Acta Sci. Math., 38 (1976), 73—78

Zur Charakterisierung von Vereinigungserweiterungen von Halbgruppen durch partielle Morphismen

H. JÜRGENSEN

In [4, 5] führte VERBEEK den Begriff der Vereinigungserweiterung von Halbgruppen ein. Er gewann diesen als eine Verallgemeinerung des Begriffs der Idealerweiterung. VERBEEK [4, 5] und der Verfasser [2, 3] zeigten, daß Idealerweiterungen und Vereinigungserweiterungen in vieler Hinsicht eng verwandt sind. Im folgenden befassen wir uns mit der bekannten teilweisen Charakterisierung von Idealerweiterungen durch partielle Morphismen [1, Satz 4.19.]. Wir geben eine Verallgemeinerung für Vereinigungserweiterungen an; interessant daran scheint uns insbesondere, daß der zweite der Teil der Aussage — jede Idealerweiterung eines Monoids wird durch einen partiellen Morphismus definiert — sich mit einer einfachen Zusatzbedingung auf den Fall der Vereinigungserweiterungen übertragen läßt.

Für in dieser Arbeit nicht definierte Begriffe verweisen wir auf [1, 2, 5].

Den in [1] eingeführten Begriff des partiellen Morphismus verallgemeinernd, definieren wir sogenannte i-partielle Morphismen.

Definition 1. A, S seien Halbgruppen, i ein idempotentes Element von S und $S_i := S\setminus\{i\}$. Eine Abbildung

$$f\colon \{s \mid s\in S_i,\ i\in S^1sS^1\} \to A : s \mapsto \bar{s} := f(s)$$

mit den folgenden Eigenschaften heißt *i-partieller Morphismus von S in A:*

(P0) $\forall s, t\in S_i\colon st \neq i \wedge i\in S^1sS^1 \wedge i\in S^1tS^1 \to \bar{s}\,\bar{t} = \overline{st}$.

(P1) $\forall s\in S_i\colon is \neq i = isi \neq si \to \overline{is} = \overline{si}$ ist Nullelement.

(P2) $\forall s\in S_i\colon is \neq i = si \to \forall a, b\in A\colon a\bar{s}b = \overline{is}b$.

(P3) $\forall s\in S_i\colon is = i \neq si \to \forall a, b\in A\colon b\bar{s}a = b\overline{si}$.

(P4) $\forall s, t\in S_i\colon is \neq i = ist \to \forall a\in A\colon a\bar{s}\bar{t} = \overline{is}\bar{t}$.

Eingegangen am 14. Oktober 1974.

(P5) $\forall s, t \in S_i: ti \neq i = sti \rightarrow \forall a \in A: \bar{s}\bar{t}a = \bar{s}\overline{ti}$.

(P6) $\forall s, t \in S_i: si \neq i = sit \neq it \rightarrow \overline{si}\bar{t} = \bar{s}\overline{it}$.

Satz 1. *A, S seien Halbgruppen, i ein idempotentes Element von S, $S_i := S \setminus \{i\}$ und $s \mapsto \bar{s}$ ein i-partieller Morphismus von S in A. Durch die Abbildung $s \mapsto \bar{s}$ wird eine Vereinigungserweiterung $(E, *)$ von A mit S bezüglich i folgendermaßen festgelegt:*

$$\text{(M1)} \quad s*t = \begin{cases} st, & \text{falls} \quad st \neq i, \\ \bar{s}\bar{t}, & \text{falls} \quad st = i, \end{cases} \qquad \text{(M2)} \quad a*s = \begin{cases} is, & \text{falls} \quad is \neq i, \\ a\bar{s}, & \text{falls} \quad is = i, \end{cases}$$

$$\text{(M3)} \quad s*a = \begin{cases} si, & \text{falls} \quad si \neq i, \\ \bar{s}a, & \text{falls} \quad si = i, \end{cases} \qquad \text{(M4)} \quad a*b = ab,$$

mit $s, t \in S_i$ und $a, b \in A$.

Falls umgekehrt $(E, *)$ Vereinigungserweiterung von A mit S bezüglich i ist und eine Abbildung $f: \{s | s \in S_i,\ i \in S^1 s S^1\} \rightarrow A$ mit $\bar{s} := f(s)$ den Bedingungen P0 *und* M1—M4 *genügt, so hat f auch die Eigenschaften* P1—P6.

Beweis. Zum Beweis des ersten Teils der Aussage ist die Assoziativität von $*$ zu zeigen. Dazu unterscheiden wir 8 Fälle, die wir mit AAA, AAS_i, ... bezeichnen — je nach der Herkunft der Elemente eines Tripels. Die Fälle AAA, AAS_i und S_iAA sind leicht nachzurechnen; P0—P6 werden dabei nicht benutzt. Sei nun $a, b \in A$, $s \in S_i$. Für AS_iA ergibt sich:

$$(a*s)*b = \begin{Bmatrix} is*b & \text{für} & is \neq i \\ & & \\ a\bar{s}*b & \text{für} & is = i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} isi & \text{für} & isi \neq i \\ \overline{is}b & \text{für} & is \neq i = isi \\ a\bar{s}b & \text{für} & is = i \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} isi & \text{für} & isi \neq i \\ \overline{is}b & \text{für} & isi = i, is \neq i \neq si \\ \overline{is}b & \text{für} & is \neq i = si \\ a\bar{s}b & \text{für} & is = i \neq si \\ a\bar{s}b & \text{für} & is = i = si \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} isi & \text{für} & isi \neq i \\ a\overline{si} & \text{für} & isi = i, is \neq i \neq si \\ a\bar{s}b & \text{für} & is \neq i = si \\ a\overline{si} & \text{für} & is = i \neq si \\ a\bar{s}b & \text{für} & is = i = si \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} isi & \text{für} & isi \neq i \\ a\overline{si} & \text{für} & isi = i \neq si \\ a\bar{s}b & \text{für} & si = i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a*si & \text{für} & si \neq i \\ & & \\ a*\bar{s}b & \text{für} & si = i \end{Bmatrix} = a*(s*b)$$

mit P1, P2 und P3. Analog erhält man AS_iS_i mit P0 und P4, S_iAS_i mit P6, S_iS_iA mit P0 und P5, $S_iS_iS_i$ mit P0.

Zu Beweis des zweiten Teiles des Satzes leitet man aus der Assoziativität von $*$ die Bedingungen P1—P6 her, und zwar P1, P2 und P3 aus AS_iA, P4 aus AS_iS_i usw. wie oben. Nicht offensichtlich ist darunter nur P1. Sei also $s \in S_i$ und $is \neq i \neq si$ und

$isi=i$. Aus der Assioziativität im Falle AS_iA folgt, daß für alle $a, b \in A$ gelten muß: $a\,\overline{si}=\overline{is}\,b$. Wegen $isi=i$ sind is und si idempotent; wegen P0 sind es dann auch $\overline{is}$ und $\overline{si}$. Mit $a=\overline{si}$ und $b=\overline{is}$ folgt

$$\overline{si} = \overline{si}\,\overline{si} = \overline{is}\,\overline{is} = \overline{is},$$

$$\overline{si} = \overline{si}\,\overline{si} = \overline{is}\,A \quad \text{und} \quad \overline{is} = \overline{is}\,\overline{is} = A\,\overline{si}.$$

Also ist $\overline{is}=\overline{si}$ Nullelement von A. Falls umgekehrt $\overline{is}=\overline{si}$ Nullelement von A ist, gilt natürlich auch $a\,\overline{si}=\overline{is}\,b$ für alle $a, b \in A$. Q.e.d.

Im folgenden seien A, S, i, S_i wie in Satz 1. Falls i Nullelement von S ist, sind die i-partiellen Morphismen von S in A gerade die Abbildungen von S_i in A mit der Eigenschaft P0; die bekannte Aussage [1, Satz 4.19] über Idealerweiterungen ergibt sich also als ein Spezialfall von Satz 1.

Ein anderer interessanter Sonderfall liegt vor, wenn i Einselement von S ist. Verbeek [5, Satz 2] zeigt, daß dabei das Folgende gilt: Falls $S_iS_i \subseteqq S_i$ ist, gibt es genau eine Vereinigungserweiterung $(E, *)$ von A mit S bezüglich i, und diese ist durch $a*b=ab$, $a*s=s*a=s$, $s*t=st$ für $a, b \in A$ und $s, t \in S_i$ definiert. Falls $i \in S_iS_i$ ist, gibt es genau dann eine (und auch nur eine) Vereinigungserweiterung von A mit S bezüglich i, wenn A ein Nullelement 0 besitzt; diese Erweiterung ist dann durch $a*b=ab$, $a*s=s*a=s$, $s*t=st$ für $st \neq i$, $s*t=0$ für $st=i$ mit $a, b \in A$ und $s, t \in S_i$ eindeutig definiert. Offensichtlich ist $(E, *)$ in beiden Fällen durch einen i-partiellen Morphismus festgelegt — den leeren bzw. denjenigen mit Bild 0.

Die Bedingungen P0—P6 beschreiben gewissermaßen eine Homomorphie über das ausgelassene idempotente Element i hinweg. In P2 ist $\overline{is}$ und damit $\overline{isb}$ für alle $b \in A$ Rechtsnull; $A\bar{s}$ ist dort Linksideal und Rechtsfastideal, also Fastideal. In P4 ist $\overline{is}\,\bar{t}$ Rechtsnull. In P6 gilt $\overline{si}\,\bar{t}=\overline{si}\,\overline{it}=\bar{s}\,\overline{it}$. Interessant sind natürlich auch die Fälle, in denen die Prämissen für mehrere der Bedingungen P1—P6 erfüllt sind: So garantieren die Kombinationen P2$\wedge$P3, P2$\wedge$P5, P3$\wedge$P4, P4$\wedge$P5 jeweils die Existenz eines Nullelementes 0 in A zusammen mit Beziehungen der Form $\overline{is}=\overline{ti}=0$.

Falls A ein Einselement 1_A besitzt, kann man P0—P6 einfacher formulieren. Es gilt

Satz 2. *S sei eine Halbgruppe mit idempotentem Element i, A ein Monoid. Eine Abbildung*

$$f\colon \{s \mid \{\in S_i,\ i \in S^1 s S^1\} \to A$$

mit $\bar{s}:=f(s)$ ist genau dann ein i-partieller Morphismus von S in A, wenn sie den Bedingungen genügt: P0′=P0, P1′=P1, P6′=P6 *und*

(P2′) $\forall s \in S_i : is \neq i = si \rightarrow \bar{s} = \overline{is}$ *ist Rechtsnull,* (P3′) $\forall s \in S_i : is = i \neq si \rightarrow \bar{s} = \overline{si}$ *ist Linksnull,*

(P4′) $\forall s, t \in S_i : is \neq i = ist \rightarrow \bar{s}\bar{t} = \overline{is}\bar{t}$ *ist Rechtsnull,*

(P5′) $\forall s, t \in S_i : ti \neq i = sti \rightarrow \bar{s}\bar{t} = \bar{s}\overline{ti}$ *ist Linksnull.*

Beweis. f sei ein i-partieller Morphismus von S in A. Sei $s \in S_i$ und $is \neq i = si$; mit P2 folgt $a\ \bar{s} = a\bar{s}\ 1_A = \overline{is}\ 1_A = \overline{is}$ für alle $a \in A$, insbesondere also auch für $a = 1_A$; damit gilt P2′. Dual erhält man P3′ aus P3. Ähnlich ergibt sich P4′ aus P4 und P5′ aus P5. f erfülle nun umgekehrt die Bedingungen P0′—P6′. Sei $s \in S_i$ und $is \neq i = si$; wegen P2′ folgt für alle $a, b \in A$: $a\,\bar{s}\,b = \bar{s}\,b = \overline{is}\,b$, also P2. Analog erhält man P3—P5. Q.e.d.

Falls A Monoid ist und die Vereinigungserweiterung $(E, *)$ von A mit S bezüglich i durch einen i-partiellen Morphismus von S in A festgelegt wird, gilt

$$\bar{s} = 1_A * s * 1_A$$

für alle $s \in S_i$ mit $isi = i$. Diese Beobachtung führt zu einer Verallgemeinerung des zweiten Teils von [1], Satz 4.19. Zuvor stellen wir einige Fakten zusammen.

Lemma 1. *A sei ein Monoid, S eine Halbgruppe, i ein idempotentes Element von S, $(E, *)$ Vereinigungserweiterung von A mit S bezüglich i. Die Abbildung $S_i \rightarrow E$: $s \mapsto 1_A * s * 1_A$ erfüllt* P1′—P6′.

Beweis. Sei $s \in S_i$ und $is \neq i$; dann ist

$$(1_A * s) * 1_A = is * 1_A = 1_A * is * 1_A;$$

für $a \in A$ folgt

$$a * (1_A * s * 1_A) = (a * s) * 1_A = is * 1_A = 1_A * s * 1_A.$$

Für $t \in S_i$ mit $ti \neq i$ ist analog

$$1_A * t * 1_A = 1_A * ti * 1_A = 1_A * t * 1_A * a.$$

Für $s = t$ und $isi = i$ ergibt sich P1′, für $si = i$ P2′, für $it = i$ P3′, usw. Q.e.d.

Man beachte, daß $1_A * s * 1_A$ genau dann in A liegt, wenn $isi = i$ ist. Daher kann man auch nur für den Fall, daß $iSi = i$ gilt, erwarten, daß eine zum Beweis von [1], Satz 4.19, analoge Konstruktion sämtliche Vereinigungserweiterungen durch partielle Morphismen gewinnen läßt. Im Hinblick auf diesen Beweis ist weiter zu bemerken, daß die für Idealerweiterungen gültige Beziehung $1_A * s = s * 1_A$ für Vereinigungserweiterungen allgemein nicht gültig ist.

Lemma 2. *A sei ein Monoid, S eine Halbgruppe, i ein idempotentes Element von S, $(E, *)$ Vereinigungserweiterung von A mit S bezüglich i. Falls $iSi = i$ gilt und*

$(E, *)$ durch einen i-partiellen Morphismus von S in A festgelegt ist, gilt

$$(1_A * s * 1_A) * (1_A * t * 1_A) = 1_A * s * t * 1_A$$

für alle $s, t \in S_i$.

Beweis. Die Bedingung $iSi = i$ bewirkt, daß der i-partielle Morphismus $s \mapsto \bar{s}$ überall auf S_i definiert ist und daß $1_A * s * 1_A$ für alle $s \in S_i$ in A liegt. Es folgt $\bar{s} = 1_A * s * 1_A$ und daher

$$(1_A * s * 1_A) * (1_A * t * 1_A) = \bar{s}\bar{t} = \begin{Bmatrix} \overline{s*t} & \text{für} & st \neq i \\ s*t & \text{für} & st = i \end{Bmatrix} = 1_A * s * t * 1_A.$$

Q.e.d.

Im Hinblick auf Lemma 1 besteht das angekündigte Ergebnis in einer Umkehrung von Lemma 2.

Satz 3. *A sei ein Monoid, S eine Halbgruppe mit idempotentem Element i, für das $iSi = i$ gilt. Jede Vereinigungserweiterung $(E, *)$ von A mit S bezüglich i wird durch einen i-partiellen Morphismus $s \mapsto \bar{s}$ von S in A festgelegt.*

Beweis. Falls $(E, *)$ durch einen i-partiellen Morphismus $s \mapsto \bar{s}$ von S in A festgelegt wird, so muß $\bar{s} = 1_A * s * 1_A$ wegen $iSi = i$ gelten. Sei also die Abbildung $s \mapsto \bar{s}$ in dieser Weise gegeben. Es gilt $S_i = \{s | s \in S_i, i \in S^1 s S^1\}$. Nach Lemma 1 sind P1′—P6′ erfüllt. Wir zeigen P0′: Sei $s, t \in S_i$; es gilt

$$\bar{s}\bar{t} = (1_A * s * 1_A) * (1_A * t * 1_A) = \begin{cases} is * 1_A * ti & \text{für} \quad is \neq i \neq ti \\ is * (t * 1_A) & \text{für} \quad is \neq i = ti \\ (1_A * s) * ti & \text{für} \quad is = i \neq ti \\ (1_A * s) * (t * 1_A) & \text{für} \quad is = i = ti. \end{cases}$$

Falls $is = i$ oder $ti = i$ ist, folgt

$$\bar{s}\bar{t} = 1_A * s * t * 1_A.$$

Damit dies auch für $is \neq i \neq ti$ gilt, ist notwendig und hinreichend, daß dann $is * ti = is * 1_A * ti$ ist; diese Gleichung folgt aus der Assoziativität von $*$ folgendermaßen:

$$is * 1_A * ti = ((is * ti) * is) * 1_A * ti = is * (ti * (is * 1_A * ti)) = is * ti.$$

Für $st \neq i$ ergibt sich insbesondere $\bar{s}\bar{t} = \overline{st}$. Damit ist die Abbildung $s \mapsto \bar{s}$ ein i-partieller Morphismus von S in A. Es bleibt zu zeigen, daß $(E, *)$ durch diese Abbildung bestimmt wird: Sei $s, t \in S_i$, $a \in A$. Für M1 sei $st = i$; dann ist mit dem Obigen

$$s * t = 1_A * s * t * 1_A = \bar{s}\bar{t}.$$

Für M2 sei $is = i$; dann ist

$$a * s = a * 1_A * s * 1_A = a\bar{s}.$$

M3 folgt dual. M4 ist klar. Q.e.d.

Wir bemerken noch die folgende interessante Tatsache, die aus den Sätzen 2 und 3 folgt: Falls es — unter den Voraussetzungen von Satz 3 — in S_i ein s mit $is \neq i$ oder ein t mit $ti \neq i$ gibt, so besitzt A eine Rechtsnull, nämlich $is * 1_A$, bzw. eine Linksnull, nämlich $1_A * ti$; falls also s und t wie oben beide existieren, so ist das Element $is * ti = is * 1_A * ti = is * 1_A = 1_A * ti$ Nullelement von A.

Aus dem Beweis von Satz 3 kann man weiter für den Fall $iSi \neq i$ schließen: Es gibt nur dann eine Vereinigungserweiterung $(E, *)$ eines Monoids A mit S bezüglich i, wenn es eine Abbildung $s \mapsto \bar{s}$ von $S_i' = \{s \mid s \in S_i, isi = i\}$ in A gibt, die den Bedingungen P0′—P6′ und M1—M4 — jeweils mit S_i' statt S_i — genügt (in P0′ muß dabei zusätzlich $st \in S_i'$ gefordert werden).

Zusatz während der Korrektur: Die Vereinigungserweiterungen durch Halbgruppen S bezüglich i mit $iSi = i$ wurden von uns inzwischen vollständig beschrieben (Vereinigungserweiterungen durch vollständig O-einfache Halbgruppen, *Semigroup Forum,* **11** (1975/76), 185—188).

Literatur

[1] A. H. Clifford und G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups,* I, Mathematical Surveys 7 (2. Aufl.), American Mathematical Society (Providence, 1964).

[2] H. Jürgensen, Fastideale von Halbgruppen, *Semigroup Forum,* **9** (1974), 261—270.

[3] H. Jürgensen, Fastideale in vollständig 0-einfachen Halbgruppen, *Math. Slov.,* **26** (1976).

[4] L. A. M. Verbeek, Semigroup Extensions, *Dissertation Delft,* 1968.

[5] L. A. M. Verbeek, Union Extensions of Semigroups, *Trans. AMS,* **150** (1970) 409—423.

MATHEMATISCHES SEMINAR
UNIVERSITÄT KIEL