Sur les décompositions directes $C_0 - C_{11}$ des contractions

Par RADU I. TEODORESCU à Braşov (Roumanie)

Le but de cette Note est de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une contraction complètement non-unitaire dont la fonction caractéristique admet un multiple scalaire, soit somme directe (pas nécessairement orthogonale) d'une contraction C_0 et d'une contraction de classe C_{11}.[1])

1. Soit $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*; \Theta(\lambda)\}$ une fonction analytique contractive. On dit que $\Theta(\lambda)$ admet le multiple scalaire $\delta(\lambda)$, $\delta(\lambda)$ étant une fonction analytique scalaire, s'il existe une fonction analytique contractive $\{\mathfrak{E}_*, \mathfrak{E}, \Omega(\lambda)\}$ telle que

$$\Theta(\lambda)\Omega(\lambda) = \delta(\lambda)I_{\mathfrak{E}_*}, \quad \Omega(\lambda)\Theta(\lambda) = \delta(\lambda)I_{\mathfrak{E}}.$$

Rappelons que toute contraction complètement non-unitaire $T \in \mathscr{B}(H)$ admet des triangularisations de type

$$\begin{bmatrix} C_{0\cdot} & * \\ 0 & C_{1\cdot} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} C_{\cdot 1} & * \\ 0 & C_{\cdot 0} \end{bmatrix}$$

par rapport aux décompositions

$$H = H_{0\cdot} \oplus H_{1\cdot} \quad \text{et} \quad H = H_{\cdot 1} \oplus H_{\cdot 0}.$$

On a donc en particulier $T|H_{0\cdot} \in C_{0\cdot}$ et $T|H_{\cdot 1} \in C_{\cdot 1}$. Dans le cas où la fonction caractéristique $\Theta(\lambda)$ de T admet un multiple scalaire, on a aussi

1) $T|H_{0\cdot} \in C_0, \quad T|H_{\cdot 1} \in C_{11};$

2) $H_{0\cdot} = \{h \in H;\, m_{T_0}(T)h = 0\}$, $H_{\cdot 1} = \overline{m_{T_0}(T)H}$ où $m_{T_0}(\lambda)$ est la fonction minimale de $T_0 = T|H_{0\cdot}$;

3) $H_{0\cdot} \cap H_{\cdot 1} = \{0\}, \quad H = H_{0\cdot} \vee H_{\cdot 1};$

4) Si L est un sous-espace de H, invariant à T et tel que $T|L \in C_0$ ou $T|L \in C_{11}$, alors $L \subset H_{0\cdot}$ ou $L \subset H_{\cdot 1}$, selon les cas.

---

[1]) Toutes les définitions et notations sont celles de [4].

Ces propriétés ont été démontrées dans [4] ch. VIII pour le cas où T est une contraction faible. Il est facile de vérifier que les démonstrations données là, conservent leurs validité pour toute contraction complètement non-unitaire T dont la fonction caractéristique admet un multiple scalaire. Pour cela nous ne répétons pas les démonstrations et nous utiliserons les mêmes notations que dans [4] ch. VIII. Notamment nous noterons, dans ce cas, les sous-espaces $H_{0\cdot}$ et $H_{\cdot 1}$ par H_0 et H_1 et nous les appellerons les sous-espaces C_0 et C_{11} de T.

Aussi nous utiliserons dans la suite le modèle fonctionnel (au sens de [4] ch. VI) de T, unitairement équivalent à T. Plus exactement, nous considérons l'opérateur T défini par

$$T^*(u\oplus v) = e^{-it}(u-u(0))\oplus e^{-it}v$$

sur l'espace $H=K_+\ominus G$ où $K_+=H^2(\mathfrak{E}_*)\oplus\overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}$ et $G=\{\Theta w\oplus\Delta w\colon w\in H^2(\mathfrak{E})\}$.

De plus nous noterons $\Delta_*(t)=[I-\Theta(e^{it})\Theta^*(e^{it})]^{1/2}$ et rappelons que

$$\Theta(e^{it})\Delta(t) = \Delta_*(t)\Theta(e^{it}),\quad \Theta^*(e^{it})\Delta_*(t) = \Delta(t)\Theta^*(e^{it}).\text{[2]}$$

2. Pour le début nous déterminerons les espaces $H_{0\cdot}$ et $H_{\cdot 1}$. On sait que $H_{0\cdot}=\{u\oplus v\in H\colon T^n(u\oplus v)\to 0\}$, mais

$$T^n(u\oplus v) = P_+U_+^n(u\oplus v) = (e^{int}u-\Theta w_n)\oplus(e^{int}v-\Delta w_n)$$

où $w_n\in H^2(\mathfrak{E})$ est déterminé par la condition

$$e^{int}(\Theta^*u+\Delta v)-w_n \perp H^2(\mathfrak{E}). \tag{1}$$

Puisque $u\oplus v\in H$ nous aurons $\Theta^*u+\Delta v\perp H^2(\mathfrak{E})$. Soit

$$\Theta^*u+\Delta v = e^{-it}f_1+e^{-2it}f_2+\cdots+e^{-nit}f_n+\cdots.$$

De (1) on déduit que

$$w_n = f_n+e^{it}f_{n-1}+\cdots+e^{(n-1)it}f_1 = e^{nit}(e^{-it}f_1+\cdots+e^{-nit}f_n)$$

donc $\|w_n\|^2\to\|\Theta^*u+\Delta v\|^2$. D'autre part un calcul simple montre que

$$\|T^n(u\oplus v)\|^2 = \|u\|^2+\|v\|^2-\|w_n\|^2.$$

La condition $T^n(u\oplus v)\to 0$ étant équivalente à $\|w_n\|^2\to\|u\|^2+\|v\|^2$ nous avons obtenu l'équivalence $a\Leftrightarrow b$ dans la suivante

Proposition 1. *Soit $u\oplus v\in H$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) $u\oplus v\in H_{0\cdot}$; b) $\|u\|^2+\|v\|^2 = \|\Theta^*u+\Delta v\|^2$; c) $\Theta v = \Delta_*u$.

[2]) Quand il n'y a pas de danger de confusion nous omettrons la variable.

Pour compléter la preuve observons que

$$\|u\|^2+\|v\|^2-\|\Theta^*u+\Delta v\|^2 = (u,u)+(v,v)-(\Theta^*u,\Theta^*u)-(\Theta^*u,\Delta v)-$$
$$-(\Delta v,\Theta^*u)-(\Delta v,\Delta v) = (u,u)+(v,v)-(\Theta\Theta^*u,u)-(\Delta\Theta^*u,v)-(\Theta\Delta v,u)-$$
$$-(\Delta^2 v,v) = (u,u)+(\Theta^*\Theta v,v)-(\Theta\Theta^*u,u)-(\Theta^*\Delta_*u,v)-(\Delta_*\Theta v,u) =$$
$$= (\Delta_*^2u,u)+(\Theta v,\Theta v)-(\Delta_*u,\Theta v)-(\Theta v,\Delta_*u) = \|\Delta_*u-\Theta v\|^2$$

d'où l'équivalence $b\Leftrightarrow c$ est évidente.

Pour déterminer le sous-espace $H_{\cdot 1}$ partons de la relation

$$H_{\cdot 1} = H\ominus H_{\cdot 0} \tag{2}$$

dans laquelle

$$H_{\cdot 0} = \{u\oplus 0\in H\} = \{u\oplus 0\colon\ u\in H^2(\mathfrak{E}_*),\ \Theta^*u\perp H^2(\mathfrak{E})\} =$$
$$= \{u\oplus 0\colon\ u\in H^2(\mathfrak{E}_*),\ u\perp \overline{\Theta H^2(\mathfrak{E})}\} = \{u\oplus 0\colon\ u\in H^2(\mathfrak{E}_*),\ u\perp \Theta_i H^2(\mathfrak{F})\}$$

où $\Theta(\lambda)=\Theta_i(\lambda)\Theta_e(\lambda)$ est la factorisation canonique avec $\{\mathfrak{E},\mathfrak{F},\Theta_e(\lambda)\}$ fonction extérieure et $\{\mathfrak{F},\mathfrak{E}_*,\Theta_i(\lambda)\}$ fonction intérieure. Ainsi nous pouvons affirmer la

Proposition 2. *Le sous-espace $H_{\cdot 1}$ de H est donné par*

$$H_{\cdot 1} = \{u\oplus v\in H\colon\ u\in \Theta_i H^2(\mathfrak{F})\}.$$

Proposition 3. *Soit T une contraction complètement non-unitaire dont la fonction caractéristique $\Theta(\lambda)$ admet un multiple scalaire. S'il existe des sous-espaces L_0 et L_1, invariants à T et tels que $T|L_0\in C_0$, $T|L_1\in C_{11}$ et*

$$H = L_0\dotplus L_1, \tag{3}$$

alors $L_0=H_0$ et $L_1=H_1$.

Démonstration. De la propriété 4 de H_0 et H_1 il résulte que $L_0\subset H_0$ et $L_1\subset H_1$. Pour démontrer l'inclusion $H_0\subset L_0$ soit $h_0\in H_0$. En appliquant (3), h_0 se décompose sous la forme $h_0=l_0+l_1$ où $l_0\in L_0$ et $l_1\in L_1$; mais $T^n l_1=T^n h_0-T^n l_0\to 0$, donc $l_1=0$ et aussi $h_0=l_0\in L_0$ d'où $H_0\subset L_0$. Soit maintenant $h_1\in H_1$, $h_1=l_0'+l_1'$ où $l_0'\in L_0$ et $l_1'\in L_1$. Comme $L_0=H_0$, il résulte que $l_0'\in H_0$, donc $l_0'=h_1-l_1'\in H_0$. Mais comme $h_1-l_1'\in H_1$ et $H_0\cap H_1=\{0\}$ il résulte $l_0'=0$, d'où $h_1=l_1'$. Donc $H_1\subset L_1$.

Corollaire. *Soit T une contraction complètement non-unitaire dont la fonction caractéristique admet un multiple scalaire. S'il existe une décomposition de l'espace*

H en somme directe $H=L_0\dot{+}L_1$ telle que L_0 et L_1 soient des sous-espaces invariants à T et tels que $T|L_0\in C_0$ et $T|L_1\in C_{11}$, alors cette décomposition est unique.

3. Soit T une contraction complètement non-unitaire dont la fonction caractéristique admet un multiple scalaire; supposons que $H=H_0\dot{+}H_1$ et soit P la projection de H sur H_0 parallèle à H_1. Parce que H_0 et H_1 sont invariants à T et $H=H_0\dot{+}H_1$, il résulte que $TP=PT$; donc ([4], ch. II) il existe un opérateur lineaire borné $Y: K_+\to K_+$ tel que

$$\text{i) } YU_+ = U_+Y, \quad \|Y\| = \|P\|, \qquad \text{ii) } YG\subset G, \quad \text{iii) } P = P_+Y|H.$$

D'après [5], Y doit avoir la forme $Y=\begin{bmatrix} A(\cdot) & C(\cdot) \\ B(\cdot) & 0 \end{bmatrix}$ où $A(\cdot)$ est une fonction analytique bornée et $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ sont fortement mesurables bornées telles que

$$A(\cdot):\mathfrak{E}_*\to\mathfrak{E}_*, \quad B(\cdot):\mathfrak{E}_*\to\overline{\Delta\mathfrak{E}}, \quad C(\cdot):\overline{\Delta\mathfrak{E}}\to\overline{\Delta\mathfrak{E}}$$

et de plus

$$A\Theta = \Theta A_0, \quad B\Theta + C\Delta = \Delta A_0 \tag{4}$$

où $A_0(\cdot):\mathfrak{E}\to\mathfrak{E}$ est une fonction analytique bornée.

Puisque $H=H_0\dot{+}H_1$ et $P=P_+Y|H$ les opérateurs P_+Y et $I-P_+Y$ doivent vérifier les conditions:

$$P_+YH\subset H_0, \quad P_+YH_1=\{0\}; \quad (I-P_+Y)H\subset H_1, \quad (I-P_+Y)H_0=\{0\}.$$

Puisque $P_+YG\subset P_+G=\{0\}$ il s'ensuit que

$$P_+YK_+\subset H_0, \quad (I-P_+Y)K_+\subset H_1\oplus G.$$

Nous continuons avec le suivant

Lemme 1. *Les fonctions $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$ vérifient*

$$C(\cdot) \doteq 0, \tag{5}$$

$$\Delta_*A = \Theta B. \tag{6}$$

Pour démontrer (5), soit $0\oplus v\in K_+$. Envisageons la décomposition

$$0\oplus v = \Theta(-w)\oplus(v-\Delta w) + \Theta w\oplus\Delta w$$

où $\Theta(-w)\oplus(v-\Delta w)\in H$ et $\Theta w\oplus\Delta w\in G$. En vertu de la proposition 2 on a de plus $\Theta(-w)\oplus(v-\Delta w)\in H_1$, d'où $P_+Y(0\oplus v)=0$ donc $0\oplus Cv=Y(0\oplus v)\in G$ quel que soit $v\in\overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}$. Il faut donc que pour tout $v\in\overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}$ il existe $w\in H^2(\mathfrak{E})$ tel que $\Theta w=0$

et $\Delta w = Cv$; mais comme $\Theta(\lambda)$ admet un multiple scalaire, en appliquant Ω à la relation $\Theta w = 0$ on trouve $w = 0$, d'où $Cv = 0$ pour tout $v \in \overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}$. Donc $C = 0$.

Pour démontrer la relation (6) nous utilisons les relations (4). Si l'on applique à la première relation Δ_* et à la seconde Θ, on obtient $(\Delta_* A - \Theta B)\Theta = 0$, ou $(\Delta_* A - \Theta B)\Theta\Omega = 0$, d'où $\Delta_* A = \Theta B$.

Lemme 2. *Il existe une fonction analytique bornée* $\{\mathfrak{E}_*, \mathfrak{F}, \Phi(\lambda)\}$ *telle que*

$$I - A = \Theta_i \Phi. \tag{7}$$

Démonstration. Pour $u \oplus v \in K_+$ on a

$$(I - P_+ Y)(u \oplus v) = (u - Au + \Theta w) \oplus (v - Bu + \Delta w)$$

avec un $w \in H^2(\mathfrak{E})$. Mais $(I - P_+ Y)K_+ \subset H_1 \oplus G$ donc

$$u - Au \in \Theta_i H^2(\mathfrak{F}) \quad \text{pour tout} \quad u \in H^2(\mathfrak{E}_*),$$

c'est-à-dire $(I - A)u = \Theta_i t$ avec $t = \Phi u$ où Φ est la multiplication par la fonction $\Phi(\cdot) = \Theta_i^*(\cdot)[I - A(\cdot)]$ qui est évidemment bornée et de plus analytique parce que $\Phi\colon H^2(\mathfrak{E}_*) \to H^2(\mathfrak{F})$.

Lemme 3. *Il existe une fonction analytique bornée* $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{E}, \Psi(\lambda)\}$ *telle que*

$$A\Theta_i = \Theta \Psi. \tag{8}$$

Démonstration. Notons d'abord que pour $\Theta_i u \oplus 0 \in K_+$ on a $P_+ Y(\Theta_i u \oplus 0) = 0$. En effet, si $\Theta_i u \oplus 0 = (\Theta_i u - \Theta w_1) \oplus (-\Delta w_1) + \Theta w_1 \oplus \Delta w_1$ où $(\Theta_i u - \Theta w_1) \oplus (-\Delta w_1) \in H$ et $\Theta w_1 \oplus \Delta w_1 \in G$, il s'ensuit en vertu de la proposition 2 que $(\Theta_i u - \Theta w_1) \oplus$ $\oplus (-\Delta w_1) \in H_1$, d'où

$$P_+ Y(\Theta_i u \oplus 0) = P_+ Y[(\Theta_i u - \Theta w_1) \oplus (-\Delta w_1)] = 0.$$

Mais on a

$$P_+ Y(\Theta_i u \oplus 0) = P_+(A\Theta_i u \oplus B\Theta_i u) = (A\Theta_i u - \Theta w) \oplus (B\Theta_i u - \Delta w)$$

où $w \in H^2(\mathfrak{E})$. Donc on a

$$A\Theta_i u = \Theta w \quad \text{et} \quad B\Theta_i u = \Delta w,$$

et par conséquent $w = \Psi u$ où Ψ est la multiplication par la fonction

$$\Psi(\cdot) = \Theta^*(\cdot)A(\cdot)\Theta_i(\cdot) + \Delta(\cdot)B(\cdot)\Theta_i(\cdot)$$

qui est évidemment bornée et de plus analytique parce que $\Psi\colon H^2(\mathfrak{F}) \to H^2(\mathfrak{E})$.

Donc $A\Theta_i u = \Theta\Psi u$ pour tout $u \in H^2(\mathfrak{F})$ et alors $A\Theta_i = \Theta\Psi$. En tenant compte de (7) et (8) nous trouvons $\Theta_i \Phi \Theta_i + \Theta\Psi = \Theta_i$, mais comme Θ_i est une isométrie,

$$I = \Phi\Theta_i + \Theta_e \Psi.$$

Ainsi nous avons démontré la nécessité dans le suivant

Théorème. *Soit T une contraction complètement non-unitaire dont la fonction caractéristique admet un multiple scalaire et soient H_0, H_1 les sous-espaces C_0 et C_{11} de T, selon les cas. La condition nécessaire et suffisante pour que l'espace H se décompose en somme directe $H=H_0\dotplus H_1$ est qu'il existe des fonctions analytiques bornées $\{\mathfrak{E}_*, \mathfrak{F}, \Phi(\lambda)\}$ et $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{E}, \Psi(\lambda)\}$ telles que*

$$I = \Phi\Theta_i + \Theta_e\Psi \tag{9}$$

où $\Theta(\lambda)=\Theta_i(\lambda)\Theta_e(\lambda)$ est la factorisation canonique de $\Theta(\lambda)$ en ses facteurs intérieur et extérieur.

Il reste à démontrer la suffisance. Soit pour cela $A=I-\Theta_i\Phi$. Parce que $\Theta(\lambda)$ admet un multiple scalaire, le facteur $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{E}_*, \Theta_i(\lambda)\}$ de la factorisation canonique admet aussi un multiple scalaire, donc il existe une fonction analytique contractive $\{\mathfrak{E}_*, \mathfrak{F}, \Omega_i(\lambda)\}$ telle que

$$\Theta_i(\lambda)\Omega_i(\lambda) = \delta_i(\lambda)I_{\mathfrak{E}_*}, \quad \Omega_i(\lambda)\Theta_i(\lambda) = \delta_i(\lambda)I_{\mathfrak{F}}$$

où $\delta_i(\lambda)$ est une fonction scalaire intérieure. Nous posons $B=\delta_i^*\Delta\Psi\Omega_i$ et observons que B satisfait à $\Delta_* A=\Theta B$. En effet,

$$\begin{aligned}\Theta B &= \delta_i^*\Theta\Delta\Psi\Omega_i = \delta_i^*\Delta_*\Theta\Psi\Omega_i = \delta_i^*\Delta_*\Theta_i\Theta_e\Psi\Omega_i = \\ &= \delta_i^*\Delta_*\Theta_i(I-\Phi\Theta_i)\Omega_i = \Delta_*(I-\Theta_i\Phi) = \Delta_* A.\end{aligned}$$

Il est clair que A est analytique bornée et B mesurable bornée. Considérons l'opérateur

$$Y = \begin{bmatrix} A(\cdot) & 0 \\ B(\cdot) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et soit} \quad P = P_+ Y|H.$$

Décomposons les éléments $u\oplus v\in H$ sous la forme

$$u\oplus v = P_+ Y(u\oplus v) + (I-P_+ Y)(u\oplus v).$$

Puisque $P_+ Y(u\oplus v)=(Au-\Theta w)\oplus(Bu-\Delta w)$, on a

$$\Delta_*(Au-\Theta w) = \Theta(Bu-\Delta w), \quad \text{donc} \quad P_+ Y(u\oplus v)\in H_0.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}(I-P_+ Y)(u\oplus v) &= (u-Au+\Theta w)\oplus(v-Bu+\Delta w) = \\ &= (\Theta_i\Phi u+\Theta w)\oplus(v-Bu+\Delta w) = \Theta_i(\Phi u+\Theta_e w)\oplus(v-Bu+\Delta w),\end{aligned}$$

donc

$$(I-P_+ Y)(u\oplus v)\in H_1.$$

De plus cette décomposition est unique parce que $H_0\cap H_1=\{0\}$.

*

Nous remarquons que ce théorème est la généralisation du résultat obtenu par l'auteur dans [6] pour le cas des contractions complètement non-unitaires aux indices de défaut 1, 1.

Corollaire. *Soit T une contraction faible à fonction caractéristique* $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ *ayant les facteurs extérieur* $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \Theta_e(\lambda)\}$ *et intérieur* $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{E}_*, \Theta_i(\lambda)\}$. *Supposons de plus qu'il existe des fonctions analytiques bornées Φ et Ψ telles que*

$$I = \Phi\Theta_i + \Theta_e\Psi.$$

Alors T est un opérateur décomposable.

Démonstration. Il est suffisant d'observer que T peut être décomposé en somme directe $T = T_0 \dotplus T_1$ où $T_0 = T|H_0$ et $T_1 = T|H_1$, que T_0 est décomposable (cf. [2]), que T_1 est décomposable (cf. [1] ch. V) et que la somme directe d'opérateurs décomposables est aussi un opérateur décomposable.

Bibliographie

[1] I. Colojoară—C. Foiaş, *Theory of generalized spectral operators*, Gordon and Breach (New York, 1968).

[2] C. Foiaş, The class C_0 in the theory of decomposable operators, *Revue Roum. Math. Pures et Appl.*, **14** (1969), 1433—1440.

[3] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall (Englewood Cliffs, 1962).

[4] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert space*, North Holland Publ. Co.—Akadémiai Kiadó (Amsterdam—Budapest, 1970).

[5] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, On the structure of intertwining operators, *Acta Sci. Math.*, **35** (1973), 225—254.

[6] I. R. Teodorescu, Décomposition $C_0 - C_{11}$ directe de certaines contractions faibles, *Revue Roum. Math. Pures et Appl.*, **19** (1974) (à apparaître).

UNIVERSITÉ DE BRAŞOV

(Reçu le 15 mai 1973)