Результантная матрица и ее обобщения
I. Результантный оператор матричных полиномов

И. Ц. ГОХБЕРГ и Г. ХАЙНИГ (Кишинев, СССР)

Пусть $a(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\dots+a_n\lambda^n$ и $b(\lambda)=b_0+b_1\lambda+\dots+b_m\lambda^m$ — два полинома с коэффициентами из $\mathbf{C}^1$. Результантом этих полиномов называется определитель следующей матрицы:

$$R(a,b)=\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccc} a_0 & a_1 & \dots & a_n & \dots & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_n & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & \dots & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_m & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}b\\b\\b\\b\end{array}}\right\} n \end{array} \end{array}$$

Как известно,

$$\det R(a,b)=a_n^n b_m^m \prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{m}\left(\lambda_j(a)-\lambda_k(b)\right),$$

где $\lambda_j(a)$ $(j=1,2,\dots,n)$ — полный набор корней полинома $a(\lambda)$. В частности, полиномы $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ имеют хотя бы один общий корень в том и только том случае, когда результант $\det R(a,b)$ обращается в нуль (см., например, [1]). Известен следующий более полный результат (см., например, [2, 3]): число общих корней многочленов $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ (с учетом их кратности) равно числу $m+n-\operatorname{rang} R(a,b)$. Эта связь непосредственно вытекает из следующего предложения.

Теорема 0.1. *Пусть $\lambda_l(l=1,2,\dots,l_0)$ — все различные общие корни полимонов $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ и k_l — кратность общего корня λ_l.*

Тогда система векторов

$$H_k(\lambda_l)=\left(\binom{p}{k}\lambda_l^{p-k}\right)_{p=0}^{m+n-1}\quad(\in\mathbf{C}^{m+n};\ l=1,2,\dots,l_0;\ k=0,1,\dots,k_l-1)$$

образует базис подпространства $\operatorname{Ker} R(a, b)$, *в частности*,

$$\sum_{l=0}^{l_0} k_p = \dim \operatorname{Ker} R(a, b). \tag{0.1}$$

В настоящей статье устанавливаются различные обобщения этой теоремы.

В первой части этой статьи исследуется результантный оператор для матричных полиномов. В отличие от скалярного случая оказалось, что этот оператор как правило определяется прямоугольной матрицей.

Эта часть состоит из пяти параграфов. Первые два носят вспомогательный характер. В третьем доказывается основная теорема, из которой, в частности, вытекает теорема 0.1. В четвертом и пятом параграфах приводятся примеры приложений основной теоремы.

Во второй части статьи будут изложены континуальные аналоги результатов этой статьи.

Авторы начали эти исследования под влиянием бесед с М. Г. Крейном. М. Г. Крейн любезно обратил внимание авторов на связи, существующие между кругом этих вопросов и результатами об обращении конечных теплицевых матриц и их континуальных аналогов [4, 5].

Авторы приносят М. Г. Крейну искреннюю благодарность.

§ 1. Лемма о кратных расширениях систем векторов

1. Пусть L обозначает некоторое линейное пространство и L^m — линейное пространство всех векторов вида $f=(f_j)_{j=0}^{m-1}$ с компонентами $f_j \in L$. Пусть $\mathfrak{F}=\{\varphi_{jk}\colon k=0, 1, \dots, k_j-1; j=1, 2, \dots, j_0\}$ — система векторов из L и λ_0 — некоторое комплексное число. Систему векторов

$$\mathfrak{F}^m(\lambda_0) = \{\Phi_{jk}(\lambda_0)\colon k = 0, 1, \dots, k_j-1; j = 1, 2, \dots, j_0\} \text{ из } L^m, \text{ где}$$

$$\Phi_{jk}(\lambda_0) = (\varphi^p_{jk}(\lambda_0))_{p=0}^{m-1} \quad \text{и} \quad \varphi^p_{jk}(\lambda_0) = \sum_{s=0}^{p} \binom{p}{s} \lambda_0^{p-s} \varphi_{j,k-s} \tag{1.1}$$

назовем m-кратным расширением системы $\mathfrak{F}$ относительно λ_0. Легко видеть, что для векторов $\Phi_{jk}(\lambda_0)$ имеют место равенства

$$\varphi^p_{jk}(\lambda_0) = \frac{d^p}{dt^p} e^{\lambda_0 t} \left(\varphi_{jk} + \frac{t}{1!} \varphi_{j,k-1} + \dots + \frac{t^k}{k!} \varphi_{j0} \right) \Bigg|_{t=0}. \tag{1.2}$$

Имеет также место следующая рекуррентная формула:

$$\varphi^{p+1}_{jk}(\lambda_0) = \lambda_0 \varphi^p_{jk}(\lambda_0) + \varphi^p_{jk-1}(\lambda_0) \quad (k = 0, 1, \dots, k_j-1; j = 1, 2, \dots, j_0), \tag{1.3}$$

в которой полагается $\varphi^p_{j,-1}(\lambda_0)=0$. В самом деле, из равенства (1.1) вытекает, что

$$\varphi^{p+1}_{jk}(\lambda_0)-\lambda_0\varphi^p_{jk}(\lambda_0) = \sum_{s=0}^{p+1}\left(\binom{p+1}{s}\lambda_0^{p-s+1}\varphi_{j,k-s}(\lambda_0)-\binom{p}{s}\lambda_0^{p-s+1}\varphi_{j,k-s}(\lambda_0)\right)$$
$$= \sum_{s=0}^{p+1}\binom{p}{s-1}\lambda_0^{p-s+1}\varphi_{j,k-s}(\lambda_0).$$

Таким образом,

$$\varphi^{p+1}_{jk}(\lambda_0)-\lambda_0\varphi^p_{jk}(\lambda_0) = \sum_{s=0}^{p}\binom{p}{s}\lambda_0^{p-s}\varphi_{j,k-1-s}(\lambda_0) = \varphi^p_{j,k-1}(\lambda_0).$$

Из формулы (1.3) без труда выводится следующая более общая формула:

$$\varphi^{p+r}_{jk}(\lambda_0) = \sum_{s=0}^{p}\binom{r}{s}\lambda_0^{r-s}\varphi^p_{j,k-s}(\lambda_0) \quad (r=1,2,\ldots). \tag{1.4}$$

В самом деле, для $r=1$ формула (1.4) совпадает с (1.3). Пустъ равенство (1.4) верно. Тогда

$$\varphi^{p+r+1}_{jk}(\lambda_0) = \lambda_0\varphi^{p+r}_{jk}(\lambda_0)+\varphi^{p+r}_{j,k-1}(\lambda_0) =$$
$$= \sum_{s=0}^{r}\left(\binom{r}{s}\lambda_0^{r+1-s}\varphi^p_{j,k-s}(\lambda_0)-\binom{r}{s-1}\lambda_0^{r+1-s}\right)\varphi_{j,k-s}(\lambda_0)$$

и, следовательно,

$$\varphi^{p+r+1}_{jk}(\lambda_0) = \sum_{s=0}^{r+1}\binom{r+1}{s}\lambda_0^{r+1-s}\varphi^p_{j,k-s}(\lambda_0).$$

2. В дальнейшем существенную роль играет следующее предложение.

Лемма 1.1. *Пусть* $\Lambda=\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_l\}$ — *система различных комплексных чисел и* $\mathfrak{F}_l$ $(l=1,2,\ldots,l_0)$ — *системы векторов из* L:

$$\mathfrak{F}_l = \{\varphi_{jk,l}\colon k=0,1,\ldots,k_{jl}-1;\ j=1,2,\ldots,j_l\}.$$

Если при каждом $l=1,2,\ldots,l_0$ *система векторов* $\varphi_{j0,l}$ $(j=1,2,\ldots,j_l)$ *линейно независима и число* m *удовлетворяет условию*

$$m \geqq \sum_{l=1}^{l_0}\max_{j=1,2,\ldots,j_l} k_{jl} \tag{1.5}$$

то система векторов

$$\mathfrak{F}^m(\Lambda) = \bigcup_{l=1}^{l_0}\mathfrak{F}^m_l(\lambda_l)\ ^{1)}$$

является также линейно независимой.

---

[1]) Здесь и в дальнейшем мы через $\bigcup_{l=1}^{l_0}\mathfrak{F}^m_l(\lambda_l)$ обозначим систему (!)

$$\{\Phi_{jk,l}(\lambda_l)\colon k=0,1,\ldots,k_{jl}-1;\ j=1,2,\ldots,j_l;\ l=1,2,\ldots,l_0\}.$$

Доказательство. Очевидно, в доказательстве достаточно ограничиться случаем, когда

$$m = \sum_{l=1}^{l_0} \max_{j=1,2,\dots,j_l} k_{jl}.$$

Введем в рассмотрение операторные матрицы

$$\Pi_r(\lambda) = \|\pi_{st}^r I\|_{s,t=1}^{m-1} \quad (r = 0, 1, \dots, m-1)$$

где

$$\pi_{st}^r = \begin{cases} \delta_{st} & (s \leqq r) \\ (-\lambda)^{s-t}\binom{s-r}{t-r} & (s > r) \end{cases}$$

и I — единичный оператор в пространстве L. Выясним теперь, как оператор $\Pi_r(\lambda)$ действует на векторы $\Phi_{jk}(\lambda_l) = (\varphi_{jk,l}^p(\lambda_l))_{p=0}^{m-1}$ системы $\mathfrak{F}^m(\Lambda)$. В первую очередь отметим, что оператор $\Pi_r(\lambda)$ не меняет первые $r+1$ компоненты вектора $\Phi_{jk,l}(\lambda_l)$.

Рассмотрим системы векторов

(1.6) $$\mathfrak{G}_r^m(\lambda, \lambda_l) = \{P_r \Pi_r(\lambda) \Phi_{jk,l}(\lambda_l) \colon k = 0, 1, \dots, k_{jl}-1;\ j = 1, 2, \dots, j_l\}$$

где

$$P_r = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & I & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & I \end{bmatrix}}_{m}\right\}{\scriptstyle m-r},$$

$$l = 1, 2, \dots, l_0 \quad \text{и} \quad r = 0, 1, \dots, m-1.$$

Докажем, что каждая из этих систем векторов является $(m-r)$ — кратным расширением относительно $\lambda_l - \lambda$ соответствующей системы векторов

$$\mathfrak{G}_r(\lambda_l) = \{\varphi_{jk,l}^r(\lambda_l) \colon k = 0, 1, \dots, k_{jl}-1;\ j = 1, 2, \dots, j_l\}.$$

Положим

$$(\psi_{jk,l}^p)_{p=0}^{m-1-r} = P_r \Pi_r(\lambda) \Phi_{jk,l}(\lambda_l).$$

Тогда

$$\psi_{jk,l}^p = \sum_{s=r}^{p+r} (-\lambda)^{p+r-s} \binom{p}{s-r} \varphi_{jk,l}^s(\lambda_l) = \sum_{u=0}^{p} (-\lambda)^u \binom{p}{u} \varphi_{jk,l}^{p+k-u}(\lambda_l).$$

В силу (1.4)

$$\varphi_{jk,l}^{p-u+r}(\lambda_l) = \sum_{s=0}^{p-u} \lambda_l^{p-u-s} \binom{p-u}{s} \varphi_{j,k-s,l}^r(\lambda_l),$$

следовательно,

$$\psi_{jk,l}^p = \sum_{u=0}^{p} \sum_{s=0}^{p-u} \lambda_l^{p-u-s} (-\lambda)^u \binom{p}{u} \binom{p-u}{s} \varphi_{j,k-s,l}^r.$$

Учитывая, что

$$\binom{p-u}{s}\binom{p}{u}=\binom{p-s}{u}\binom{p}{s}$$

получим

$$\psi^p_{jk,l}=\sum_{s=0}^{p}\sum_{u=0}^{p-s}\lambda_l^{p-u-s}(-\lambda)^u\binom{p-s}{u}\binom{p}{s}\varphi^r_{j,k-s,l}(\lambda_l).$$

Таким образом,

$$\psi^p_{jk,l}=\sum_{s=0}^{p}(\lambda_l-\lambda)^{p-s}\binom{p}{s}\varphi^r_{j,k-s,l}(\lambda_l);$$

Последнее и означает, что система векторов $\mathfrak{G}^m_r(\lambda,\lambda_l)$ является $(m-r)$-кратным расширением системы $\mathfrak{G}^m_r(\lambda,\lambda_l)$ относительно $\lambda_l-\lambda$.

Рассмотрим систему $\mathfrak{F}^{(1)}_m(\lambda_l)$ векторов

$$\Phi^{(1)}_{jk}(\lambda_l)=\Pi_0(\lambda)\,\Phi_{jk,l}(\lambda_l)\quad(k=0,1,\ldots,k_{jl}-1;\,j=1,2,\ldots,j).$$

Из предыдущих рассуждений вытекает, что система $\mathfrak{F}^{(1)}_m(\lambda_l)$ представляет собой m-кратное расширение системы $\mathfrak{F}_l$ $(l=1,2,\ldots,l_0)$ относительно $\lambda_l-\lambda_1$. В частности, векторы $\Phi^{(1)}_{jk}(\lambda_1)$ имеют вид

$$\Phi^{(1)}_{jk}(\lambda_1)=\begin{bmatrix}\varphi_{jk,1}\\ \vdots\\ \varphi_{j0,1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\quad(k=0,1,\ldots,k_{j1}-1;\;j=1,2,\ldots,j_1).$$

Образуем теперь систему $\mathfrak{F}^{(2)}_m(\lambda_l)$ векторов $\Phi^{(2)}_{jk}(\lambda_l)=\Pi_{\varkappa_1}(\lambda_2-\lambda_1)\,\Phi^{(1)}_{jk}(\lambda_l)$ $(k=0,1,\ldots,k_{jl}-1;\,j=1,2,\ldots,l_0)$, где $\varkappa_1=\max\limits_{j=1,2,\ldots,j_1}k_{j1}$. Тогда система векторов $P_{\varkappa_1}\Phi^{(2)}_{jk}(\lambda_l)$ представляет собой $(m-\varkappa_1)$-кратное расщирение векторов $\varphi^{\varkappa_1}_{jk,l}(\lambda_l-\lambda_1)$ относительно $\lambda_l-\lambda_1-(\lambda_2-\lambda_1)=\lambda_l-\lambda_2$. В частности, $P_{\varkappa_1}\Phi^{(2)}_{jk}(\lambda_1)=0$, а векторы $P_{\varkappa_1}\Phi^{(2)}_{jk}(\lambda_2)$ имеют вид

$$P_{\varkappa_1}\Phi^{(2)}_{jk}(\lambda_2)=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}*\\ \vdots\\ *\\ (\lambda_2-\lambda_1)^{\varkappa_1}\varphi_{jk,2}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} & \begin{array}{c}\\ \\ \\ \leftarrow k\\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

где звездочкой заменены векторы, которые в дальнейшем не играют роли.

Продолжим этот процесс так далее: по системе $\mathfrak{F}^{(s)}_m(\lambda_l)$ векторов $\Phi^{(s)}_{jk}(\lambda_l)$ $(k=0,1,\ldots,k_{jl}-1;\;j=1,\ldots,j_l)$ построим систему $\mathfrak{F}^{(s+1)}_m(\lambda_l)$ векторов $\Phi^{(s+1)}_{jk}(\lambda_l)=$

$=\Pi_{\varkappa_s}(\lambda_{s+1}-\lambda_s)\Phi_{jk}^{(s)}$, где $\varkappa_s=\sum_{l=1}^{s}\max_{j=1,2,\ldots,j_s}k_{jl}$. Для векторов $P_{\varkappa_s}\Phi_{jk}^{(s+1)}(\lambda_l)$, где $l=1, 2, \ldots, s$, имеют место равенства $P_{\varkappa_s}\Phi_{jk}^{(s+1)}(\lambda_l)=0$, а векторы $P_{\varkappa_s}\Phi_{jk}^{(s+1)}(\lambda_{s+1})$ имеют вид

$$\begin{array}{l}\begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ (\lambda_{s+1}-\lambda_s)^{\varkappa_s}\varphi_{jk, s+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array} \quad (k=0, 1, \ldots, k_{j,s+1}-1;\ j=1, 2, \ldots, j_{s+1}).$$

Наконец, построим системы $\mathfrak{F}_m^{(l_0)}(\lambda_l)$ $(l=1, 2, \ldots, l_0)$. Для векторов этой системы $P_{\varkappa_{l_0-1}}\Phi_{jk}^{(l_0)}(\lambda_l)=0$ при $l\neq l_0$, а векторы $P_{\varkappa_{l_0-1}}\Phi_{jk}^{(l_0)}(\lambda_{l_0})$ имеют вид

$$\begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ (\lambda_{l_0}-\lambda_{l_0-1})^{\varkappa_{l_0-1}}\varphi_{jk, l_0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \end{array} \tag{1.7}$$

Докажем теперь, что система векторов

$$\mathfrak{F}_m^{(l_0)}(\Lambda) \doteq \bigcup_{l=1}^{l_0}\mathfrak{F}_m^{(l_0)}(\lambda_l)$$

линейно независима. Пусть

$$\sum_{l=1}^{l_0}\sum_{j=1}^{j_l}\sum_{k=0}^{k_{jl}-1}\alpha_{jkl}\Phi_{jk}^{(l_0)}(\lambda_l)=0.$$

Тогда

$$\sum_{j,k,l}\alpha_{jkl}P_{\varkappa_{l_0-1}}\Phi_{jk}^{(l_0)}(\lambda_l)=\sum_{j=1}^{j_{l_0}}\sum_{k=0}^{k_{jl}-1}\alpha_{jkl_0}P_{\varkappa_{l_0-1}}\Phi_{jk}^{(l_0)}(\lambda_{l_0})=0.$$

Так как векторы $P_{\varkappa_{l_0-1}}\Phi_{jk}^{(l_0)}(\lambda_{l_0})$ имеют вид (1.7) и векторы φ_{j0,l_0} $(j=1, 2, \ldots, j_l)$ линейно независимы, то

$$\alpha_{jkl_0}=0 \quad (k=0, 1, \ldots, k_{jl_0}-1;\ j=1, 2, \ldots, j_{l_0}).$$

Таким образом,

$$\sum_{l=1}^{l_0-1}\sum_{j=1}^{j_l}\sum_{k=0}^{k_{jl}-1}\alpha_{jkl}\Phi_{jk}^{(l_0)}(\lambda_l)=0.$$

Применяя к этому равенству оператор $P_{\varkappa_{l_0-2}}$, получим, что $\alpha_{jk,l_0-1}=0$ ($k=0, 1, \ldots, k_{jl_0-1}-1; j=1, \ldots, j_{l_0-1}$). Продолжая этот процесс аналогичным образом, получим, что $\alpha_{jks}=0$ ($k=0, 1, \ldots, k_{js}-1; j=1, 2, \ldots, j_s$) для $s=l_0-2, l_0-3, \ldots, 1$. Из линейной независимости системы $\mathfrak{F}_m^{(l_0)}(\Lambda)$ вытекает линейная независимость системы $\mathfrak{F}^m(\Lambda)$.

Лемма доказана.

Без труда можно убедиться в том, что даже в случае $L=\mathbf{C}^1$ условие (1.5) существенно в формулировке леммы 1.1.

3. Из леммы 1.1 выводится следующая

Лемма 1.2. *Пусть* $\Lambda=\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{l_0}\}$ — *множество комплексных чисел и* $\mathfrak{F}_l$ ($l=1, 2, \ldots, l_0$) — *система векторов из* L:

$$\mathfrak{F}_l = \{\varphi_{jk,l}\colon k = 0, 1, \ldots, k_{jl}-1;\ j = 1, 2, \ldots, j_l\}.$$

Если число m *удовлетворяет условию* (1.5) *и*

$$\sum_{l=1}^{l_0}\sum_{j=1}^{j_l}\sum_{k=0}^{k_{jl}-1}\alpha_{jkl}\Phi_{jk,l}(\lambda_l) = 0 \quad (\alpha_{jkl}\in\mathbf{C}^1), \tag{1.6}$$

то

$$\Phi_{k,l}(\lambda_l) = \sum_j \alpha_{jkl}\Phi_{jk,l}(\lambda_l) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, \max_j k_{jl}-1;\ l = 1, 2, \ldots, l_0),$$

где суммирование распространяется на все индексы j, *для которых* $k_{jl}\geqq k$.

Доказательство. Образуем систему

$$\mathfrak{G}_l = \Big\{\varphi_{k,l} = \sum_j \alpha_{jkl}\varphi_{jk,l}\colon \varphi_{0,l}\neq 0;\ k = 0, 1, \ldots, \max_j k_{jl}-1\Big\} \quad (l = 1, 2, \ldots, l_0)$$

и предположим, что она непуста. Тогда, очевидно, система $\mathfrak{G}_l^m=\{\Phi_{k,l}(\lambda_l)\colon k= =0, 1, \ldots, \max\limits_j k_{jl}-1\}$ является m-кратным расширением системы $\mathfrak{G}_l$. Применяя к системе $\mathfrak{G}=\bigcup\limits_{l=1}^{l_0}\mathfrak{G}_l$ лемму 1.1, получим, что система векторов $\Phi_{k,l}(\lambda_l)$ линейно независима. Последнее противоречит равенству (1.7). Таким образом, $\mathfrak{G}_l=\emptyset$, что означает $\varphi_{0,l}=0$ ($l=1, 2, \ldots, l_0$).

Теперь образуем системы

$$\mathfrak{G}_{l,1} = \Big\{\varphi_{k,l}^{(1)} = \varphi_{k+1,l}\colon \varphi_{1,l}\neq 0,\ k = 0, 1, \ldots, \max_j k_{jl}-2\Big\} \quad (l = 1, 2, \ldots, l_0).$$

Как легко видеть, m-кратное расширение системы $\mathfrak{G}_{l,1}$ состоит из векторов $\Phi_{k+1,l}(\lambda_l)=\Phi_{k,l,1}(\lambda_l)$ ($\varphi_{1,l}\neq 0$; $k=0, \ldots, \max\limits_j k_{jl}-2$). Следовательно, применяя снова лемму 1.1, получим $\mathfrak{G}_{1,l}=\emptyset$, что означает $\varphi_{1,l}=0$ ($l=1, 2, \ldots, l_0$).

Продолжая этот процесс далее, получим $\varphi_{r,l}=0$ ($l=1, 2, \ldots, l_0$) для $r=2, 3, \ldots, \max\limits_{j,l} k_{jl}-1$.

Лемма доказана.

§ 2. Вспомогательные предложения

1. Пусть d — натуральное число и $A(\lambda)=A_0+\lambda A_1+\dots+\lambda^n A_n$ матричный пучок с коэффициентами $A_k\in L(\mathbf{C}^d)$. [2]) Всюду в дальнейшем будем предполагать, что матрица A_n обратима.

Число $\lambda_0\in\mathbf{C}^1$ называется характеристическим числом пучка $A(\lambda)$ если $\det A(\lambda_0)=0$. Если для некоторого вектора $\varphi_0\in\mathbf{C}^d$ $(\varphi_0\neq 0)$ имеет место равенство $A(\lambda_0)\varphi_0=0$, то вектор φ_0 называется собственным вектором пучка $A(\lambda)$, отвечающим числу λ_0. Цепочка векторов $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_r$ называется цепочкой (длины $r+1$) из собственного и присоединенных векторов, если имеют место равенства

$$(2.1)\quad A(\lambda_0)\varphi_k+\frac{1}{1!}\left(\frac{d}{d\lambda}A\right)(\lambda_0)\varphi_{k-1}+\dots+\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}A\right)(\lambda_0)\varphi_0=0 \quad (k=0, 1, \dots, r).$$

Пусть λ_0 — характеристическое число пучка $A(\lambda)$. Без труда доказывается, что в ядре матрицы $A(\lambda_0)$ можно построитъ базис $\varphi_{10}, \varphi_{20}, \dots, \varphi_{r0}$ со следующим свойством:

Для каждого вектора φ_{j0} существует цепочка присоединенных векторов $\varphi_{j1}, \varphi_{j2}, \dots, \varphi_{j,k_j-1}$, где $k_1\geqq k_2\geqq\dots\geqq k_r$ и число $k_1+k_2+\dots+k_r$ равно кратности нуля функции $\det A(\lambda)$ в точке λ_0.

Числа k_j $(j=1, 2, \dots, r)$ называются частными кратностями характеристического числа λ_0, а система $\varphi_{j0}, \varphi_{j1}, \dots, \varphi_{j,k_j-1}$ $(j=1, 2, \dots, r)$ — канонической системой собственных и присоединенных векторов пучка $A(\lambda)$, отвечающих характеристическому числу λ_0.

Лемма 2.1. *Пусть $\Lambda=\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l\}$ — полный набор всех различных характеристических чисел пучка $A(\lambda)=A_0+\lambda A_1+\dots+\lambda^n A_n$ с коэффициентами $A_k\in L(\mathbf{C}^d)$ и пусть*

$$\mathfrak{F}_l=\{\varphi_{jk,l}\colon k=0, 1, \dots, k_{jl}-1;\ j=1, 2, \dots, j_l\}\quad (l=1, 2, \dots, q)$$

— каноническая система собственных и присоединенных векторов пучка $A(\lambda)$, отвечающих характеристическому числу λ_l.

Тогда при любом натуральном m система [3])

$$\mathfrak{F}^{m+n}(\Lambda)=$$
$$=\bigcup_{l=1}^{l_0}\mathfrak{F}_l^{m+n}(\lambda_l)=\left\{\Phi_{jk,l}(\lambda_l)=\left(\varphi_{jk,l}^{p}(\lambda_l)\right)_{p=0}^{m-1}\colon j=1, \dots, j_l;\ k=0, \dots, k_{jl}-1\right\}$$

---

[2]) Через $L(\mathbf{C}^d)$ обозначается пространство квадратных матриц порядка d.

[3]) Напомним, что система $\mathfrak{F}^{m+n}(\lambda_l)$ является $(m+n)$-кратным расширением системы $\mathfrak{F}$ относительно λ_l (см. определние в § 1).

является базисом ядра оператора

$$\mathscr{A}_m = \left.\begin{bmatrix} A_0 & A_1 \dots A_n & \dots & 0 \\ \vdots & A_0 \dots A_{n-1} & A_n & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & A_0 \dots A_{n-1} & A_n \end{bmatrix}\right\} m$$

действующего из $\mathbf{C}^{(m+n)d}$ *в* $\mathbf{C}^{md}$.

Доказательство. Докажем сначала, что равенство

$$\sum_{p=r}^{n+r} A_{p-r}\varphi_{jk,l}^{p}(\lambda_l) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, j_l) \tag{2.2}$$

верно для $k=0$ и любого r. В самом деле, так как $\varphi_{j0,l}^{p}(\lambda_l)=\lambda_l^p\varphi_{j0,l}$, то

$$\sum_{p=r}^{n+r} A_{p-r}\varphi_{j0,l}^{p}(\lambda_l) = \sum_{p=r}^{n+r} \lambda_l^p A_{p-r}\varphi_{j0,l} = \lambda_l^r A(\lambda_l)\varphi_{j0,l} = 0.$$

Предположим, что равенство (2.2) верно для любого r и $k=k_0$. Тогда оно верно и для $k=k_0+1$ и любого r. В самом деле, по предположению имеем

$$0 = \sum_{p+r}^{n+r} A_{p-r}\varphi_{jk_0,l}^{p}(\lambda_l) = \lambda_l \sum_{p=r}^{n+r}\sum_{s=0}^{p}\binom{p}{s}\lambda_l^{p-s}A_{p-r}\varphi_{j,k_0-s,l}$$
$$= \sum_{p=r}^{n+r}\sum_{s=0}^{p}\binom{p}{s-1}\lambda_l^{p-s}A_{p-r}\varphi_{j,k_0+1-s,l}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum_{p=r}^{n+r} A_{p-r}\varphi_{j,k_0+1}^{p}(\lambda_0) = \sum_{p=r}^{n+r}\sum_{s=0}^{p}\left(\binom{p}{s}\lambda_l^{p-s}A_{p-r}\varphi_{j,k_0+1-s,l} - \binom{p}{s-1}\lambda_l^{p-s}A_{p-r}\varphi_{j,k_0+1-s,l}\right)$$
$$= \sum_{p=r}^{n+r}\sum_{s=1}^{p-1}\binom{p-1}{s-1}\lambda_l^{p-s}A_{p-r}\varphi_{j,k_0+1-s,l}$$
$$= \sum_{p=r-1}^{n+r-1} A_{p-(r-1)}\varphi_{jk_0,l}^{p}(\lambda_l) = 0.$$

Таким образом, доказано, что для любого $k=0, 1, \dots, k_{jl}-1$ и любого $r=0, 1, \dots, m-1$ имеет место равенство (2.2). Отсюда вытекает, что $\Phi_{jk,l}(\lambda_l)\in\operatorname{Ker}\mathscr{A}_m$.

Система $\mathfrak{F}^{m+n}(\Lambda)$ состоит из nd векторов. Согласно лемме 1.1 эта система линейно независима. С другой стороны, очевидно,

$$\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A}_m = (m+n)d - md = nd.$$

Таким образом, $\operatorname{Ker}\mathscr{A}_m=\operatorname{lin}\mathfrak{F}^{m+n}(\Lambda)$. [4])

Лемма доказана.

---

[4]) Через $\operatorname{lin}\mathfrak{F}$ обозначается линейная оболочка системы векторов $\mathfrak{F}$.

2. Лемма 2.2. *Пусть*

$$\mathfrak{F}_l = \{\varphi_{jk,l}\colon k = 0, 1, \ldots, k_{jl}-1;\ j = 1, 2, \ldots, j_l\} \quad (l = 1, 2, \ldots, q)$$

— система векторов из пространства $\mathbf{C}^d$ *и* $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q\}$ *— конечное множество комплексных чисел. Пусть далее* $\mathfrak{F}_l^{m+n}(\lambda_l)$ $(m+n)$*-кратное расширение системы* $\mathfrak{F}_l$ *относительно* λ_l *и вектор*

$$\Omega = \sum_{l=1}^{q} \sum_{j=1}^{j_l} \sum_{k=0}^{k_{jl}-1} \alpha_{jkl} \Phi_{jk,l}(\lambda_l) \quad (\in \mathbf{C}^{(m+n)d}),$$

где $\alpha_{jkl} \in \mathbf{C}^1$ *принадлежит ядру оператора* $\mathscr{A}_m$*. Если число* m *удовлетворяет условию*

$$m \geqq \sum_{l=1}^{q} \max_j k_{jl}, \ ^{5)}$$

то все векторы

$$\Omega_{k,l} = \sum_j \alpha_{jkl} \Phi_{jk,l}(\lambda_l) \quad (k = 0, 1, \ldots, \max k_{jl}-1;\ l = 1, \ldots, q) \tag{2.3}$$

где суммирование распространяется на все индексы j*, для которых* $k_{jl} \geqq k$ *принадлежат ядру оператора* $\mathscr{A}_m$*.*

Доказательство. Положим

$$\psi_{jk,l} = \sum_{p=0}^{n} A_p \varphi_{jk,l}^p(\lambda_l),$$

$$\mathfrak{G}_l = \{\psi_{jk,l}\colon j = 1, 2, \ldots, j_l;\ k = 0, 1, \ldots, k_{jl}-1\} \quad (l = 1, 2, \ldots, q)$$

и

$$\tilde{\Psi}_{jk,l} = (\psi_{jk,l}^p)_{p=0}^{m-1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{A}_m \Phi_{jk,l}(\lambda_l).$$

Докажем, что система $\tilde{\mathfrak{G}}_l = \{\tilde{\Psi}_{jk,l}\colon k = 0, 1, \ldots, k_{jl}-1;\ l = 1, 2, \ldots, q\}$ представляет собой m-кратное расширение отностительно λ_l системы $\mathfrak{F}_l$, т.е. $\mathfrak{F}_l^m(\lambda_l) = \tilde{\mathfrak{G}}_l$.

Имеет место равенство

$$\psi_{jk,l}^s = \sum_{p=s}^{s+n} A_{p-s} \varphi_{jk,l}^p(\lambda_l) = \sum_{p=0}^{n} A_p \varphi_{jk,l}^{p+s}(\lambda_l).$$

В силу (1.4)

$$\varphi_{jk,l}^s = \sum_{p=0}^{n} \sum_{u=0}^{s} \binom{s}{u} \lambda_l^{s-u} \varphi_{j,k-u,l}^p(\lambda_l).$$

Следовательно,

$$\psi_{jk,l}^s = \sum_{p=0}^{n} \sum_{u=0}^{s} \binom{s}{u} \lambda_l^{s-u} A_p \varphi_{j,k-u,l}^p(\lambda_l) = \sum_{u=0}^{s} \binom{s}{u} \lambda_l^{s-u} \psi_{j,k-u,l}.$$

Отсюда вытекает, что $\tilde{\psi}_{jk,l}^s = \psi_{jk,l}^s(\lambda_l)$ и $\tilde{\Psi}_{jk,l} = \Psi_{jk,l}(\lambda_l)$.

---

[5]) Отметим, что это условие заведомо выполняется, если $m \geqq nd$.

Пусть

$$\Omega = \sum_{l=1}^{q} \sum_{j=1}^{j_l} \sum_{k=0}^{k_{jl}-1} \Phi_{jk,l}(\lambda_l) \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}_m .$$

Тогда

$$\mathscr{A}_m \Omega = \sum_{l=1}^{q} \sum_{j=1}^{j_l} \sum_{k=0}^{k_{jl}-1} \alpha_{jkl} \tilde{\Psi}_{jk,l} .$$

В силу леммы 1.2 отсюда вытекает

$$\sum_j \alpha_{jkl} \tilde{\Psi}_{jk,l} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, k_{jl}-1;\ l = 1, 2, \ldots, q),$$

где, суммирование происходит по всем j, для которых $k_{jl} \geqq k$.

Лемма доказана.

Отметим, что в условиях леммы 2.2 может оказаться, что все векторы $\Phi_{jk,l}(\lambda_l)$ не принадлежат ядру оператора $\mathscr{A}_m$ для любого m. В этом можно убедиться на следующем примере.

Рассмотрим при $d=2$ пучок $A(\lambda) = A_0 + \lambda I$, где

$$A_0 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Положим $\Lambda = \{1, -1\}$, $\mathfrak{F}_1 = \{\varphi_{10}\}$, $\mathfrak{F}_2 = \{\varphi_{20}\}$, где $\varphi_{10} = (0; 1)$ и $\varphi_{20} = (1; -1)$. Пусть m — произвольное натуральное число. Тогда, очевидно, система $\mathfrak{F}_1^m(1)$ состоит из единственного вектора $\Phi_{10,1}(1) = (\underbrace{0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1}_{2m})$, а система $\mathfrak{F}_2^m(-1)$ — из вектора $\Phi_{20,2}(-1) = (\underbrace{-1, 1, -1, 1, \ldots, -1, 1}_{2m})$. Оператор $\mathscr{A}_m$ в рассматриваемом случае определяется равенством

$$\mathscr{A}_m = \left.\begin{bmatrix} A_0 & I & \ldots & 0 \\ \vdots & A_0 & I & \vdots \\ & & \ddots \quad \ddots & \\ 0 & \ldots & A_0 & I \end{bmatrix}\right\} m$$

Легко видеть, что $\mathscr{A}_m(\Phi_{10,1}(1) + \Phi_{20,2}(-1)) = 0$, в то время как $\mathscr{A}_m \Phi_{10,1}(1) \neq 0$ и $\mathscr{A}_m \Phi_{20,2}(-1) \neq 0$.

3. Лемма 2.3. *Пусть* $\mathfrak{F} = \{\varphi_k : k = 0, 1, \ldots, k_0\}$[6]) — *система векторов из* $\mathbf{C}^d$ *и* $\mathfrak{F}^m = \{\Phi_k(\lambda_0) = (\varphi_k^p(\lambda_0))_{p=0}^{m-1}\}$ — *ее* m*-кратное расширение относительно* $\lambda_0 (\in \mathbf{C}^1)$. *Если* $m > k_0$ *и вектор* $\Phi_{k_0}(\lambda_0)$ *принадлежит ядру оператора* $\mathscr{A}_m$, *то* λ_0 *является характеристическим числом пучка* $A(\lambda)$, *а* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k_0}$ *представляет собой цепочку из собственного и присоединенных векторов.*

---

[6]) Здесь индекс k соответствует второму индексу векторов из определения m-кратного расширения.

Доказательство: Пусть $\psi_k = \sum_{p=0}^{n} A_p \varphi_k^p$. Повторяя соответствующее место из доказательства леммы 2.2, покажем, что система $\tilde{\mathfrak{G}} = \{\mathscr{A}_m \Phi_k(\lambda_0): k = 0, 1, \ldots, k_0\}$ является m-кратным расширением системы $\mathfrak{G} = \{\psi_k : k=0, 1, \ldots, k_0\}$. Следовательно, согласно (1.3) имеет место равенство

$$\psi_{p+1}^k = \lambda_0 \psi_k^p + \psi_{k-1}^p,$$

где $\mathscr{A}_m \Phi_k(\lambda_0) = (\psi_k^p)_{p=0}^{m-1}$.

Поскольку $\psi_{k_0}^p = 0$ $(p=0, 1, \ldots, m-1)$ и $m > k_0$, то отсюда вытекает, что $\psi_k = 0$ для $k = 0, 1, \ldots, k_0$. Последнее означает, что

$$0 = \sum_{p=0}^{n} A_p \varphi_k^p = \sum_{p=0}^{n} \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} \lambda_0^{p-r} A_p \varphi_{k-r}.$$

Так как

$$\left(\frac{d^r}{d\lambda^r} A\right)(\lambda) = r! \sum_{p=0}^{n} \binom{p}{r} \lambda^{p-r} A_p,$$

то

$$0 = \sum_{r=0}^{k} \frac{1}{r!} \left(\frac{d^r}{d\lambda^r} A\right)(\lambda_0) \varphi_{k-r} \quad (k = 0, 1, \ldots, k_0).$$

Это означает, что $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k_0}$ является цепочкой из собственного и присоединенных векторов пучка $A(\lambda)$, соответствующей характеристическому числу λ_0.

Лемма доказана.

§ 3. Основная теорема

1. Пусть

$$A(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \cdots + \lambda^n A_n \quad \text{и} \quad B(\lambda) = B_0 + \lambda B_1 + \cdots + \lambda^m B_m$$

— два матричных пучка с коэффициентами $A_j, B_k \in \mathbf{C}^d$ $(j=0, 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, m)$. Пусть φ_0 — общее характеристическое число пучков $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ и

$$\mathfrak{K} = \operatorname{Ker} A(\lambda_0) \cap \operatorname{Ker} B(\lambda_0).$$

Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ — цепочка собственного и присоединенных векторов одновременно для пучков $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$, соответствующая характеристическому числу λ_0. Число $r+1$ называется длиной этой цепочки. Наибольщая длина такой цепочки, начинающейся вектором φ_0, назовем рангом общего собственного вектора φ_0 и обозначим через $\operatorname{rang}(\lambda_0, \varphi_0)$.

В подпространстве $\mathfrak{K}$ выберем базис $\varphi_{10}, \varphi_{20}, \ldots, \varphi_{j_0 0}$, ранги векторов которого обладают следующими свойствами: k_1 является максимальным из чисел $\operatorname{rang}(\lambda_0, \varphi)$ $(\varphi \in \mathfrak{K})$, а k_j $(j=2, 3, \ldots, j_0)$ является максимальным из чисел rang (λ_0, φ) для всех векторов прямого дополнения к lin $\{\varphi_{10}, \varphi_{20}, \ldots, \varphi_{j-1,0}\}$ в $\mathfrak{K}$, содержащего φ_{j0}.

Легко видеть, что число rang (λ_0, φ_0) для любого вектора $\varphi_0 \in \mathfrak{K}$ равно одному из чисел k_j $(j=1, 2, \ldots, j_0)$. Следовательно, числа k_j $(j=1, 2, \ldots, j_0)$ определяются однозначно пучками $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$.

Обозначим через $\varphi_{j1}, \varphi_{j2}, \ldots, \varphi_{j,k_j-1}$ соответствующую общую для $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ цепочку присоединенных векторов к собственному вектору φ_{j0} $(j=1, 2, \ldots, j_0)$.

Систему

$$\varphi_{j0}, \varphi_{j1}, \ldots, \varphi_{j,k_j-1} \quad (j = 1, 2, \ldots, j_0)$$

назовем канонической системой общих собственных и присоединенных векторов пучков $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$, отвечающих характеристическому числу λ_0, а число

$$\nu(A, B, \lambda_0) \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{j_0} k_j$$

назовем общей кратностью характеристического числа λ_0 пучков $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$.

2. Пучкам $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ и целому числу $w > \max\{n, m\}$ сопоставим оператор

$$R_w(A, B) = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \ldots A_n & & \ldots & 0 \\ \vdots & A_0 \ldots A_{n-1} & A_n & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots A_0 & \ldots & A_{n-1} & A_n \\ B_0 & B_1 \ldots B_m & & \ldots & 0 \\ \vdots & B_0 \ldots B_{m-1} & B_m & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots B_0 & & B_{m-1} & B_m \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} w-n \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} w-m \end{matrix}$$

действующий из пространства $\mathbf{C}^{wd}$ в $\mathbf{C}^{(2w-m-n)d}$.

Условимся $R_w(A, B)$ называть результантным оператором или результантной матрицей пучков $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$.

Теорема 3.1. *Пусть*

$$A(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \cdots + \lambda^n A_n \quad \text{и} \quad B(\lambda) = B_0 + \lambda B_1 + \cdots + \lambda^m B_m \tag{3.1}$$

— два матричных пучка $(A_j, B_k \in \mathbf{C}^d)$ *с обратимыми старшими коэффициентами* A_n *и* B_m; $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l\}$ *— множество всех (различных) общих характеристических чисел пучков* $A(\lambda)$ *и* $B(\lambda)$ *и*

$$\mathfrak{F}_l = \{\varphi_{jk,l}\colon k = 0, 1, \ldots, k_{jl} - 1;\ j = 1, 2, \ldots, j_l\} \quad (l = 1, 2, \ldots, q)$$

— каноническая система общих собственных и присоединенных векторов пучков $A(\lambda)$ *и* $B(\lambda)$*, отвечающих характеристическому числу* λ_l.

Если выполняется условие

$$w \geqq \min\{n+md,\ m+nd\}\ ^{7}), \tag{3.2}$$

то система

$$\mathfrak{F}^w(A) = \bigcup_{l=1}^{q} \mathfrak{F}_l^w(\lambda_l)$$

является базисом подпространства $\operatorname{Ker} R_w(A, B)$.

В частности, при условии (3.1) *имеет место равенство*

$$\nu(A, B) = \dim \operatorname{Ker} R_w(A, B) \quad \text{где} \quad \nu(A, B) = \sum_{l=1}^{q} \nu(A, B, \lambda_l).$$

Доказательство. Без ограничения общности можно предполагать, что $m \geqq n$.

Из леммы 2.1 вытекает, что $\mathfrak{F}^w(A) \subset \operatorname{Ker} \mathscr{A}_{w-n}$ и $\mathfrak{F}^w(A) \subset \operatorname{Ker} \mathscr{B}_{w-n}$, следовательно, $\mathfrak{F}^w(A) \subset \operatorname{Ker} R_w(A, B) = \operatorname{Ker} \mathscr{A}_{w-n} \cap \operatorname{Ker} \mathscr{B}_{w-m}$.

Пусть теперь $\Omega \in \operatorname{Ker} R_w(A, B)$. Тогда $\Omega \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}_{w-n}$ и в силу леммы 2.1 Ω можно представить в виде

$$\Omega = \sum_{l=1}^{q} \sum_{j=1}^{j_l} \sum_{k=0}^{k_{jl}-1} \alpha_{jkl} \Phi_{jk,l}(\lambda_l),$$

где $\quad \mathfrak{F}_l^w(A) = \{\Phi_{jk,l}(\lambda_l)\colon j = 1, 2, \ldots, j_l;\ k = 0, 1, \ldots, k_{jl}-1\}$.

Отсюда в силу леммы 2.2 вытекает, что

$$\Omega_k(\lambda_l) = \sum_j \alpha_{jkl} \Phi_{jk,l}(\lambda_l) \in \operatorname{Ker} \mathscr{B}_{w-m}$$

при $k = 0, 1, \ldots, k_{jl}-1$, $l = 1, 2, \ldots, q$, где суммирование происходит по всем j, для которых $k_{jl} \geqq k$. Согласно лемме 2.3 векторы

$$\omega_{kr}(\lambda_l) = \sum_j \alpha_{jkl} \varphi_{jr}(\lambda_l) \quad (r = 0, 1, \ldots, k;\ k = 0, 1, \ldots, k_l - 1;\ k_l = \max_j k_{jl})$$

образуют цепочку из собственного и присоединенных векторов пучка $B(\lambda)$. Так как, кроме того, векторы $\omega_{kr}(\lambda_l)$ $(r = 0, 1, \ldots, k)$ также представляют собой цепочку из собственного и присоединенных векторов пучка $A(\lambda)$ мы пришли к выводу, что векторы $\Omega_k(\lambda_l)$ можно представить в виде линейной комбинации

---

[7]) Легко видеть, что приводимое доказательство теоремы остается в силе, если условие (3.1) заменить следующим менее стеснительным условием

$$w \geqq \min\left\{n + \sum_{l=1}^{q} \max_j k_{jl}(B);\ m + \sum_{l=1}^{q} \max_j k_{jl}(A)\right\} \tag{3.2'}$$

где $\{k_{jl}(C)\colon j = 1, \ldots, j_l(C)\}$-набор частных кратностей пучка $C(\lambda)$.

векторов из $\mathfrak{F}^w(A)$. Следовательно, вектор Ω является линейной комбинацией векторов из $\mathfrak{F}^w(A)$.

Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Пучки* $A(\lambda)$ *и* $B(\lambda)$ *из* (3.1) *имеют общее характеристическое число* λ_0 *и общий собственный вектор, отвечающий* λ_0 *в том и только том случае, когда ранг результантной матрицы* $R_w(A, B)$ *при* $w \geqq \min\{md+n;\ nd+m\}$ *меньше максимального.*

3. Теорема 0.1, сформулированная во введении, без труда выводится из теоремы 3.1. Классическая результантная матрица $R(a, b)$, приведенная во введении, очевидно, совпадает с $R_{m+n}(a, b)$. В этом случае (при $d=1$), очевидно, условие (3.2) выполняется. Следовательно, $\operatorname{Ker} R(a, b)$ состоит из линейной оболочки векторов

$$\Phi_k(\lambda_l) = \left((\varphi_k^p(\lambda_l))\right)_{p=0}^{m+n-1}, \quad \text{где} \quad \varphi_k^p(\lambda_l) = \sum_{s=0}^{k} \binom{p}{s} \lambda_l^{p-s}.$$

Так как

$$\Phi_k(\lambda_l) = \sum_{s=0}^{k} H_s(\lambda_l) \quad \text{и} \quad H_k(\lambda_l) = \Phi_k(\lambda_l) - \Phi_{k-1}(\lambda_l),$$

то отсюда непосредственно вытекает справедливость теоремы 0.1.

В случае $d>1$ для классической результантной матрицы, т.е. для $R_{m+n}(A, B)$, можно лишь утверждать следующее:

$$\operatorname{Ker} R_{m+n}(A, B) = \operatorname{Ker} \mathscr{A}_m \cap \operatorname{Ker} \mathscr{B}_n$$

и

$$\nu(A, B) \leqq \dim \operatorname{Ker} R_{m+n}(A, B).$$

Эти соотношения непосредственно вытекают из леммы 2.1.

Приведем еще одно утверждение для классической результантной матрицы при $d \neq 1$.

Пусть $\mathfrak{F}(\lambda_l, A)\,(\mathfrak{F}(\mu_l, B))$ — каноническая система собственных и присоединенных векторов пучка $A(\lambda)\,(B(\lambda))$, отвечающих характеристическому числу $\lambda_l(\mu_l)$. Тогда число $\dim \operatorname{Ker} R_{m+n}(A, B)$ равно коразмерности подпространства

$$\operatorname{lin} \mathfrak{F}^{m+n}(A) \cup \mathfrak{F}^{m+n}(B), \quad \text{где} \quad \mathfrak{F}^{m+n}(A) = \bigcup_l \mathfrak{F}^{m+n}(\lambda_l, A), \quad \mathfrak{F}^{m+n}(B) = \bigcup_l \mathfrak{F}^{m+n}(\mu_l, B).$$

В частности, оператор $R_{m+n}(A, B)$ обратим в том и только том случае, когда система $\mathfrak{F}^{m+n}(A) \cup \mathfrak{F}^{m+n}(B)$ полна в $\mathbf{C}^{(m+n)d}$.

Легко видеть, что для $w=m+n$ при $d>1$ условие (3.2′) выполняется только в некоторых частных случаях. Условие (3.2) (и соответствующее условие (3.2′)) теоремы 3.1 является существенным, для классической результантной матрицы теорема 3.1, вообще говоря, не имеет места. В этом можно убедиться на следующем примере.

Пусть

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}1+\lambda & 0\\ -1 & -1+\lambda\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B(\lambda)=\begin{bmatrix}1+\lambda & 1\\ 1 & 1+\lambda\end{bmatrix}.$$

Тогда ядро результантной матрицы $R_2(A, B)$ состоит из множества векторов $(-1, 1, 1, 0)t$ ($t\in\mathbf{C}^1$). С другой стороны, пучок $A(\lambda)$ имеет характеристические числа ± 1, а пучок $B(\lambda)$ имеет характеристические числа $0, -2$. Таким образом, $\nu(A, B)=0$, а $\dim \operatorname{Ker} R_2(A, B)=1$.

§ 4. Приложения

Приведем два приложения результатов из § 3.

1. Начнем с обобщения метода исключения неизвестного из системы двух уравнений с двумя неизвестными (см., например, [1], гл. 11, § 54).

Пусть $A(\lambda, \mu)$ и $B(\lambda, \mu)$ — матричные пучки двух переменных

$$\left.\begin{aligned} A(\lambda, \mu) &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\lambda^j\mu^k A_{jk}\\ B(\lambda, \mu) &= \sum_{j=0}^{q}\sum_{k=0}^{p}\lambda^j\mu^k B_{jk}\end{aligned}\right\} \quad \big(\lambda, \mu\in\mathbf{C}^1;\ A_{jk}, B_{jk}\in L(\mathbf{C}^d)\big).$$

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$A(\lambda, \mu)\varphi = 0, \quad B(\lambda, \mu)\varphi = 0 \tag{4.1}$$

с неизвестными числами λ и μ и неизвестным вектором $\varphi\in\mathbf{C}^d$ ($\varphi\neq 0$). Сделаем следующие предположения:

а) для некоторого $\mu=\mu_0\in\mathbf{C}^1$ система (4.1) не имеет решения;

б) определители $\det\sum_{k=0}^{m}\mu^k A_{nk}$ и $\det\sum_{k=0}^{p}\mu^k B_{qk}$ не равны тождественно нулю;

в) определители $\det\sum_{j=0}^{n}\lambda^j A_{jm}$ и $\det\sum_{j=0}^{p}\lambda^j B_{jp}$ не равны тождественно нулю.

Пусть выполнены условия а) и б). Запишем пучки $A(\lambda, \mu)$ и $B(\lambda, \mu)$ по степеням переменной λ:

$$A(\lambda, \mu) = A_0(\mu)+\lambda A_1(\mu)+\cdots+\lambda^n A_n(\mu)$$

$$B(\lambda, \mu) = B_0(\mu)+\lambda B_1(\mu)+\cdots+\lambda^q B_q(\mu)$$

где $A_j(\mu) = \sum_{k=0}^{m} \mu^k A_{jk}$ и $B_j(\mu) = \sum_{k=0}^{p} \mu^k B_{jk}$, и положим

$$R_w(\mu) = \begin{bmatrix} A_0(\mu) & A_1(\mu) \ldots A_n(\mu) & & \ldots & 0 \\ \vdots & A_0(\mu) \ldots A_{n-1}(\mu) & & A_n(\mu) & \vdots \\ & \ddots & & \ddots & \ddots \\ 0 & \ldots & A_0(\mu) \ldots & A_{n-1}(\mu) & A_n(\mu) \\ B_0(\mu) & B_1(\mu) \ldots B_m(\mu) & & \ldots & 0 \\ \vdots & B_0(\mu) \ldots B_{m-1}(\mu) & & B_m(\mu) & \vdots \\ & \ddots & & & \ddots \\ 0 & \ldots & B_0(\mu) \ldots & B_{m-1}(\mu) & B_m(\mu) \end{bmatrix}$$

Пусть M_0 (конечное) множество нулей функции $\det A_n(\mu) B_q(\mu)$. Если w обладает свойством

$$w \geqq \min \{nd+q;\ qd+n\},$$

то для всех $\mu \notin M_0$ можно применить следствие 3.1. Следовательно, множество точек μ, для которых существует решение системы (4.1), состоит из точек множества M_1 чисел $\mu_0 \notin M_0$, для которых

(4.2) $$\operatorname{rang} R_w(\mu_0) < w$$

и, быть может, некоторых точек из множества M_0.

Подставляя в (4.1) вместо переменной μ точки μ_0 множества $M_0 \cup M_1$, получим

(4.3) $$\left.\begin{aligned} A(\lambda, \mu_0)\varphi &= 0 \\ B(\lambda, \mu_0)\varphi &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (\mu_0 \in M_0 \cup M_1).$$

Этим путем разыскание решений системы (4.1) сведено к разысканию решений системы с одним неизвестным числом и одним неизвестным вектором.

Предположим теперь, что кроме условий а) и б), выполняется еще условие в). Тогда описанный процесс можно повторить, поменяв местами переменные μ и λ. Пусть Λ_0 — множество всех нулей функции

$$\det \left(\sum_{j=0}^{n} \lambda^j A_{jm} \right) \left(\sum_{j=0}^{p} \lambda^j B_{jp} \right).$$

Множество чисел λ, для которых система (4.1) имеет решение, состоит из множества Λ_1 всех точек λ_0, для которых

(4.4) $$\operatorname{rang} \tilde{R}_w(\lambda_0) < w \text{ [8]}$$

и, быть может, некоторых точек из множества Λ_0.

---

[8] $\tilde{R}_w(\lambda)$ определяется подобно $R_w(\mu)$.

Таким образом, осталось решить системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} A(\lambda_0, \mu_0)\varphi &= 0 \\ B(\lambda_0, \mu_0)\varphi &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

где λ_0 пробегает множество $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$, а μ_0 пробегает множество $M_0 \cup M_1$.

2. Рассмотрим однородные дифференциальные уравнения

$$A_n\left(\frac{d^n}{dt^n}\varphi\right)(t)+\cdots+A_1\left(\frac{d}{dt}\varphi\right)(t)+(A_0\varphi)(t) = 0 \tag{4.6}$$

$$B_m\left(\frac{d^m}{dt^m}\psi\right)(t)+\cdots+B_1\left(\frac{d}{dt}\psi\right)(t)+(B_0\psi)(t) = 0 \tag{4.7}$$

где $A_j, B_k \in L(\mathbf{C}^d)$ и матрицы A_n и B_m обратимы. Этим уравнениям отвечают матричные пучки $A(\lambda)=\sum_{k=0}^{n} \lambda^k A_k$ и $B(\lambda)=\sum_{k=0}^{m} \lambda^k B_k$.
Имеется тесная связь между решениями уравнения (4.6) с собственными и присоединенными векторами пучка $A(\lambda)$. Общее решение уравнения является линейной комбинацией вектор-функций вида

$$\varphi(t) = e^{\lambda_0 t}\left(\frac{t^k}{k!}\varphi_0+\cdots+\frac{t}{1!}\varphi_{k-1}+\varphi_k\right) \tag{4.8}$$

где $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ пробегают все цепочки из собственного и присоединенных векторов пучка $A(\lambda)$. Таким образом, из теоремы 3.1 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathfrak{R}$ — подпространство общих решений уравнений* (4.6) *и* (4.7). *Если число w удовлетворяет условию*

$$w \geqq \min\{nd+m, md+n\},$$

то имеет место равенство

$$\dim \mathfrak{R} = \dim \operatorname{Ker} R_w(A, B).$$

С помощью этой теоремы и метода из п. 1 можно указать способ для решения системы дифференциальных уравнений, зависящих от параметра μ вида

$$\left.\begin{aligned} A_n(\mu)\left(\frac{d^n}{dt^n}\varphi\right)(t)+\cdots+A_1(\mu)\left(\frac{d}{dt}\varphi\right)(t)+A_0(\mu)\varphi(t) &= 0 \\ B_m(\mu)\left(\frac{d^m}{dt^m}\varphi\right)(t)+\cdots+B_1(\mu)\left(\frac{d}{dt}\varphi\right)(t)+B_0(\mu)\varphi(t) &= 0 \end{aligned}\right\},$$

где $A_k(\mu)$ и $B_k(\mu)$ — матричные пучки.

Рассмотрим еще одну задачу. Пусть даны $m+n$ векторов χ_k ($k=0, 1, \ldots, m+n-1$) из пространства $\mathbf{C}^d$. Будем искать все пары функций $(\varphi(t), \psi(t))$, где

$\varphi(t)$ — решение уравнения (4.6), а $\psi(t)$ — решение уравнения (4.7), которые удовлетворяют начальным условиям

$$\text{(4.9)}\qquad \frac{d^k}{dt^k}\big(\varphi(t)+\psi(t)\big)\big|_{t=0} = \chi_k \quad (k=0,1,\dots,m+n-1).$$

Эта задача имеет для любого набора векторов χ_k $(k=0,1,\dots,m+n-1)$ единственное решение в том и только том случае, когда классическая результантная матрица $R_{m+n}(A, B)$ обратима.

В самом деле, построим для каждого решения $\varphi(t)$ уравнения (4.6) $\big(\psi(t)$ уравнения (4.7)$\big)$ вектор-функцию

$$\Phi(t) = \left(\left(\frac{d^k}{dt^k}\varphi\right)(t)\right)_{k=0}^{m+n-1} \quad \left(\Psi(t) = \left(\left(\frac{d^k}{dt^k}\psi\right)(t)\right)_{k=0}^{m+n-1}\right).$$

Полагая $X=(\chi_k)_{k=0}^{m+n-1}$, видим, что начальные условия (4.9) принимают вид

$$\Phi(0)+\Psi(0) = X.$$

Если вектор-функция $\varphi(t)$ пробегает все решения уравнения (4.6) $\big(\psi(t)$ — все решения (4.7)$\big)$, то из равенства (1.2) непосредственно вытекает, что векторы $\Phi(0)$ $\big(\Psi(0)\big)$ пробегают систему векторов $(m+n)$-кратного расширения $\mathfrak{F}^{m+l}$ $(\mathfrak{G}^{m+l})$ систем из собственных и присоединенных векторов пучка $A(\lambda)$ $\big($пучка $B(\lambda)\big)$. Следовательно, задача имеет для любого $X\in \mathbf{C}^{(m+n)d}$ решение в том и только том случае, когда объединение систем $\mathfrak{F}^{m+l}$ и $\mathfrak{G}^{m+l}$ является полным в $\mathbf{C}^{(m+n)d}$. Как отмечалось в § 3, последнее имеет место тогда и только тогда, когда матрица $R_{m+n}(A, B)$ обратима. Легко видеть, что в этом случае решение является единственным.

§ 5. Ядро безутианты

I. В качестве еще одного приложения теоремы 0.1 дадим описание ядра безутианты двух полиномов в случае, когда $d=1$.

Пусть $a(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\dots+a_n\lambda^n$ и $b(\lambda)=b_0+b_1\lambda+\dots+b_m\lambda^m$ $(m\leqq n)$ — два полинома $(a_k, b_k\in \mathbf{C}^1;\ a_n\neq 0)$. Рассмотрим полином двух переменных

$$B(\lambda,\mu) = \frac{a(\lambda)b(\mu)-a(\mu)b(\lambda)}{\lambda-\mu} = \sum_{p,q=0}^{n-1} b_{pq}\lambda^p\mu^q.$$

Безутиантой полиномов $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ называется квадратная матрица $\mathscr{B}(a,b)= =\|b_{pq}\|_{p,q=0}^{n-1}$. Как известно (см., например, [2, 3]), дефект безутианты равен степени наибольшего общего делителя полиномов $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$. Это утверждение допускает следующее уточнение.

Теорема 5.1. *Ядро безутианты $\mathscr{B}(a,b)$ полиномов $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ состоит из линейной оболочки векторов*

$$\varphi_{jk} = \left(\binom{p}{k}\lambda_j^p\right)_{p=0}^{n-1} \quad (k=0,1,\dots,\nu_j-1;\ j=1,2,\dots,l)$$

где λ_j $(j=1, 2, \ldots, l)$ — *все общие нули полиномов* $a(\lambda)$ *и* $b(\lambda)$, *а* ν_j — *общая кратность нуля* λ_j.

Доказательство. Для безутианты $\mathscr{B}(a, b)$ имеет место равенство (см. [3]):

$$\mathscr{B}(a,b) = \tag{5.1}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & \ldots & a_n & \vdots \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_n & & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-1} \\ \vdots & b_0 & \ldots & b_{n-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & & b_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 & \ldots & b_{n-1} & b_n \\ b_2 & \ldots & b_n & \vdots \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ b_n & & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ \vdots & a_0 & \ldots & a_{n-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & & a_0 \end{bmatrix}.$$

Образуем матрицы

$$\tilde{A}_n = \begin{bmatrix} a_n & \ldots & & 0 \\ a_{n-1} & a_n & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \quad A_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ \vdots & a_0 & \ldots & a_{n-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & & a_0 \end{bmatrix} \quad \varDelta = [\delta_{j,\,n-k-1}]_{j,k=0}^{n-1}$$

и соответственно матрицы $\tilde{B}_n$ и B_n. Тогда равенство (5.1) примет вид

$$\mathscr{B}(a,b) = \varDelta(\tilde{A}_n B_n - \tilde{B}_n A_n). \tag{5.2}$$

Следовательно, уравнение $\mathscr{B}(a, b)\varphi=0$ эквивалентно уравнению

$$(\tilde{A}_n B_n - \tilde{B}_n A_n)\varphi = 0. \tag{5.3}$$

В приведенных обозначениях, очевидно,

$$R(b,a) = \begin{bmatrix} B_n & \tilde{B}_n \\ A_n & \tilde{A}_n \end{bmatrix}.$$

Легко убедиться в справедливости равенства

$$\begin{bmatrix} B_n & \tilde{B}_n \\ A_n & \tilde{A}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \tilde{B}_n \tilde{A}_n^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_n - \tilde{B}_n \tilde{A}_n^{-1} A_n & 0 \\ 0 & \tilde{A}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \tilde{A}_n^{-1} A_n & I \end{bmatrix}.$$

Очевидно, матрицы $\tilde{B}_n$ и $\tilde{A}_n$ перестановочны, следовательно,

$$B_n - \tilde{B}_n \tilde{A}_n^{-1} A_n = \tilde{A}_n^{-1}(\tilde{A}_n B_n - \tilde{B}_n A_n). \tag{5.4}$$

Пусть

$$\begin{bmatrix} B_n & \tilde{B}_n \\ A_n & \tilde{A}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = 0. \tag{5.5}$$

Тогда из равенств (5.2)—(5.4) следует $\mathscr{B}(a, b)f=0$. Наоборот, если $\mathscr{B}(a, b)f=0$, то имеет место равенство (5.5) при $g=\tilde{A}_n^{-1}A_n f$. Осталось воспользоваться теоремой 0.1.

Теорема доказана.

2. Пусть заданы два полинома вида

$$x(\lambda) = x_0 + x_1\lambda + \cdots + x_n\lambda^n \quad \text{и} \quad y(\lambda) = y_0 + y_{-1}\lambda^{-1} + \cdots + y_{-n}\lambda^{-n} \tag{5.6}$$

($x_n \neq 0$ или $y_{-n} \neq 0$). Безутиантой многочленов $x(\lambda)$ и $y(\lambda)$ называется квадратная матрица $\tilde{\mathscr{B}}(x, y) = \|b_{pq}\|_{p,q=0}^{n-1}$, где

$$\sum_{p,q=0}^{n-1} b_{pq}\lambda^p \mu^q = \frac{x(\lambda)y(\mu^{-1}) - (\lambda\mu)^n x(\mu^{-1})y(\lambda)}{1-\lambda\mu}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что

$$\tilde{\mathscr{B}}(x, y) =$$

$$= \begin{bmatrix} x_0 & \dots & & 0 \\ x_1 & x_0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ x_{n-1} & x_{n-2} & \dots & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 & y_{-1} & \dots & y_{1-n} \\ \vdots & y_0 & \dots & y_{2-n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{-n} & \dots & & 0 \\ y_{1-n} & y_{-n} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ y_{-1} & y_{-2} & \dots & y_{-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n & x_{n-1} & \dots & x_1 \\ \vdots & x_n & \dots & x_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & x_n \end{bmatrix}.$$

Для безутианты $\tilde{\mathscr{B}}(x, y)$ имеет место теорема, аналогичная теореме 5.1. Для полноты приведем ее формулировку.

Теорема 5.2. *Ядро безутианты многочленов $x(\lambda)$ и $y(\lambda)$ вида* (5.6) *состоит из линейной оболочки векторов $\varphi_{jk} = \left(\lambda_j^p \binom{p}{k}\right)_{p=0}^{n-1}$ $(k=0, 1, \dots, k_j-1)$ где λ_j $(j = 1, 2, \dots, l)$ — все общие нули функций $x(\lambda)$ и $y(\lambda)$, а k_j — общая кратность нуля λ_j.*

Литература

[1] А. Г. Курош, *Курс высшей алгебры*, Наука (Москва, 1968).

[2] М. Г. Крейн, М. А. Неймарк, *Метод эрмитовых и симметрических форм в теории отделения корней алгебраических уравнений* (Харьков, 1936).

[3] Ф. И. Ландер, Безутианта и обращение ганкелевых матриц, *Матем. исслед. Кишинев*, **9**: 2 (1974), 69—87.

[4] И. Ц. Гохберг, А. А. Семенцул, Об обращении конечных теплицевых матриц и их континуальных аналогов, *Матем. исслед. Кишинев*, **7**; 2 (1972), 201—223.

[5] И. Ц. Гохберг, Г. Хайниг, Обращение конечных теплицевых матриц, составленных из элементов некоммутативной алгебры, *Revue roumaine math. pures et appl.* **14,** 5 (1974), 623—663.

[6] И. Ц. Гохберг, Г. Хайниг, О матричных интегральных операторах на конечном интервале с ядрами, зависящими от разности аргументов, *Revue roumaine math. pures et appl.* (в печати).

[7] М. Г. Крейн, О расположении корней многочленов, ортогональных на единичной окружности по знакопеременному весу, *Теория функций, функциональный анализ и их приложения*, Харьков **2** (1966), 131—137.

[8] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука (Москва, 1965).

[9] И. Ц. Гохберг, Е. И. Сигал, Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше, *Матем. сборник*, **84**; 4 (1971), 607—630.

(Поступило 21/I/1974г.)