Erweiterung von Halbgruppen durch wiederholte Quotientenbildung. II

Von H. SEIBT in Potsdam (DDR)

Einleitung

Im Teil I dieser Arbeit [4] untersuchten wir Halbgruppenerweiterungen, die sich durch wiederholte Bildung von Rechtsquotientenhalbgruppen und Linksquotientenhalbgruppen einer Halbgruppe $\mathfrak{N}$ ergeben. Dabei verstehen wir unter einer Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ einer Halbgruppe $\mathfrak{N}$ nach einer Unterhalbgruppe $\mathfrak{n}$ regulärer Elemente[1]) von $\mathfrak{N}$ eine solche Oberhalbgruppe von $\mathfrak{N}$ mit Einselement, in der jedes Element $\alpha \in \mathfrak{n}$ ein Inverses besitzt und deren Elemente sich als Rechtsquotienten $a\alpha^{-1}$ mit $a \in \mathfrak{N}$ und $\alpha \in \mathfrak{n}$ darstellen lassen. Eine solche Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ existiert bekanntlich (vgl. [1] und [2]) genau dann, wenn die folgende Bedingung $Q_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ erfüllt ist: Zu je zwei Elementen $a \in \mathfrak{N}$ und $\alpha \in \mathfrak{n}$ gibt es Elemente $l \in \mathfrak{N}$ und $\lambda \in \mathfrak{n}$ mit $a\lambda=\alpha l$. Im Falle ihrer Existenz ist dann die Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ durch die Halbgruppe $\mathfrak{N}$ und die rechtsseitige Nennermenge $\mathfrak{n}$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt (vgl. [1], [2]). Dagegen können verschiedene Unterhalbgruppen $\mathfrak{n}_i$ $(i \in I)$ von $\mathfrak{N}$ zur gleichen Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{S}=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n}_i)$ führen. Unter diesen ist dann genau eine relativ maximale Nennermenge $\mathfrak{n}$ (sie besteht aus allen in $\mathfrak{S}$ invertierbaren Elementen von $\mathfrak{N}$) dadurch ausgezeichnet, daß aus $a \cdot b \in \mathfrak{n}$ für beliebige reguläre Elemente a und b von $\mathfrak{N}$ stets $a \in \mathfrak{n}$ und $b \in \mathfrak{n}$ folgt (vgl. [2]).

Ist es nun möglich, eine Halbgruppe $\mathfrak{N}$ zuerst zu einer Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_1=\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n}_1)$ nach einer Unterhalbgruppe $\mathfrak{n}_1 \subseteqq \mathfrak{N}$ zu erweitern, diese Halbgruppe $\mathfrak{N}_1$ wieder zu einer Linksquotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_2=\mathfrak{Q}_l(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{n}_2)$ nach einer Unterhalbgruppe $\mathfrak{n}_2 \subseteqq \mathfrak{N}_1$ u.s.f., so nennen wir eine auf diese Weise nach k Schritten entstehende Oberstruktur $\mathfrak{N}_k$ von $\mathfrak{N}$ eine k-te r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_k=$ $=\mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_k)$, wobei $\mathfrak{n}_\varkappa$ $(\varkappa=1, 2, \ldots, k)$ die jeweils im $\varkappa$-ten Schritt verwendete Nennermenge bezeichnet (vgl. [4], Def. 1). Entsprechend definieren wir eine k-te

[1]) Reguläre Elemente erfüllen die Kürzungsregeln.

l-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_l^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_k)$ einer Halbgruppe $\mathfrak{N}$, wobei aber der erste Erweiterungsschritt eine Linksquotientenerweiterung ist. Wir wollen auch in dem vorliegenden Teil II unsere Verabredung beibehalten, daß mit jeder Begriffsbildung bzw. Aussage auch die durch formale „Vertauschung von rechts und links“ hervorgehende duale Begriffsbildung bzw. Aussage als gegeben angesehen wird.

Wir zeigten dann, daß wir für die bei der schrittweisen Quotientenerweiterung von $\mathfrak{N}$ verwendeten Nennermengen ohne Beschränkung der Allgemeinheit stets $\mathfrak{n}_{\varkappa-1} \subseteqq \mathfrak{n}_\varkappa$ und $\mathfrak{n}_{\varkappa-1}^{-1} \subseteqq \mathfrak{n}_\varkappa$ $(\varkappa=2, 3, \ldots, k)$ voraussetzen dürfen und betrachteten ihre Durchschnitte $\mathfrak{x}_\varkappa = \mathfrak{n}_\varkappa \cap \mathfrak{N}$ mit der Halbgruppe $\mathfrak{N}$. Eine so entstehende Unterhalbgruppenkette $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_k$ nannten wir eine Q_r-Kette von $\mathfrak{N}$ der Länge k und wiesen nach, daß schon diese Unterhalbgruppen $\mathfrak{x}_\varkappa$ von $\mathfrak{N}$ die k-te r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_k)$ bis auf Isomorphie eindeutig festlegen, woraufhin wir die Bezeichnung $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N};, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k)$ einführten. Vor allen Dingen ist es nun möglich, notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz der k-ten r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k)$ auszusprechen (vgl. [4], Satz 3): Eine Kette $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_k$ von Unterhalbgruppen regulärer Elemente einer Halbgruppe $\mathfrak{N}$ ist genau dann Q_r-Kette der Länge k, wenn die folgenden Forderungen erfüllt sind. 1) Für jedes $\varkappa=2, 3, \ldots, k$ und beliebige Elemente a und b von $\mathfrak{N}$ folgt aus $a \cdot b \in \mathfrak{x}_\varkappa$ und $b \in \mathfrak{x}_{\varkappa-1}$ (bzw. $a \in \mathfrak{x}_{\varkappa-1}$) stets $a \in \mathfrak{x}_\varkappa$ (bzw. $b \in \mathfrak{x}_\varkappa$). 2) Für jedes $\varkappa=1, 2, \ldots, k$ gilt die mit $Q_r^\varkappa(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\varkappa)$ bezeichnete Bedingung: Zu beliebigen Elementen $a^1 \in \mathfrak{N}$ und $x_\varkappa^1 \in \mathfrak{x}_\varkappa$ gibt es geeignete Elemente[2])

$$\begin{aligned} &a^j \in \mathfrak{N}, \quad x_\varkappa^j \in \mathfrak{x}_\varkappa && (j=2, 3, \ldots, \varkappa),\\ &b^j \in \mathfrak{N}, \quad y_\varkappa^j \in \mathfrak{x}_\varkappa && (j=1, 2, \ldots, \varkappa),\\ &u_j \text{ und } v_j \text{ aus } \mathfrak{x}_j && (j=1, 2, \ldots, \varkappa),\end{aligned}$$

so daß die folgenden Gleichungen erfüllt sind

$$a^\lambda u_\lambda = v_\lambda b^\lambda, \quad x_\varkappa^\lambda u_\lambda = v_\lambda y_\varkappa^\lambda \qquad (\lambda=1, 2, \ldots, \varkappa),$$

$$u_\varkappa = y_\varkappa^\varkappa, \quad v_\varkappa = x_\varkappa^\varkappa,$$

$$a^{2i} = a^{2i+1}, \quad x_\varkappa^{2i} = x_\varkappa^{2i+1}, \quad b^{2i-1} = b^{2i}, \quad y_\varkappa^{2i-1} = y_\varkappa^{2i},$$

wobei der Index i für ungerades $\varkappa$ die Werte $1, 2, \ldots, \frac{\varkappa-1}{2}$ und für gerades $\varkappa$ die Werte $1, 2, \ldots, \frac{\varkappa}{2}$ durchläuft.

Für die duale Bedingung $Q_l^\varkappa(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\varkappa)$ sind natürlich die Faktoren in allen auftretenden Produkten zu vertauschen.

---

[2]) Die hochgestellten Indizes dienen zur Unterscheidung der Elemente.

§ 4

Freilich ist mit diesem allgemeinen Kriterium noch nichts darüber ausgesagt, ob es für eine natürliche Zahl k überhaupt eine Halbgruppe $\mathfrak{N}$ gibt, welche eine k-te r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k)$ zu bilden gestattet, ohne daß man dabei mit weniger als k Erweiterungsschritten auskommen kann. Wir ergänzen daher unsere Untersuchungen aus Teil I durch folgenden

SATZ 6 (Hauptsatz). *Für jede natürliche Zahl k gibt es eine Halbgruppe $\mathfrak{N}$, zu der eine k-te r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k)$ existiert, die auf keine Weise in weniger als k Schritten durch Quotientenerweiterung gewonnen werden kann.*

Wir werden diesen Satz zusammen mit seiner dualen Aussage beweisen, indem wir für jede natürliche Zahl $k \geqq 1$ zwei (zueinander duale) Halbgruppen $\mathfrak{F}_k$ und $\mathfrak{H}_k$ angeben, die folgende Eigenschaften besitzen:

I) *In $\mathfrak{F}_k$ gibt es eine Q_r-Kette der Länge k und eine Q_l-Kette der Länge $k+1$, die beide mit $\mathfrak{F}_k$ selbst enden.*

In $\mathfrak{H}_k$ gibt es eine Q_l-Kette der Länge k und eine Q_r-Kette der Länge $k+1$, die beide mit $\mathfrak{H}_k$ selbst enden.

II) *Jede mit $\mathfrak{F}_k$ endende Q_r-Kette bzw. Q_l-Kette von $\mathfrak{F}_k$ hat mindestens die Länge k bzw. $k+1$.*

Jede mit $\mathfrak{H}_k$ endende Q_l-Kette bzw. Q_r-Kette von $\mathfrak{H}_k$ hat mindestens die Länge k bzw. $k+1$.

Das heißt: Die Halbgruppen $\mathfrak{F}_k$ und $\mathfrak{H}_k$ sind in Gruppen einbettbar, die durch Quotientenbildung nicht in weniger als k Schritten gewonnen werden können.

Wir konstruieren zunächst gewisse Halbgruppen $\mathfrak{F}_k$ und $\mathfrak{H}_k$, von denen wir dann in den beiden folgenden Paragraphen zeigen werden, daß sie die in I) und II) genannten Eigenschaften besitzen. Wir zeigen für jede natürliche Zahl k die Existenz zweier Halbgruppen $\mathfrak{F}_k$ und $\mathfrak{H}_k$ mit den Eigenschaften:

a) *$\mathfrak{F}_k$ und $\mathfrak{H}_k$ sind zueinander antiisomorphe reguläre Halbgruppen mit dem gleichen Einselement.*

b) *Es gibt einen Homomorphismus i_k von $\mathfrak{F}_k$ und einen Homomorphismus j_k von $\mathfrak{H}_k$ in (für $k \geqq 1$ sogar auf) die additive Halbgruppe der nichtnegativen ganzen Zahlen.*

c) *Der Antiisomorphismus ψ_k von $\mathfrak{F}_k$ auf $\mathfrak{H}_k$ erfüllt bezüglich der in* b) *genannten Homomorphismen i_k und j_k*

$$i_k(f) = j_k(\psi_k(f)) \quad \textit{für alle} \quad f \in \mathfrak{F}_k,$$

womit auch $j_k(h) = i_k(\psi_k^{-1}(h))$ für alle $h \in \mathfrak{H}_k$ gilt.

Die Halbgruppen $\mathfrak{F}_k$ und $\mathfrak{H}_k$ konstruieren wir induktiv, wobei wir für $k=0$ die aus nur einem Element e bestehende Halbgruppe $\mathfrak{F}_0=\mathfrak{H}_0$ mit $i_0(e)=j_0(e)=0$ und der identischen Abbildung ψ_0 verwenden. Es seien nun $\mathfrak{F}_k$ und $\mathfrak{H}_k$ Halbgruppen mit den Eigenschaften a), b) und c). Dann definieren wir zunächst $\mathfrak{F}_{k+1}$ als diejenige Halbgruppe, die von den Elementen von $\mathfrak{H}_k$ und zwei weiteren Elementen $C=C_{k+1}$ und $D=D_{k+1}$ erzeugt wird[3], wobei neben den Relationen von $\mathfrak{H}_k$ noch folgende Relationen gefordert werden:

(1) $$D_{k+1}C_{k+1} = C_{k+1}D_{k+1}^2,$$

(2) $$hC_{k+1} = C_{k+1}h, \quad D_{k+1}h = hD_{k+1}^{2^{j_k(h)}} \quad \text{für alle} \quad h\in\mathfrak{H}_k,$$

(3) $$eC_{k+1} = C_{k+1}, \quad eD_{k+1} = D_{k+1} \quad \text{für das Einselement } e \text{ von } \mathfrak{H}_k.$$

Ersichtlich ist das Einselement e von $\mathfrak{H}_k$ wegen $j_k(e)=0$ auch Einselement von $\mathfrak{F}_{k+1}$. Die Elemente von $\mathfrak{F}_{k+1}$ sind dann jedenfalls von der Form hC^cD^d mit $h\in\mathfrak{H}_k$ und nichtnegativen ganzen Zahlen c und d, und je zwei Elemente von $\mathfrak{F}_{k+1}$ werden gemäß

(*) $$h_1C^{c_1}D^{d_1}\cdot h_2C^{c_2}D^{d_2}=h_1h_2C^{c_1+c_2}D^{d_2+2^{j_k(h_2)+c_2}d_1}$$

multipliziert. Darüber hinaus besitzt jedes Element von $\mathfrak{F}_{k+1}$ sogar genau eine solche Darstellung hC^cD^d. Dazu betrachte man die Produktmenge $F_{k+1} = \mathfrak{H}_k\times \times N_0\times N_0$, worin N_0 die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen bezeichnet, und definiere in F_{k+1}:

α) Es sei $(h_1, c_1, d_1)=(h_2, c_2, d_2)$ genau dann, wenn $h_1=h_2$, $c_1=c_2$ und $d_1=d_2$ gilt;

β) $$(h_1, c_1, d_1)\cdot(h_2,c_2,d_2) = (h_1h_2, c_1+c_2, d_2+2^{j_k(h_2)+c_2}d_1).$$

Wegen α) wird durch β) ersichtlich eine assoziative Multiplikation in F_{k+1} definiert, so daß in F_{k+1} auch die Relationen (1), (2) und (3) erfüllt sind. Wir zeigen noch, daß $\mathfrak{F}_{k+1}$ eine reguläre Halbgruppe ist. Dazu sei

$$hC^cD^d\cdot h_1C^{c_1}D^{d_1}=hC^cD^d\cdot h_2C^{c_2}D^{d_2},$$

also

$$hh_1C^{c+c_1}D^{d_1+2^{j_k(h_1)+c_1}d} = hh_2C^{c+c_2}D^{d_2+2^{j_k(h_2)+c_2}d},$$

woraus sich zunächst

$$hh_1 = hh_2, \quad c+c_1 = c+c_2, \quad d_1+2^{j_k(h_1)+c_1}d = d_2+2^{j_k(h_2)+c_2}d$$

ergibt. Wegen der Regularität von $\mathfrak{H}_k$ gilt $h_1=h_2$, außerdem folgt $c_1=c_2$ und aus beidem $d_1=d_2$, womit

$$h_1C^{c_1}D^{d_1}=h_2C^{c_2}D^{d_2}$$

[3]) Sind keine Verwechslungen zu befürchten, werden wir zur Vereinfachung im Folgenden auf die Indizes verzichten und einfach C und D schreiben.

gezeigt ist. In gleicher Weise zeigt man die Gültigkeit der rechtsseitigen Kürzungsregel. Es ist also $\mathfrak{F}_{k+1}$ eine reguläre Oberhalbgruppe von $\mathfrak{H}_k$ mit demselben Einselement. Wir betrachten nun die zur Halbgruppe $\mathfrak{F}_{k+1}$ duale Halbgruppe $\mathfrak{F}_{k+1}^{\circ} = \mathfrak{H}_{k+1}$, die also dadurch entsteht, daß man in $\mathfrak{F}_{k+1}$ die Multiplikation ab durch die duale Operation $a \circ b = ba$ ersetzt. Da wir $\mathfrak{F}_k$ und $\mathfrak{H}_k$ als duale Halbgruppen vorausgesetzt hatten, wobei es einen Antiisomorphismus ψ_k von $\mathfrak{F}_k$ auf $\mathfrak{H}_k$ gibt, der c) erfüllt, ist die Unterhalbgruppe $\mathfrak{H}_k^{\circ}$ von $\mathfrak{F}_{k+1}^{\circ} = \mathfrak{H}_{k+1}$ isomorph zu $\mathfrak{F}_k$, weshalb wir $\mathfrak{H}_{k+1}$ als Oberhalbgruppe von $\mathfrak{F}_k$ annehmen dürfen. Setzen wir nun noch $C_{k+1}^{\circ} = B_{k+1}$ und $D_{k+1}^{\circ} = A_{k+1}$, so wird durch

$$\psi_{k+1}(hC_{k+1}^{c_{k+1}} D_{k+1}^{d_{k+1}}) = A_{k+1}^{d_{k+1}} B_{k+1}^{c_{k+1}} \psi_k^{-1}(h)$$

für alle Elemente $hC_{k+1}^{c_{k+1}} D_{k+1}^{d_{k+1}} \in \mathfrak{F}_{k+1}$ ein Antiisomorphismus ψ_{k+1} von $\mathfrak{F}_{k+1}$ auf $\mathfrak{H}_{k+1}$ erklärt, der Fortsetzung von ψ_k^{-1} ist. Mit anderen Worten: Wir betrachten $\mathfrak{H}_{k+1}$ als die von der Halbgruppe $\mathfrak{F}_k = \psi_k^{-1}(\mathfrak{H}_k)$ und zwei weiteren Elementen $A_{k+1} = \psi_{k+1}(D_{k+1})$ und $B_{k+1} = \psi_{k+1}(C_{k+1})$ erzeugte Halbgruppe, wobei zu den Relationen von $\mathfrak{F}_k$ noch die folgenden zu (1), (2) und (3) dualen Relationen hinzugenommen werden:

(1′) $$B_{k+1} A_{k+1} = \psi_{k+1}(D_{k+1} C_{k+1}) = \psi_{k+1}(C_{k+1} D_{k+1}^2) = A_{k+1}^2 B_{k+1},$$

(2′₁) $$B_{k+1} f = \psi_{k+1}(hC_{k+1}) = \psi_{k+1}(C_{k+1} h) = fB_{k+1}$$

sowie

(2′₂) $$fA_{k+1} = \psi_{k+1}(D_{k+1} h) = \psi_{k+1}(hD_{k+1}^{2^{j_k(h)}}) = A_{k+1}^{2^{j_k(\psi_k(f))}} f = A_{k+1}^{2^{i_k(f)}} f$$

für alle Elemente $f = \psi_k^{-1}(h)$ aus $\mathfrak{F}_k$,

(3′) $$B_{k+1} e = \psi_{k+1}(eC_{k+1}) = B_{k+1}$$

$$A_{k+1} e = \psi_{k+1}(eD_{k+1}) = A_{k+1}$$

für das Einselement $e = \psi_k^{-1}(e)$ von $\mathfrak{F}_k$.

Damit ist $\mathfrak{H}_{k+1}$ eine reguläre Oberhalbgruppe von $\mathfrak{F}_k$ mit demselben Einselement, deren Elemente eindeutig in der Form $A_{k+1}^{a_{k+1}} B_{k+1}^{b_{k+1}} f$ mit $f \in \mathfrak{F}_k$ und nichtnegativen ganzen Zahlen a_{k+1} und b_{k+1} dargestellt werden können. Je zwei Elemente von $\mathfrak{H}_{k+1}$ werden nach der Regel

(**) $$A^{a_1} B^{b_1} f_1 \cdot A^{a_2} B^{b_2} f_2 = A^{a_1 + 2^{i_k(f_1)+b_1} a_2} B^{b_1+b_2} f_1 f_2$$

multipliziert, wenn wir auch hier zur Vereinfachung auf die Indizes $k+1$ verzichten und einfach A bzw. B schreiben. Um noch die Gültigkeit von b) und c) für die Halbgruppen $\mathfrak{F}_{k+1}$ und $\mathfrak{H}_{k+1}$ zu zeigen, definieren wir

$$i_{k+1}(hC^c D^d) = j_k(h) + c \quad \text{für alle Elemente} \quad hC^c D^d \in \mathfrak{F}_{k+1},$$

$$j_{k+1}(A^a B^b f) = i_k(f) + b \quad \text{für alle Elemente} \quad A^a B^b f \in \mathfrak{H}_{k+1}.$$

Ersichtlich handelt es sich wegen (*) und (**) um Homomorphismen von $\mathfrak{F}_{k+1}$ bzw. von $\mathfrak{H}_{k+1}$ auf die additive Halbgruppe der nichtnegativen ganzen Zahlen. Es sei noch bemerkt, daß sich die Multiplikation in $\mathfrak{F}_{k+1}$ bzw. in $\mathfrak{H}_{k+1}$ dann auch gemäß

$$h_1 C^{c_1} D^{d_1} \cdot h_2 C^{c_2} D^{d_2} = h_1 h_2 C^{c_1+c_2} D^{d_2 + 2^{i_{k+1}(h_2 C^{c_2} D^{d_2})} d_1}$$

bzw.

$$A^{a_1} B^{b_1} f_1 \cdot A^{a_2} B^{b_2} f_2 = A^{a_1 + 2^{j_{k+1}(A^{a_1} B^{b_1} f_1)} a_2} B^{b_1+b_2} f_1 f_2$$

kennzeichnen läßt. Schließlich erfüllt ψ_{k+1} auch die Forderung von c).

Es ist also etwa $\mathfrak{F}_1$ eine reguläre Halbgruppe mit Einselement, deren Elemente sich eindeutig in der Form

$$e C_1^{c_1} D_1^{d_1} = C_1^{c_1} D_1^{d_1} \quad (c_1, d_1 \text{ nichtnegative ganze Zahlen})$$

schreiben lassen, wobei $i_1(C_1^{c_1} D_1^{d_1}) = c_1$ für jedes Element von $\mathfrak{F}_1$ gilt und die Multiplikation in $\mathfrak{F}_1$ nach der Regel

$$C_1^{c_1} D_1^{d_1} \cdot C_1^{c'_1} D_1^{d'_1} = C_1^{c_1+c'_1} D_1^{d'_1 + 2^{c'_1} d_1}$$

erfolgt. Wir bemerken noch, daß diese Halbgruppen $\mathfrak{F}_1$ und entsprechend $\mathfrak{H}_1$ gerade die bereits in § 1 von Teil I verwendeten Halbgruppen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{H}$ sind.

Allgemein ist $\mathfrak{F}_k$ eine reguläre Oberhalbgruppe von $\mathfrak{H}_{k-1}$ mit demselben Einselement, deren Elemente sich eindeutig in der Form

$$A_{k-1}^{a_{k+1}} B_{k-1}^{b_{k-1}} A_{k-3}^{a_{k-3}} B_{k-3}^{b_{k-3}} \ldots A_2^{a_2} B_2^{b_2} C_1^{c_1} D_1^{d_1} C_3^{c_3} D_3^{d_3} \ldots C_k^{c_k} D_k^{d_k}$$

für ungerades k bzw.

$$A_{k-1}^{a_{k-1}} B_{k-1}^{b_{k-1}} A_{k-3}^{a_{k-3}} B_{k-3}^{b_{k-3}} \ldots A_1^{a_1} B_1^{b_1} C_2^{c_2} D_2^{d_2} C_4^{c_4} D_4^{d_4} \ldots C_k^{c_k} D_k^{d_k}$$

für gerades k mit nichtnegativen ganzen Zahlen als Exponenten darstellen lassen. Dabei gilt für alle Elemente $f_k \in \mathfrak{F}_k$:

$$i_k(f_k) = c_1 + b_2 + c_3 + b_4 + \cdots + b_{k-1} + c_k, \quad k \text{ ungerade}$$

bzw.

$$i_k(f_k) = b_1 + c_2 + b_3 + c_4 + \cdots + b_{k-1} + c_k, \quad k \text{ gerade.}$$

Entsprechende Darstellungen gelten für die Halbgruppe $\mathfrak{H}_k$.

§ 5

Wir wenden uns jetzt der Untersuchung von Q_r-Ketten und Q_l-Ketten der im vorigen Paragraphen konstruierten Halbgruppen $\mathfrak{F}_k$ bzw. $\mathfrak{H}_k$ für $k \geqq 1$ zu. Auf Grund der Dualität von $\mathfrak{F}_k$ und $\mathfrak{H}_k$ bilden Unterhalbgruppen

$$\mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_l$$

von $\mathfrak{F}_k$ genau dann eine Q_r-Kette der Länge l von $\mathfrak{F}_k$, wenn die Unterhalbgruppen

$$\psi_k(\mathfrak{x}_1) \subseteqq \psi_k(\mathfrak{x}_2) \subseteqq \cdots \subseteqq \psi_k(\mathfrak{x}_l)$$

von $\mathfrak{H}_k$ eine Q_l-Kette von $\mathfrak{H}_k$ der gleichen Länge darstellen. Für den Nachweis der Behauptung I) im Anschluß an Satz 6 stellen wir zunächst zwei Hilfssätze bereit, die übrigens auch unter etwas allgemeineren Voraussetzungen erfüllt sind.

Hilfssatz 5. *Ist $\mathfrak{M}$ eine reguläre Halbgruppe mit Einselement, die sich als Komplexprodukt $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}\mathfrak{G} = \mathfrak{G}\mathfrak{N}$ einer Unterhalbgruppe $\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{M}$ und einer Untergruppe $\mathfrak{G} \subseteqq \mathfrak{M}$ darstellen läßt, wobei $a\mathfrak{G} = \mathfrak{G}a$ für alle Elemente $a \in \mathfrak{N}$ gilt, dann existiert mit jeder Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ von $\mathfrak{N}$ nach einer Unterhalbgruppe $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{N}$ auch die Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}\mathfrak{G}, \mathfrak{n}\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}\mathfrak{G}$ nach der rechtsseitigen Nennermenge $\mathfrak{n}\mathfrak{G} \subseteqq \mathfrak{M}$. Überdies gewinnt man $\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}\mathfrak{G}, \mathfrak{n}\mathfrak{G})$ als Komplexprodukt $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{N}, \mathfrak{n})$ mit $\mathfrak{G}$, und für alle Elemente $s \in \mathfrak{S}$ gilt $s\mathfrak{G} = \mathfrak{G}s$.*

Da gemäß [2] jede Quotientenhalbgruppe einer regulären Halbgruppe ebenfalls regulär ist, folgt durch vollständige Induktion über k aus Hilfssatz 5 und seiner dualen Aussage der

Hilfssatz 6. *Ist $\mathfrak{M}$ eine reguläre Halbgruppe mit Einselement, die sich als Komplexprodukt $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}\mathfrak{G} = \mathfrak{G}\mathfrak{N}$ einer Unterhalbgruppe $\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{M}$ und einer Untergruppe $\mathfrak{G} \subseteqq \mathfrak{M}$ darstellen läßt, wobei $a\mathfrak{G} = \mathfrak{G}a$ für alle Elemente $a \in \mathfrak{N}$ gilt, dann existiert mit jeder k-ten r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_k)$ von $\mathfrak{N}$ auch die k-te r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}\mathfrak{G}; \mathfrak{n}_1\mathfrak{G}, \ldots, \mathfrak{n}_k\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}\mathfrak{G}$, die man als Komplexprodukt $\mathfrak{N}_k\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{N}; \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_k)$ mit $\mathfrak{G}$ gewinnen kann.*

Den ersten Teil der Behauptung I), daß es in der Halbgruppe $\mathfrak{F}_k$ $(k \geqq 1)$ eine Q_r-Kette $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_k = \mathfrak{F}_k$ gibt, verschärfen wir dahingehend, daß dabei stets das Einselement e von $\mathfrak{F}_k$ in $\mathfrak{x}_1$ enthalten ist, und beweisen dies zusammen mit der dualen Aussage über $\mathfrak{H}_k$ durch vollständige Induktion über k. Dabei können wir uns immer auf die Durchführung jeweils eines der zueinander dualen Schlüsse beschränken. Für $k = 1$ zeigen wir, daß $\mathfrak{F}_1$ eine rechtsseitige Nennermenge von sich selbst ist, was wir zwar aus unseren Überlegungen in § 1 übernehmen könnten, hier aber der Vollständigkeit halber noch einmal ausführen wollen. Für beliebig vorgegebene Elemente $a = C_1^c D_1^d$ und $\alpha = C_1^\gamma D_1^\delta$ aus $\mathfrak{F}_1$ erfüllen die Elemente $l = C_1^c D_1^{2^\gamma d}$ und $\lambda = C_1^\gamma D_1^{2^c \delta}$ aus $\mathfrak{F}_1$ gerade die Gleichung

$$a\lambda = C_1^c D_1^d C_1^\gamma D_1^{2^c\delta} = X_1^{c+\gamma} D_1^{2^c\delta + 2^\gamma p} = C_1^\gamma D_1^\delta C_1^c D_1^{2^\gamma d} = \alpha l,$$

womit $Q_r(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_1)$ nachgewiesen ist. Für den Induktionsschritt sei nun

$$\mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_k = \mathfrak{F}_k$$

eine Q_r-Kette der Länge k von $\mathfrak{F}_k$, wobei $\mathfrak{x}_1$ das Einselement e von $\mathfrak{F}_k$ enthält, also

$$\mathfrak{y}_1 \subseteqq \mathfrak{y}_2 \subseteqq \dots \subseteqq \mathfrak{y}_k = \mathfrak{H}_k \quad \text{mit} \quad \mathfrak{y}_\varkappa = \psi_k(\mathfrak{y}_\varkappa), \qquad \varkappa = 1, 2, \dots, k$$

eine Q_l-Kette der Länge k von $\mathfrak{H}_k$, wobei $\mathfrak{y}_1$ das Einselement von $\mathfrak{H}_k$ enthält. Nun ist die von $C = C_{k+1} \in \mathfrak{F}_{k+1}$ und $D = D_{k+1} \in \mathfrak{F}_{k+1}$ erzeugte Unterhalbgruppe mit Einselement $\mathfrak{z}_0$ der Elemente $C^c D^d$ von $\mathfrak{F}_{k+1}$ auch rechtsseitige Nennermenge von $\mathfrak{F}_{k+1}$, denn mit beliebigen Elementen $a = hC^c D^d \in \mathfrak{F}_{k+1}$ und $\alpha = C^\gamma D^\delta \in \mathfrak{z}_0$ erfüllen die Elemente $l = hC^c D^{2^\gamma d} \in \mathfrak{F}_{k+1}$ und $\lambda = C^\gamma D^{2^{jk(h)}+c\delta} \in \mathfrak{z}_0$ die Gleichung

$$a\lambda = hC^c D^d \cdot C^\gamma D^{2^{jk(h)}+c\delta} = hC^{c+\gamma} D^{2^{jk(h)}+c\delta+2^\gamma d} = C^\gamma D^\delta \cdot hC^c D^{2^\gamma d} = \alpha l,$$

also gilt die Bedingung $Q_r(\mathfrak{F}_{k+1}, \mathfrak{z}_0)$. Die Elemente der Rechtsquotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{F}_{k+1}, \mathfrak{z}_0)$ gestatten die Darstellung

$$hC^c D^d D^{-\delta} C^{-\gamma} \quad (c, d, \gamma, \delta \text{ nichtnegative ganze Zahlen}),$$

und alle Elemente der Form $C^c D^d D^{-\delta} C^{-\gamma}$ bilden auf Grund der Relationen (1), (2) und (3) eine Untergruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{Q}_r(\mathfrak{F}_{k+1}, \mathfrak{z}_0) = \mathfrak{H}_k \mathfrak{G}$. Es zeigt sich, daß sogar $h\mathfrak{G} = \mathfrak{G}h$ für alle Elemente $h \in \mathfrak{H}_k$ erfüllt ist. Da nach Induktionsvoraussetzung

$$\mathfrak{y}_1 \subseteqq \mathfrak{y}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{y}_k = \mathfrak{H}_k$$

eine Q_l-Kette von $\mathfrak{H}_k$ ist, erfüllt die Halbgruppe $\mathfrak{H}_k \mathfrak{G} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{F}_{k+1}, \mathfrak{z}_0)$ alle Voraussetzungen der dualen Aussage von Hilfssatz 6. Es existiert also mit der k-ten l-Quotientenhalbgruppe

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{Q}_l^k(\mathfrak{H}_k; \mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_k) = \mathfrak{Q}_l^k(\mathfrak{H}_k; \mathfrak{n}_1, \dots, \mathfrak{n}_k)$$

von $\mathfrak{H}_k$, wobei $\mathfrak{y}_\varkappa = \mathfrak{n}_\varkappa \cap \mathfrak{H}_k$ gilt, eine k-te l-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}\mathfrak{G} = \mathfrak{Q}_l^k(\mathfrak{H}_k \mathfrak{G}; n_1 \mathfrak{G}, \dots, \mathfrak{n}_k \mathfrak{G})$ von $\mathfrak{H}_k \mathfrak{G} = \mathfrak{Q}_r(\mathfrak{F}_{k+1}, \mathfrak{z}_0)$. Diese ist zugleich eine $(k+1)$-te r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}_r^{k+1}(\mathfrak{F}_{k+1}; \mathfrak{z}_0, \mathfrak{n}_1 \mathfrak{G}, \dots, \mathfrak{n}_k \mathfrak{G})$ von $\mathfrak{F}_{k+1}$, weshalb $\mathfrak{z}_0 \subseteqq \mathfrak{z}_1 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{z}_k$ mit $\mathfrak{z}_\varkappa = \mathfrak{n}_\varkappa \mathfrak{G} \cap \mathfrak{F}_{k+1}$ für $\varkappa = 1, 2, \dots, k$ eine Q_r-Kette von $\mathfrak{F}_{k+1}$ der Länge $k+1$ ist, die mit der das Einselement von $\mathfrak{F}_{k+1}$ enthaltenden Unterhalbgruppe $\mathfrak{z}_0 \subseteqq \mathfrak{F}_{k+1}$ beginnt und mit $\mathfrak{z}_k = \mathfrak{F}_{k+1}$ endet. Aus $\mathfrak{z}_k = \mathfrak{n}_k \mathfrak{G} \cap \mathfrak{F}_{k+1}$ folgt nämlich $\mathfrak{H}_k = \mathfrak{y}_k = \mathfrak{n}_k \cap \mathfrak{H}_k \subseteqq \mathfrak{n}_k \mathfrak{G} \cap \mathfrak{F}_{k+1} = \mathfrak{z}_k$, was mit $\mathfrak{z}_0 \subseteqq \mathfrak{z}_k$ auf $\mathfrak{F}_{k+1} = \mathfrak{H}_k \mathfrak{z}_0 \subseteqq \mathfrak{z}_k$ führt. Damit ist die angegebene Verschärfung der ersten Teilaussage von I) bewiesen. Aus ihr erhält man sofort auch die zweite Teilaussage, indem man bei der schrittweisen Erweiterung von $\mathfrak{F}_k$ zu $\mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{F}_k; \mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_k)$ vor die erste Rechtsquotientenerweiterung eine triviale Linksquotientenerweiterung mit der Nennermenge $\mathfrak{x}_0 = \{e\} \subseteqq \mathfrak{x}_1$ davorsetzt. Damit sind die Aussagen von I) für alle Halbgruppen $\mathfrak{F}_k$ und $\mathfrak{H}_k$ $(k \geqq 1)$ nachgewiesen.

§ 6

Unsere Untersuchungen über die minimale Länge der mit $\mathfrak{F}_k$ endenden Q_r-Ketten und Q_l-Ketten der Halbgruppen $\mathfrak{F}_k$ $(k \geqq 1)$ beginnen wir mit einer Modifizierung des Begriffes Q_r-Kette für reguläre Halbgruppen: *Eine Q_r-Kette $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_k$ einer regulären Halbgruppe $\mathfrak{R}$ heißt Q'_r-Kette von $\mathfrak{R}$, wenn sie an Stelle der Forderung* 1) *aus Satz 3 der schärferen Bedingung genügt:*

1′) *Für alle Elemente a und b aus $\mathfrak{R}$ folgt aus $a \cdot b \in \mathfrak{x}_\varkappa$ stets $a \in \mathfrak{x}_\varkappa$ und $b \in \mathfrak{x}_\varkappa$* $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$.

Hilfssatz 7. *Zu jeder Q_r-Kette $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_k$ einer regulären Halbgruppe $\mathfrak{R}$ gibt es eine Q'_r-Kette $\mathfrak{y}_1 \subseteqq \mathfrak{y}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{y}_k$ von $\mathfrak{R}$ der gleichen Länge k, so daß $\mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{R}; \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k) = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{R}; \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_k)$ gilt.*

Beweis. Wir wählen in jedem Erweiterungsschritt der Quotientenerweiterung von $\mathfrak{R}$ zu der k-ten r-Quotientenhalbgruppe $\mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{R}; \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k) = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{R}; \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_k)$ von $\mathfrak{R}$ an Stelle der jeweiligen Nennermengen $\mathfrak{n}_\varkappa$ die zugehörigen relativ maximalen Nennermengen $\mathfrak{m}_\varkappa$, für die dann ebenfalls $\mathfrak{m}_{\varkappa-1} \subseteqq \mathfrak{m}_\varkappa$ und $\mathfrak{m}_{\varkappa-1}^{-1} \subseteqq \mathfrak{m}_\varkappa$ mit $\varkappa = 2, 3, \ldots, k$ erfüllt ist. Dann bilden die Unterhalbgruppen $\mathfrak{y}_\varkappa = \mathfrak{m}_\varkappa \cap \mathfrak{R}$ eine Q_r-Kette von $\mathfrak{R}$ der Länge k, und es gilt

$$\mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{R}; \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_k) = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{R}; \mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_k) = \mathfrak{Q}_r^k(\mathfrak{R}; \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_k).$$

Für je zwei Elemente a und b aus $\mathfrak{R}$ folgt aus $a \cdot b \in \mathfrak{y}_\varkappa$ zunächst $a \cdot b \in \mathfrak{m}_\varkappa$, also wegen der relativen Maximalität von $\mathfrak{m}_\varkappa$ gerade $a \in \mathfrak{m}_\varkappa$ und $b \in \mathfrak{m}_\varkappa$, woraus sich sofort $a \in \mathfrak{y}_\varkappa$ und $b \in \mathfrak{y}_\varkappa$ ergibt.

Auf Grund dieses Hilfssatzes und seiner dualen Aussage dürfen wir uns im Folgenden auf die Untersuchung von Q'_r-Ketten und Q'_l-Ketten von $\mathfrak{F}_k$ bzw. $\mathfrak{H}_k$ beschränken. Dabei wird es sich als nützlich erweisen, daß es einen Homomorphismus von $\mathfrak{F}_k$ auf die Unterhalbgruppe $\mathfrak{H}_{k-1} \subseteqq \mathfrak{F}_k$ gibt, der jede Q'_r-Kette und jede Q'_l-Kette von $\mathfrak{F}_k$ in eine ebensolche von $\mathfrak{H}_{k-1}$ gleicher Länge überführt. Die durch

$$\varphi(hC^c D^d) = h \in \mathfrak{H}_{k-1} \quad \text{für alle Elemente} \quad hC^c D^d \in \mathfrak{F}_k$$

definierte eindeutige Abbildung φ von $\mathfrak{F}_k$ auf $\mathfrak{H}_{k-1}$ ist nämlich gemäß

$$\begin{aligned}\varphi(hC^c D^d \cdot h'C^{c'} D^{d'}) &= \varphi(hh'C^{c+c'} D^{d'+2j_{k-1}(h')+c'd}) \\ &= hh' = \varphi(hC^c D^d) \cdot \varphi(h'C^{c'} D^{d'})\end{aligned}$$

ein Homomorphismus von $\mathfrak{F}_k$ auf $\mathfrak{H}_{k-1}$, bei dem sich auch die Forderung 1′) von einer Q'_r-Kette $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_n$ von $\mathfrak{F}_k$ auf ihr homomorphes Bild $\varphi(\mathfrak{x}_1) \subseteqq \cdots \subseteqq \varphi(\mathfrak{x}_n)$ überträgt. Denn gilt $h \cdot h' \in \varphi(\mathfrak{y}_\nu)$ für beliebige Elemente h und h' aus $\mathfrak{H}_{k-1}$ mit $\nu = 1, 2, \ldots, n$, so folgt zunächst, daß $\mathfrak{x}_\nu$ ein Element $hh'C^c D^d$ mit gewissen Exponenten c und d enthält. Dann sind gemäß 1′) auch h und h' Elemente von $\mathfrak{x}_\nu$ und damit auch Elemente von $\varphi(\mathfrak{x}_\nu)$. Weiterhin zieht auch die Gültigkeit der Bedingungen $Q_r^\nu(\mathfrak{F}_k; \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu)$ die Gültigkeit der Bedingungen $Q_r^\nu(\mathfrak{H}_{k-1}; \varphi(\mathfrak{x}_1), \ldots, \varphi(\mathfrak{x}_\nu))$ nach sich; denn sind $a^1 \in \mathfrak{H}_{k-1}$ und $x^1 \in \varphi(\mathfrak{x}_\nu)$ beliebig vorgegebene Elemente, so gibt es wegen $a^1 \in \mathfrak{F}_k$ und $x^1 \in \mathfrak{x}_\nu$ geeignete Elemente aus den entsprechenden Unterhalbgruppen von $\mathfrak{F}_k$, die alle Gleichungen der Bedingung $Q_r^\nu(\mathfrak{F}_k; \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu)$ erfüllen, und damit nach Übergang zu den jeweiligen Bildern bei der homomorphe Abbildung φ von $\mathfrak{F}_k$ auf $\mathfrak{H}_{k-1}$ auch geeignete Elemente aus den entsprechenden Unterhalbgruppen von $\mathfrak{H}_{k-1}$, die alle Gleichungen der Bedingung $Q_r^\nu(\mathfrak{H}_{k-1}; \varphi(\mathfrak{x}_1), \ldots, \varphi(\mathfrak{x}_\nu))$ erfüllen. Die Überlegungen für Q_l'-Ketten verlaufen analog.

Insbesondere folgt aus der Existenz eines solchen Homomorphismus von $\mathfrak{F}_k$ auf $\mathfrak{H}_{k-1}$ und der dualen Aussage über $\mathfrak{H}_k$, daß es für alle $j \leqq k$ möglich ist, die Halbgruppe $\mathfrak{F}_k$ auf ihre Unterhalbgruppe $\mathfrak{F}_j$ bzw. $\mathfrak{H}_j$ homomorph abzubilden, je nachdem ob $k-j$ gerade oder ungerade ist, so daß dabei jede Q_r'-Kette (Q_l'-Kette) von $\mathfrak{F}_k$ in eine Q_r'-Kette (Q_l'-Kette) von $\mathfrak{F}_j$ bzw. $\mathfrak{H}_j$ derselben Länge übergeführt wird.

Ersichtlich hat nun jede Q_r'-Kette von $\mathfrak{F}_1$ mindestens die Länge 1, und für $k \geqq 2$ läßt sich die Frage nach der minimalen Länge einer mit $\mathfrak{F}_k$ endenden Q_r'-Kette von $\mathfrak{F}_k$ jetzt auf die Frage nach der minimalen Länge einer mit $\mathfrak{F}_{k-1}$ endenden Q_l'-Kette von $\mathfrak{F}_{k-1}$ zurückführen, denn jede Q_r'-Kette von $\mathfrak{F}_k$

$$\mathfrak{x}_1 \subseteq \mathfrak{x}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{x}_p = \mathfrak{F}_k$$

der Länge $p<k$ führt zu einer Q_r'-Kette von $\mathfrak{H}_{k-1}$

$$\varphi(\mathfrak{x}_1) \subseteq \varphi(\mathfrak{x}_2) \subseteq \ldots \subseteq \varphi(\mathfrak{x}_p) = \mathfrak{H}_{k-1}$$

der Länge $p<k$, also zu einer Q_l'-Kette von $\mathfrak{F}_{k-1}$

$$\psi_{k-1}^{-1}(\varphi(\mathfrak{x}_1)) \subseteq \psi_{k-1}^{-1}(\varphi(\mathfrak{x}_2)) \subseteq \ldots \subseteq \psi_{k-1}^{-1}(\varphi(\mathfrak{x}_p)) = \mathfrak{F}_{k-1}$$

der Länge $p < k = (k-1)+1$.

Damit haben wir jetzt nur noch zu zeigen: Für alle $k \geqq 1$ hat jede Q_l'-Kette von $\mathfrak{F}_k$, die mit $\mathfrak{F}_k$ selbst endet, mindestens die Länge $k+1$. Dazu zeigen wir: Für jede Q_l'-Kette $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_p$ von $\mathfrak{F}_k$ der Länge p gilt für alle $s=1, 2, \ldots, p$: $\mathfrak{x}_s$ enthält kein Element B_j und kein Element C_j mit $j \leqq k-s+1$.

In der Tat folgt hieraus, daß C_1 bzw. B_1 nicht in $\mathfrak{x}_s$ mit $s \leqq k$ liegt und damit für die Länge p jeder mit $\mathfrak{x}_p = \mathfrak{F}_k$ endenden Q_l'-Kette von $\mathfrak{F}_k$ gerade $p \geqq k+1$ gilt.

Es sei nun $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_p$ eine Q_l'-Kette von $\mathfrak{F}_k$, für welche die genannte Aussage nicht zutrifft; dabei sei $\mathfrak{x}_s$ diejenige Unterhalbgruppe aus dieser Q_l'-Kette mit dem kleinsten Index s, die wenigstens ein Element C_j oder B_j mit $j \leqq k-s+1$ enthält. Wir skizzieren den weiteren Beweis für den Fall, daß $k-(k-s+1) = s-1$ eine gerade, also s eine ungerade Zahl ist. Wir bilden dann die Halbgruppe $\mathfrak{F}_k$ in der vorn angegebenen Weise homomorph auf ihre Unterhalbgruppe $\mathfrak{F}_{k-s+1}$ ab, wobei die Q'_l-Kette $\mathfrak{x}_1 \subseteqq \mathfrak{x}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}_p$ von $\mathfrak{F}_k$ in eine Q'_l-Kette $\mathfrak{x}'_1 \subseteqq \mathfrak{x}'_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{x}'_p$ von $\mathfrak{F}_{k-s+1}$ übergeht und die Unterhalbgruppe $\mathfrak{x}'_s$ ein Element C_j oder B_j mit $j \leqq k-s+1$ enthält. Wir wählen ein solches Element als $x_s^1 \in \mathfrak{x}'_s$ sowie $a^1 = C_{k-s+1} D_{k-s+1} \in \mathfrak{F}_{k-s+1}$ und zeigen, daß die Bedingung $Q_l^s(\mathfrak{F}_{k-s+1}; \mathfrak{x}'_1, \ldots, \mathfrak{x}'_s)$ nicht erfüllt sein kann. Es gäbe nämlich sonst zu den Elementen $x_s^1 \in \mathfrak{x}'_s$ und $a^1 \in \mathfrak{F}_{k-s+1}$ geeignete Elemente

$$\begin{array}{lll} a^j \in \mathfrak{F}_{k-s+1}, & x_s^j \in \mathfrak{x}'_s & (j=2,3,\ldots,s), \\ b^j \in \mathfrak{F}_{k-s+1}, & y_s^j \in \mathfrak{x}'_s & (j=1,2,\ldots,s), \\ u_j \text{ und } v_j & \text{aus } \mathfrak{x}'_j & (j=1,2,\ldots,s), \end{array}$$

so daß die folgenden Gleichungen erfüllt wären

$$u_\lambda a^\lambda = b^\lambda v_\lambda, \quad u_\lambda x_s^\lambda = y_s^\lambda v_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, s), \tag{4}$$

$$u_s = y_s^s, \quad v_s = x_s^s, \tag{5}$$

$$a^{2i} = a^{2i+1}, \quad x_s^{2i} = x_s^{2i+1}, \quad b^{2i-1} = b^{2i}, \quad y_s^{2i-1} = y_s^{2i}, \tag{6}$$

wobei in (6) der Index i die Werte $1, 2, \ldots, \frac{s-1}{2}$ durchläuft. Für alle Unterhalbgruppen $\mathfrak{x}'_\sigma$ $(\sigma < s)$ gilt nach Wahl von s, daß sie kein Element C_j und kein Element B_j mit $j \leqq k-s+1 \leqq k-\sigma+1$ enthalten und damit wegen 1') auch kein Element, in dessen Darstellung irgendeine Potenz mit von 0 verschiedenem Exponenten dieser Elemente vorkommt. Das bedeutet gerade

$$i_{k-s+1}(u_\lambda) = i_{k-s+1}(v_\lambda) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, s-1). \tag{7}$$

Hiermit erhalten wir aus den Gleichungen von (4) für $\lambda = 1, 2, \ldots, s-1$

$$i_{k-s+1}(a^\lambda) = i_{k-s+1}(b^\lambda) \quad \text{und} \quad i_{k-s+1}(x_s^\lambda) = i_{k-s+1}(y_s^\lambda).$$

Berücksichtigen wir noch die Gleichungen (6), so erhalten wir

$$\begin{aligned} & i_{k-s+1}(a^s) = i_{k-s+1}(a^{s-1}) = i_{k-s+1}(b^{s-1}) = \ldots = 1 \\ & i_{k-s+1}(x_s^s) = i_{k-s+1}(x_s^{s-1}) = i_{k-s+1}(y_s^{s-1}) = \ldots = 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Für jedes Element $f = hC_{k-s+1}^{c_{k-s+1}} D_{k-s+1}^{d_{k-s+1}} \in \mathfrak{F}_{k-s+1}$ (mit $h \in \mathfrak{H}_{k-s}$) setzen wir nun $d(f) = d_{k-s+1}$, und auf Grund der Multiplikationsvorschrift für die Elemente von $\mathfrak{F}_{k-s+1}$ gilt die Regel $d(ff') = d(f') + 2^{i_{k-s+1}(f')} d(f)$. Mit dieser Schreibweise erhalten wir für $\lambda = 1, 2, \ldots, s-1$ aus (4) zusammen mit (7) und (8)

$$d(a^\lambda) \equiv d(v_\lambda) + d(b^\lambda) \quad \text{modulo } 2,$$

$$d(x_s^\lambda) \equiv d(v_\lambda) + d(y_s^\lambda) \quad \text{modulo } 2,$$

also

$$d(a^\lambda) - d(b^\lambda) \equiv d(x_s^\lambda) - d(y_s^\lambda) \quad \text{modulo } 2.$$

Mit Hilfe von (6) erhält man schließlich

(9) $$d(a^1)-d(a^{s-1}) \equiv d(x_s^1)-d(x_s^{s-1}) \quad \text{modulo } 2.$$

Wir ziehen nun noch die erste der beiden noch nicht betrachteten Gleichungen für $\lambda=s$ aus (4) heran, die wegen (5) die Form $y_s^s a^s = b^s x_s^s$ annimmt und

$$d(a^s)+2^{i_{k-s+1}(a^s)}d(y_s^s) = d(x_s^s)+2^{i_{k-s+1}(x_s^s)}d(b^s),$$

also wegen (8)

(10) $$d(a^s) \equiv d(x_s^s) \quad \text{modulo } 2$$

liefert. Aus (9) und (10) erhalten wir schließlich wegen $a^s=a^{s-1}$ und $x_s^s=x_s^{s-1}$ (gemäß (6))

$$d(a^1) \equiv d(x_s^1) \quad \text{modulo } 2,$$

während doch einerseits $d(a^1)=d(C_{k-s+1}D_{k-s+1})=1$ und andererseits $d(x_s^1)=0$ wegen $x_s^1=C_j$ oder $x_s^1=B_j$ gilt. In ähnlicher Weise führt man auch den Fall zum Widerspruch, daß $k-(k-s+1) = s-1$ ein ungerade Zahl, also s eine gerade Zahl ist, nur bildet man jetzt die Halbgruppe $\mathfrak{F}_k$ in der vorn angegebenen Weise homomorph auf ihre Unterhalbgruppe $\mathfrak{H}_{k-s+1}$ ab. Man wählt dann $a^1=A_{k-s+1}B_{k-s+1} \in \in \mathfrak{H}_{k-s+1}$ und zeigt, daß die Bedingung $Q_l^s(\mathfrak{H}_{k-s+1}; x_1', \ldots, x_s')$ nicht erfüllt sein kann.

Die in II) ausgesprochenen Behauptungen über die Halbgruppen $\mathfrak{F}_k$ sind damit bewiesen, womit wegen der Dualität der Halbgruppen $\mathfrak{F}_k$ und $\mathfrak{H}_k$ auch die Aussagen von II) über die Halbgruppen $\mathfrak{H}_k$ richtig sind.

Literaturverzeichnis

[1] K. Murata, On the quotient semi-group of a noncommutative semi-group, *Osaka math. J.*, **2** (1950), 1—5.

[2] H. J. Weinert, Über Halbringe und Halbkörper. II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **14** (1963), 109—227.

[3] H. J. Weinert, Zur Erweiterung algebraischer Strukturen durch Rechtsquotientenbildung, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **16** (1965), 213—214.

[4] H. Seibt, Erweiterung von Halbgruppen durch wiederholte Quotientenbildung. I, *Acta Sci. Math.*, **30** (1969), 137—155.

(Eingegangen am 20. Juli 1968, revidiert am 16. August 1972)