=\left[\frac{n_k-n_{k-1}}{2q_{k-1}}\right], \quad q=q_{k-1}$$

an. Die entsprechenden Funktionen bezeichnen wir mit $g_s(x)$ $(s=1,\dots,2pq)$. Dann gelten auf Grund des Hilfssatzes II und der Ungleichung (9)

$$\int_0^1 \left|\sum_{s=1}^{\sigma} g_s(x)g_s(t)\right| dt \leqq \lambda(n_k) \qquad (0\leqq x\leqq 1;\, s=1,\dots,2pq), \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sup_{1\leqq s\leqq t\leqq 2pq} |a_{n_k+(i-1)(n_k-n_{k-1})+s-1}g_s(x)+\dots+a_{n_k+(i-1)(n_k-n_{k-1})+t-1}g_t(x)|\,dx \geqq\\ \geqq C_{15}\sqrt{n_k-n_{k-1}}\,a_{n_k+i(n_k-n_{k-1})}\sqrt{\lambda(n_{k-1})} \qquad (i=1,\dots,c(k)).\end{aligned} \tag{16}$$

Es seien $s_0=0$, $s_i=\sum_{j=1}^{i} a^2_{n_k+j(n_k-n_{k-1})}\Big/2\sum_{j=1}^{c(k)} a^2_{n_k+j(n_k-n_{k-1})}$ $(i=1,\dots,c(k))$,

$s_{c+1}=1$ und $I_i=(s_{i-1},s_i)$ $(i=1,\dots,c+1)$. Wir setzen

$$\varphi_n(k;x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{m(I_i)}}\,g_{n-(n_k+(i-1)(n_k-n_{k-1}))+1}\left(\dfrac{x-s_{i-1}}{m(I_i)}\right), & x\in I_i,\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

$$(n_k+(i-1)(n_k-n_{k-1})\leqq n<n_k+(i-1)(n_k-n_{k-1})+2pq;\quad i=1,\dots,c(k)),$$

weiterhin seien die Funktionen $\varphi_n(k, x)$ $(n_k+(i-1)(n_k-n_{k-1})+2pq < n \leqq n_k+ +i(n_k-n_{k-1});\ i=1, \dots, c(k))$ der Reihe nach gleich den Funktionen

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\,\chi_n(2(x-1/2)), & x \in I_{c(k)+1}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad (n=1, 2, \dots)$$

Offensichtlich bilden die Funktionen $\varphi_k(k; x)$ $(l = n_k, \dots, n_{k+1}-1)$ ein orthonormiertes System in $(0, 1)$. Aus dem Hilfssatz I und aus (15), auf Grund der Definition der Funktionen ergibt sich:

$$\int_0^1 \left| \sum_{l=n_k}^{n} \varphi_l(k; x)\varphi_l(k; t) \right| dt \leqq \begin{cases} \lambda(n_k), & x \in \bigcup_{i=1}^{c(k)} I_i, \\ 1, & x \in I_{c(k)+1} \end{cases} \qquad (n_k \leqq n < n_{k+1}),$$

also ist (13) erfüllt. Weiterhin aus (8), (16) und aus der Definition der Funktionen erhalten wir durch eine einfache Rechnung:

$$\int_0^1 \sup_{n_k \leqq s \leqq t < n_{k+1}} |a_s \varphi_s(k; x) + \dots + a_t \varphi_t(k; x)|\, dx \geqq$$

$$\geqq \sum_{i=1}^{c(k)} \int_{I_i} \sup_{\substack{n_k+(i-1)(n_k-n_{k-1}) \leqq \\ \leqq s \leqq t \leqq n_k+(i-1)(n_k-n_{k-1})+2pq}} |a_s \varphi_s(k; x) + \dots + a_t \varphi_t(k; x)| dx \geqq$$

$$\geqq C_{15} \sum_{i=1}^{c(k)} \sqrt{n_k - n_{k-1}}\, a^2_{n_k+i(n_k-n_{k-1})} \sqrt{\lambda(n_{k-1})} \sqrt{m(I_i)} \geqq$$

$$\geqq C_{14} \left\{ \sum_{i=1}^{c(k)} (n_k - n_{k-1}) a^2_{n_k+i(n_k-n_{k-1})}) \lambda(n_k) \right\}^{1/2},$$

also ist (14) auch erfüllt.

Endlich definieren wir ein orthonormiertes System $\varphi = \{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ in $(0, 1)$. Es seien

$$\tilde{s}_0 = 0, \quad \tilde{s}_1 = \frac{1}{4}, \quad \tilde{s}_i = \frac{1}{4} + \sum_{k=2}^{i} A_k^2 / 2 \sum_{k=2}^{k_0-1} A_k^2 \quad (i=2, \dots, k_0-1), \quad \tilde{s}_{k_0} = 1,$$

und $\tilde{I}_k = (\tilde{s}_{k-1}, \tilde{s}_k)$ $(k=1, \dots, k_0)$. Wir setzen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{m(\tilde{I}_k)}} \varphi_n\left(k; \dfrac{x - \tilde{s}_{k-1}}{m(\tilde{I}_k)}\right), & x \in \tilde{I}_k, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(für $n_0 \leqq n < n_2$ im Falle $k=1$, und für $n_k \leqq n < n_{k+1}$ im Falle $k = 2, \dots, k_0-1$, und

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 2\chi_{n-n_{k_0}+1}(4(x-3/4)), & x \in \tilde{I}_{k_0}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad (n \geqq n_{k_0}).$$

Offensichtlich bilden die Funktionen $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ ein orthonormiertes System in $(0, 1)$. Aus Hilfssatz I, und aus (11), (13) bekommen wir durch einfache Rechnung, daß $\varphi \in \Lambda^*$ gilt. Aus (12) und (14) folgt weiterhin:

$$(17)\qquad \|a(1, n_{k_0}-1); \lambda\|^* \geqq \int_0^1 \sup_{1\leqq s\leqq t<n_{k_0}} |a_s\varphi_s(x)+\ldots+a_t\varphi_t(x)|\,dx \geqq$$

$$\geqq \int_{\tilde{I}_1} \sup_{n_0\leqq s\leqq t<n_2} |a_s\varphi_s(x)+\ldots+a_t\varphi_t(x)|\,dx +$$

$$+\sum_{k=2}^{k_0-1} \int_{\tilde{I}_k} \sup_{n_k\leqq s\leqq t<n_{k+1}} |a_s\varphi_s(x)+\ldots+a_t\varphi_t(x)|\,dx \geqq$$

$$\geqq C_{16}\sqrt{\sum_{n=1}^{n_2-1} a_n^2\lambda(n)} + C_{14}\sum_{k=2}^{k_0-1} \sqrt{m(\tilde{I}_k)}\cdot A_k \geqq C_{17}\left\{\sum_{n=1}^{n_2-1} a_n^2\lambda(n) + \sum_{k=2}^{k_0-1} A_k^2\right\}^{1/2}.$$

Wegen der Monotonität der Folge a und wegen (7), (8) ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{n_2-1} a_n^2\lambda(n) \geqq \sum_{n=n_1}^{n_2-1} a_n^2\lambda(n) \geqq C_{18}\sum_{n=n_2}^{n_2+(n_2-n_1)} a_n^2\lambda(n),$$

$$\sum_{n=n_k+(n_k-n_{k-1})}^{n_{k+1}-1} a_n^2\lambda(n) \leqq C_{19}A_k^2 \qquad (k=2, 3, \ldots),$$

$$\sum_{n=n_k}^{n_k+(n_k-n_{k-1})-1} a_n^2\lambda(n) \leqq \frac{1}{2}(n_k-n_{k-1})a_{n_k}^2\lambda(n_k) \leqq C_{20}A_{k-1}^2 \qquad (k=2, 3, \ldots).$$

Daraus und aus (17) bekommen wir die Abschätzung (10).

Beweis des Satzes II. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $a_n \geqq 0$ $(n=1, 2, \ldots)$ annehmen. Es sei $a=\{a_n\}_1^\infty$ eine Folge, und bezeichnen wir mit a_{ν_k} $(\nu_k<\nu_{k+1};\ k=1, 2, \ldots)$ die von 0 verschiedenen Glieder der Folge a. Für die Folge $\bar{a}=\{a_{\nu_k}\}_1^\infty$ gilt

$$(18)\qquad \|\bar{a}; \lambda\|^* \leqq \|a; \lambda\|^*.$$

Zum Beweis von (18) können wir $\|\bar{a}; \lambda\|^*=1$ voraussetzen. Es sei $\varepsilon>0$ beliebig. Dann gibt es ein System $\varphi \in \Lambda^*$ mit

$$(19)\qquad \|\bar{a}; \lambda\|^* - \frac{\varepsilon}{2} < \int_0^1 \sup_{1\leqq i\leqq j} |a_{\nu_i}\varphi_i(x)+\ldots+a_{\nu_j}\varphi_j(x)|\,dx.$$

Es sei $\eta>0$ derart gewählt, daß

$$(20)\qquad \left(1-\sqrt{1-\eta}\right)\int_0^1 \sup_{1\leqq i\leqq j} |a_{\nu_i}\varphi_i(x)+\ldots+a_{\nu_j}\varphi_j(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Indizes n mit $a_n=0$ bezeichnen wir der Reihe nach mit $\mu_1<\dots<\mu_k<\dots$. Wir setzen

$$\psi_{\nu_i}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-\eta}}\varphi_i\left(\dfrac{x}{1-\eta}\right), & 0<x<1-\eta,\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}\qquad (i=1,2,\dots),$$

$$\psi_{\mu_i}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\eta}}\chi_i\left(\dfrac{x-(1-\eta)}{\eta}\right), & 1-\eta<x<1,\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}\qquad (i=1,2,\dots).$$

Offensichtlich ist $\psi=\{\psi_n(x)\}_1^\infty$ ein orthonormiertes System in (0, 1), weiterhin gilt $\psi\in\Lambda^*$. Aus (19) und (20) folgt

$$\|\bar{a};\lambda\|^*-\varepsilon\leqq\int_0^1\sup_{1\leqq i\leqq j}|a_i\psi_i(x)+\dots+a_j\psi_j(x)|\,dx\leqq\|a;\lambda\|.^*$$

Da $\varepsilon>0$ beliebig ist, erhalten wir (18). Auf Grund von (18) können wir auch $a_n>0$ $(n=1,2,\dots)$ voraussetzen. Da offensichtlich

$$\sum_{n=1}^{n_{k_0}-1}a_n^2\lambda\left(\sum_{k=1}^{n_{k_0}-1}a_k^2/a_n^2\right)\to\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\lambda\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2/a_n^2\right)\quad(k_0\to\infty)$$

gilt, ist es genügend die Abschätzung

$$C_3\sum_{n=1}^{n_{k_0}-1}a_n^2\lambda\left(\sum_{k=1}^{n_{k_0}-1}a_k^2/a_n^2\right)\leqq\|a(1,n_{k_0}-1);\lambda\|^*\tag{21}$$

für ein beliebige natürliche Zahl $k_0(\geqq3)$ zu beweisen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß

$$\sum_{n=1}^{n_{k_0}-1}a_n^2=1.\tag{22}$$

Es sei also $k_0(\geqq3)$ eine natürliche Zahl. Es sei weiterhin $\{a_{\nu_k}\}$ $(l=1,\dots,n_{k_0}-1)$ die monoton abnehmende Anordnung der Folge a_n $(n=1,\dots,n_{k_0}-1)$ (diejenigen Glieder, die miteinander gleich sind, bleiben in der originellen Reihenfolge). Für ein k $(2\leqq k<k_0)$ und für ein i $(i=1,\dots,c(k))$ bezeichnen wir mit $Z_i(k)$ die Menge der natürlichen Zahlen ν_l mit

$$n_k+(i-1)(n_k-n_{k-1})\leqq l<n_k+i(n_k-n_{k-1}).$$

Die Anzahl der Elemente von $Z_i(k)$ ist n_k-n_{k-1}. Auf Grund von (7) gibt es $[(n_k-n_{k-1})/2]+1$ Elemente ν_l von $Z_i(k)$ derart, daß $\nu_l\geqq n_{k-1}$. Die Menge dieser Elemente bezeichnen wir mit $\bar{Z}_i(k)$; die Elemente von $\bar{Z}_i(k)$ bezeichnen wir mit

$m_l(i, k)$ $\bigl(m_l(i, k) < m_{l+1}(i, k);\ l=1, \dots, [(n_k - n_{k-1})/2]+1\bigr)$. Also gilt

$$(23) \qquad n_{k-1} \leqq m_l(i, k) \qquad \bigl(l = 1, \dots, [(n_k - n_{k-1})/2]+1; \qquad i=1, \dots, c(k)\bigr).$$

Es sei Z_1 die Menge der Indizes n mit $1 \leqq n$ und $n \notin \bigcup_{k=2}^{k_0-1} \bigcup_{i=1}^{c(k)} \bar{Z}_i(k)$; die Elemente von Z_1, bezeichnen wir mit $\mu_1 < \dots < \mu_s < \cdots$. Wir setzen

$$\varphi_{\mu_i}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\,\chi_i(2x), & 0 < x < 1/2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \dots).$$

Diese Funktionen bilden ein orthonormiertes System in (0, 1), weiterhin gelten

$$(24) \qquad \int_0^1 \Bigl| \sum_{\substack{i \\ \mu_i \leqq n}} \varphi_{\mu_i}(x) \varphi_{\mu_i}(t) \Bigr| \, dt \leqq \begin{cases} 1, & 0 \leqq x < 1/2, \\ 0, & 1/2 < x < 1 \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \dots),$$

$$(25) \qquad \int_0^1 \sup_{1 \leqq i \leqq j} |a_{\mu_i} \varphi_{\mu_i}(x) + \dots + a_{\mu_j} \varphi_{\mu_j}(x)| \, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \sup_{1 \leqq i \leqq j} |a_{\mu_i} \chi_i(x) + \dots + a_{\mu_j} \chi_j(x)| \, dx \geqq \frac{1}{\sqrt{2}} a_{\nu_1} \geqq C_{21} \Bigl\{ \sum_{l=1}^{n_2 - 1} a_{\nu_l}^2 \lambda(l) \Bigr\}^{1/2}.$$

Für eine natürliche Zahl k $(2 \leqq k < k_0)$ bezeichnen wir die Elemente von $\bigcup_{l=1}^{c(k)} \bar{Z}_i(l)$ mit $m_l(k)$ $\bigl(k = 1, \dots, ([(n_k - n_{k-1})/2]+1)c(k)\bigr)$, weiterhin sei

$$A_k^* = \sum_{i=1}^{c(k)} (n_k - n_{k-1}) \min_{j \in Z_i(k)} a_j^2 \cdot \lambda(n_k).$$

Für jede natürliche Zahl k $(2 \leqq k < k_0)$ werden wir ein in (0, 1) orthonormiertes System $\bar{\varphi}_{m_l(k)}(k; x)$ $\bigl(l = 1, \dots, ([(n_k - n_{k-1})/2]+1)c(k)\bigr)$ derart definieren, daß

$$(26) \qquad \int_0^1 \Bigl| \sum_{l=1}^{\lambda} \bar{\varphi}_{m_l(k)}(k; x) \bar{\varphi}_{m_l(k)}(k; t) \Bigr| \, dt \leqq \lambda(m_{k-1}) \qquad (0 < x < 1)$$

$$\bigl(\lambda = 1, \dots, ([(n_k - n_{k-1})/2]+1)c(k)\bigr),$$

(27)

$$\int_0^1 \sup_{1 \leqq s \leqq t \leqq ([(n_k - n_{k-1})/2]+1)c(k)} |a_{m_s(k)} \bar{\varphi}_{m_s(k)}(k; x) + \dots + a_{m_t(k)} \bar{\varphi}_{m_t(k)}(k; x)| \, dx \geqq C_{22} A_k^*.$$

Es sei k eine natürliche Zahl $(2 \leqq k < k_0)$. Das System

$$\bar{\varphi}_{m_l(k)}(k; x) \qquad \bigl(l = 1, \dots, ([(n_k - n_{k-1})/2]+1)c(k)\bigr)$$

definieren wir folgenderweise. Wir wenden den Hilfssatz II im Falle

$$\bar{p} = \Bigl[\Bigl(\Bigl[\frac{n_k - n_{k-1}}{2} \Bigr] + 1 \Bigr) \Big/ 2q_{k-1} \Bigr], \quad \bar{q} = q_{k-1}$$

an. Die entsprechenden Funktionen bezeichnen wir mit $\bar{g}_s(x)$ $(s=1, \ldots, 2\bar{p}\bar{q})$. Dann gelten auf Grund des Hilfssatzes II und der Ungleichung (9)

$$\int_0^1 \left| \sum_{s=1}^{\sigma} \bar{g}_s(x) \bar{g}_s(t) \right| dt \leqq \lambda(n_{k-1}) \quad (0<x<1;\ \sigma=1, \ldots, 2\bar{p}\bar{q}), \tag{28}$$

$$\int_0^1 \sup_{1 \leqq s \leqq t \leqq 2\bar{p}\bar{q}} |a_{m_s(i,k)} \bar{g}_s(x) + \ldots + a_{m_t(i,k)} \bar{g}_t(x)|\, dx \geqq \tag{29}$$

$$\geqq C_{23} \sqrt{n_k - n_{k-1}} \min_{j \in Z_i(k)} a_j \cdot \sqrt{\lambda(n_k)} \quad (i=1, \ldots, c(k)).$$

Es seien, $\bar{s}_0 = 0$, $\bar{s}_i = \sum_{j=1}^{i} \min_{t \in Z_j(k)} a_t^2 / 2 \sum_{j=1}^{c(k)} \min_{t \in Z_j(k)} a_t^2$ $(i=1, \ldots, c(k))$, $\bar{s}_{c(k)+1} = 1$, und $\bar{I}_i = (\bar{s}_{i-1}, \bar{s}_i)$ $(i=1, \ldots, c(k))$. Wir setzen

$$\bar{\varphi}_{m_l(i,k)}(k; x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{m(\bar{I}_i)}} g_l\left(\dfrac{x-\bar{s}_{i-1}}{m(\bar{I}_i)}\right), & x \in \bar{I}_i, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$(l=1, \ldots, 2\bar{p}\bar{q};\ i=1, \ldots, c(k))$, weiterhin seien die Funktionen

$$\bar{\varphi}_{m_l(i,k)}(k; x) \qquad (l=2\bar{p}\bar{q}+1, \ldots, [(n_k-n_{k-1})/2]+1; \qquad i=1, \ldots, c(k))$$

der Reihe nach gleich den Funktionen

$$\bar{f}_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\, \chi_n(2(x-1/2)), & 1/2<x<1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Offensichtlich bilden die Funktionen $\varphi_{m_l(k)}(k; x)$ in $(0, 1)$ ein orthonormiertes System. Aus dem Hilfssatz I und aus (28), auf Grund der Definition der Funktionen ergibt sich für $\lambda=1, \ldots, ([(n_k-n_{k-1})/2]+1)c(k)$

$$\int_0^1 \left| \sum_{l=1}^{\lambda} \bar{\varphi}_{m_l(k)}(k; x) \bar{\varphi}_{\bar{m}_l(k)}(k; t) \right| dt \leqq \lambda(n_{k-1}) \quad (0 \leqq x \leqq 1),$$

also ist (26) erfüllt. Weiterhin aus (8), (29) und aus der Definition dieser Funktionen erhalten wir durch eine einfache Rechnung

$$\int_0^1 \sup_{1 \leqq s \leqq t \leqq ([(n_k-n_{k-1})/2]+1)c(k)} |a_{m_s(k)} \varphi_{m_s(k)}(k; x) + \ldots + a_{m_t(k)} \bar{\varphi}_{m_t(k)}(k; x)|\, dx \geqq$$

$$\geqq \sum_{i=1}^{c(k)} \int_{\bar{I}_i} \sup_{1 \leqq s \leqq t \leqq 2\bar{p}\bar{q}} |a_{m_s(i,k)} \bar{\varphi}_{m_s(i,k)}(k; x) + \ldots + a_{m_t(i,k)} \bar{\varphi}_{m_t(i,k)}(k; x)|\, dx \geqq$$

$$\geqq C_{23} \sum_{i=1}^{c(k)} \sqrt{m(\bar{I}_i)} \sqrt{n_k - n_{k-1}} \min_{j \in Z_i(k)} a_j \sqrt{\lambda(n_k)} \geqq C_{22} A_k^*,$$

also ist auch (27) erfüllt.

Es sei $s_0^* = \frac{1}{2}$, $s_i^* = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{i} A_j^{*2}/2 \sum_{j=1}^{k_0-1} A_j^{*2}$, $I_i^* = (s_{i-1}^*, s_i^*)$ $(i = 1, \ldots, k_0 - 1)$. Wir setzen für $l = 1, \ldots, \big([(n_k - n_{k-1})/2] + 1\big) c(k)$; $k = 2, \ldots k_0 - 1$,

$$\varphi_{m_l(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{m(I_k^*)}} \bar{\varphi}_{m_l(k)} \left(\dfrac{x - s_{k-1}^*}{m(I_k^*)} \right), & x \in I_k^*, \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Offensichtlich bilden die Funktionen $\varphi_n(x)$ $(n = 1, \ldots, n_{k_0} - 1)$ ein orthonormiertes System in $(0, 1)$. Aus (25), (27) ergibt sich

$$\text{(30)} \qquad \int_0^1 \sup_{1 \leq i \leq j < n_{k_0}} |a_i \varphi_i(x) + \ldots + a_j \varphi_j(x)| \, dx \geq C_{24} \left\{ \sum_{n=1}^{n_2-1} a_{\nu_n}^2 \lambda(n) + \sum_{k=2}^{k_0-1} A_k^{*2} \right\}^{1/2}.$$

Weiterhin aus (24) und (26) bekommen wir

$$\text{(31)} \qquad \int_0^1 \left| \sum_{l=1}^{n} \varphi_l(x) \varphi_l(t) \right| dt \leq \begin{cases} 1 \leq \lambda_n, & x \in (0, 1) \setminus \bigcup_{i=1}^{k_0-1} I_i^*, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ \lambda(n_{k-1}), & x \in I_k^*, \quad n \geq \min_{i,l} m_l(i, k), \quad k = 2, \ldots, k_0 - 1, \\ 0, & x \in I_k^*, \quad n < \min_{i,l} m_l(i, k), \quad k = 2, \ldots, k_0 - 1. \end{cases}$$

Wegen (8) und (23) gilt

$$\text{(32)} \qquad \lambda(n_{k-1}) \leq \lambda(n) \quad (n \geq \min_{i,l} m_l(i, k); \quad k = 2, \ldots, k_0 - 1).$$

Aus (32) erhalten wir $\varphi \in \Lambda$.

So bekommen wir aus (30)

$$\text{(33)} \quad \|a(1, n_{k_0} - 1); \lambda\|^* \geq C_{24} \left\{ \sum_{n=1}^{n_2-1} a_{\nu_n}^2 \lambda(n) + \sum_{k=2}^{k_0-1} \sum_{i=1}^{c(k)} (n_k - n_{k-1}) \min_{j \in Z_i(k)} a_j^2 \cdot \lambda(n_k) \right\}^{1/2}.$$

Wegen der Monotonität der Folge a und wegen (7), (8) ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{n_2-1} a_{\nu_n}^2 \lambda(n) \geq \sum_{n=n_1}^{n_2-1} a_{\nu_n}^2 \lambda(n) \geq C_{25} \sum_{n=n_2}^{n_2+(n_2-n_1)-1} a_{\nu_n}^2 \lambda(n),$$

$$\sum_{n=n_k+(n_k-n_{k-1})}^{n_{k+1}-1} a_{\nu_n}^2 \lambda(n) \leq C_{26} A_k^{*2} \qquad (k = 2, \ldots, k_0 - 1),$$

$$\sum_{n=n_k}^{n_k+(n_k-n_{k-1})-1} a_{\nu_n}^2 \lambda(n) \leq C_{27} (n_k - n_{k-1}) \min_{j \in Z_{c(k)}(k-1)} a_j^2 \cdot \lambda(n_k) \leq C_{28} A_{k-1}^{*2}$$
$$(k = 2, \ldots, k_0 - 1).$$

Daraus und aus (33) bekommen wir die Abschätzung

$$\text{(34)} \qquad \|a(1, n_{k_0} - 1); \lambda\|^* \geq C_{29} \left\{ \sum_{n=1}^{n_{k_0}-1} a_{\nu_n}^2 \lambda(n) \right\}^{1/2}$$

Wegen $\sum_{n=1}^{n_{k_0}-1} a_{\nu_n}^2 = 1$ und wegen $a_{\nu_n} \geqq a_{\nu_{n+1}}$ $(n = 1, \ldots, n_{k_0}-2)$ gilt $1/a_{\gamma_n}^2 \geqq n$. Es seien $l_1 < \cdots < l_\lambda (< n_{k_0})$ diejenigen Indizes, für die $1/a_{\nu_{l_n}}^2 \leqq l_n^2$ gilt; die anderen Indizes zwischen 1 und $n_{k_0}-1$ bezeichnen wir mit $p_1 < \cdots < p_r$; für diese Indizes gilt also $1/a_{\nu_{p_n}}^2 > p_n^2$. Auf Grund der Voraussetzungen über die Funktion $\lambda(x)$ folgt durch eine einfache Rechnung

$$\sum_{n=1}^{n_{k_0}-1} a_{\nu_n}^2 \lambda(1/a_{\nu_n}^2) = \sum_{s=1}^{\lambda} a_{\nu_{l_s}}^2 \lambda(1/a_{\nu_{l_s}}^2) + \sum_{t=1}^{r} a_{\nu_{p_t}}^2 \lambda(1/a_{\nu_{p_t}}^2) \leqq$$

$$\leqq \sum_{s=1}^{\lambda} a_{\nu_{l_s}}^2 \lambda(l_s^2) + C_{12} \sum_{t=1}^{\tau} \frac{1}{p_t^{3/2}} a_{\nu_{p_t}}^{1/2} \log^2 (1/a_{\nu_{p_t}}^2) \leqq C_2 \sum_{s=1}^{\lambda} a_{\nu_{l_s}}^2 \lambda(l_s) + C_{30} \sum_{t=1}^{n_{k_0}-1} \frac{1}{t^{3/2}} \leqq$$

$$\leqq C_{31} \left(\sum_{n=1}^{n_{k_0}-1} a_{\nu_n}^2 \lambda(n) + \sum_{n=1}^{n_{k_0}-1} a_{\nu_n}^2 \right) \leqq C_{32} \sum_{n=1}^{n_{k_0}-1} a_{\nu_n}^2 \lambda(n).$$

Zusammen mit (34) führt dies zur Abschätzung (21).

Damit haben wir auch Satz II bewiesen.

Schriftenverzeichnis

[1] G. Alexits, *Convergence problems of orthogonal series* (Budapest, 1961).

[2] K. Tandori, Über die Konvergenz der Orthogonalreihen. II, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 219—232.

[3] K. Tandori, Über die Divergenz der Orthogonalreihen, *Publ. Math. Debrecen*, **8** (1961), 291—307.

[4] K. Tandori, Über die Konvergenz der Orthogonalreihen. III, *Publ. Math. Debrecen*, **12** (1965), 127—157.

[5] K. Tandori, Über das Maximum der Summen orthogonaler Funktionen, *Acta Sci. Math.*, **32** (1967), 341—350.

[6] K. Tandori, Über den Einfluß der Lebesgueschen Funktionen auf die Konvergenz der Orthogonalreihen, *Publ. Math. Debrecen*, **19** (1972), 249—258.

(Eingegangen am 30. Mai 1972)