Acta Sci. Math., 39 (1977), 153—161

Обратимые мультиоперации и подстановки

М. Д. САНДИК

Мультиоперация $\mathscr{A}$ на непустом множестве Q определяется как отображение декартовых степеней этого множества, $\mathscr{A}: Q^n \to Q^m$ (см. [3]). Здесь $n=\delta\mathscr{A}$ называется степенью, $m=\varrho\mathscr{A}$ рангом, $|\mathscr{A}|=\delta\mathscr{A}-\varrho\mathscr{A}+1$ — арностью мультиоперации $\mathscr{A}$. Ясно, что мультиоперация $\mathscr{A}$ однозначно определяется упорядоченной последовательностью $\varrho\mathscr{A}$ операций одинаковой арности $\delta\mathscr{A}$, т.е., $\mathscr{A}=[A_1^{\varrho\mathscr{A}}]$; именно, если $\mathscr{A}(x_1^{\delta\mathscr{A}})=y_1^{\varrho\mathscr{A}}$, то $A_i(x_1^{\delta\mathscr{A}})=y_i$, $i=1, 2, \ldots, \varrho\mathscr{A}$. Операция A_i называется i-той компонентой мультиоперации $\mathscr{A}$.

Условимся в следующих обозначениях: множество, наделенное мультиоперацией, обозначим буквой Q, элементы этого множества — малыми, мультиоперации — большими прописными, операции — большими заглавными буквами латинского алфавита. Совокупность всех мультиопераций одинаковой степени n и одинакового ранга m, определенные на множестве Q, обозначим через $Q^{(n,m)}$. Совокупность всех мультиопераций, определенных на множестве Q, обозначим через $\mathbf{T}_Q=\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty} Q^{(n,m)}$, см. [3]. Там, где не могут появляться недоразумения, степень $\delta\mathscr{A}$ обозначим через n, а ранг $\varrho\mathscr{A}$ — через m. Буквой F_i обозначим i-тый селектор: $F_i(x_1^n)=x_i$, а последовательность $[F_k^i]$ — через $\mathscr{F}_{(i,k)}$. Напомним, что если $i\leqq j$, то x_i^j означает краткую запись последовательности $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j$; если $i>j$, тогда x_i^j означает пустую последовательность.

1. По аналогии с определением операции i (см. [3]), на множестве $\mathbf{T}_Q$ определим композицию $\odot_{tk}$ следующим образом:

$$\mathscr{A}\odot_{tk}\mathscr{B}(x_1^l)=\begin{cases}\left(\mathscr{A}(x_1^{t-1}, y_1^{\varrho\mathscr{B}}, x_{k+1}^{|\mathscr{A},\mathscr{B}|+k-t}), x_{|\mathscr{A},\mathscr{B}|+k-t+1}^{\delta\mathscr{B}}\right), & \text{если } t<|\mathscr{A},\mathscr{B}|,\\ \left(\mathscr{A}(x_1^{t-1}, y_1^{\delta\mathscr{A}-t+1}), y_{\delta\mathscr{A}-t+2}^{\varrho\mathscr{B}}, x_{k+1}^{\delta\mathscr{B}}\right), & \text{если } |\mathscr{A},\mathscr{B}|\leqq t\leqq\delta\mathscr{A},\\ \left(\mathscr{A}(x_1^{\delta\mathscr{A}}), x_{\delta\mathscr{A}+1}^{t-1}, y_1^{\delta\mathscr{B}}, x_{k+1}^{\delta\mathscr{B}}\right), & \text{если } t>\delta\mathscr{A},\end{cases}$$

где $|\mathscr{A},\mathscr{B}|=\delta\mathscr{A}-\varrho\mathscr{B}+1$; $y_1^{\varrho\mathscr{B}}=\mathscr{B}(x_1^{\delta\mathscr{B}})$; $l=\delta(\mathscr{A}\odot_{tk}\mathscr{B})$.

Поступило 20. IV. 1974 г.

Замечание 1. Закон композиции $\odot_{tk}$ определен для любых $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathrm{T}_Q$ и для любых натуральных чисел t, k $(t \leqq k)$.

Если $t=k=i$, тогда композицию $\odot_{tk}$ обозначим через $\odot_i$.

Таким образом, множество T_Q относительно закона композиции $\odot_{tk}$ образует алгебру, которую обозначим через $(\mathrm{T}_Q; \odot_{tk})$. В [3] дана абстрактная характеристика алгебры $(\mathrm{T}_Q; \odot_i)$. Здесь мы не зададим себе целью описания алгебры $(\mathrm{T}_Q; \odot_{tk})$. Определение закона композиции $\odot_{tk}$ приведено здесь только потому что ниже оно нам понадобится.

Замечание 2. Соотношение между степенями и рангами мультиоперации $\mathscr{A} \odot_{tk} \mathscr{B}$ и ее факторов $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ устанавливается без труда.

Замечание 3. Если $t=1$, $k=\delta\mathscr{A}$ и $\varrho\mathscr{B} \geqq \delta\mathscr{A}$, тогда

$$\mathscr{A} \odot_{tk} \mathscr{B}(x_1^{\delta\mathscr{B}}) = \left(\mathscr{A}(y_1^{\delta\mathscr{A}}),\ y_{\delta\mathscr{A}+1}^{\varrho\mathscr{B}}\right).$$

Мультиоперации $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ можно рассмотреть как отображения декартовых степеней множества Q. В этом смысле $\mathscr{A} \odot_{tk} \mathscr{B}$ означает последовательное применение этих отображений, т.е., их произведение. Поэтому, когда $t=1$, $k=\delta\mathscr{A}$ и $\varrho\mathscr{B} \geqq \delta\mathscr{A}$, мультиоперацию $\mathscr{A} \odot_{tk} \mathscr{B}$ имеет смысл обозначить естественным образом — $\mathscr{A} \cdot \mathscr{B}$.

Определение. Мультиоперация $\mathscr{A} \in Q^{(n,m)}$ называется *(i,j)-обратимой мультиоперацией*, если в равенстве $\mathscr{A}(x_1^{i-1}, x_i^j, x_{j+1}^n) = y_1^m$ любая тройка последовательностей $x_1^{i-1}, y_1^m, x_{j+1}^n$ элементов Q однозначно определяет последовательность x_i^j.

Из определения следует, что если мультиоперация $\mathscr{A}$ является (i,j)-обратимой, тогда существует закон согласно которому любой последовательности $(x_1^{i-1}, y_1^m, x_{j+1}^n) \in Q^{n+m-(j-i+1)}$ однозначно ставится в соответствие последовательность элементов $x_i^j \in Q$. Этот закон не что иное как мультиоперация, отображающая $Q^{n+m-(j-i+1)}$ в Q^{j-i+1}. Обозначим эту мультиоперацию через $\mathscr{A}^{-(i,j)}$ и назовём её *(i,j)-обратной мультиоперацией* к мультиоперации $\mathscr{A}$.

Замечание 4. Если мультиоперация $\mathscr{A}$ — (i,j)-обратима и $j-i+1=n$ (т.е., $i=1$, $j=n$), тогда $\mathscr{A}$ является взаимнооднозначным отображением Q^n на Q^m. Очевидно, что при $n=m$ множество Q может быть конечным или бесконечным, а при $n \neq m$ оно может быть только бесконечным множеством.

Замечание 5. Пусть $j-i+1<n$. Тогда (i,j)-обратимая мультиоперация $\mathscr{A}$ не может быть взаимно однозначным отображением множества Q^n на множество Q^m.

Действительно, пусть $\mathscr{A}$ является $(2,n)$-обратимой и взаимно однозначной. Предположим, что $\mathscr{A}(c_1^n)=b_1^m$. Уравнение $\mathscr{A}(a_1, x_2^n)=b_1^m$ однозначно разрешимо для любых фиксированных элементов $a_1, b_1^m \in Q$. Возмём $a_1 \neq c_1$. Пусть для этих фиксированных элементов решение уравнения есть $x_2^n=d_2^n$:

$$\mathscr{A}(a_1, d_2^n) = b_1^m.$$

Так как $a_1 \neq c_1$, то последовательности (a_1, d_2^n) и c_1^n различны. Однако эти последовательности мультиоперацией $\mathscr{A}$ отображаются в одну и ту же последовательность b_1^m — противоречие с предположенным.

Рассмотрим ещё вопрос: в каких случаях (i, j)-обратимая мультиоперация может быть определена на конечном множестве?

Возможны два случая: 1) $j-i+1=n$, на который даёт ответ замечание 4; 2) $j-i+1<n$.

Второй случай распадается на два подслучая: 2a) $n=m$, и 2b) $n\neq m$. Пусть мы имеем условия подслучая 2a). Тогда уравнение

$$\mathscr{A}(a_1^{i-1}, x_i^j, a_{j+1}^n) = b_1^n$$

однозначно разрешимо. При фиксированных a_1^{i-1}, a_{j+1}^n мультиоперация $\mathscr{A}$ индуцирует мультиоперацию $\bar{\mathscr{A}}(x_i^j)=\mathscr{A}(a_1^{i-1}, x_i^j, a_{j+1}^n)$, которая $(1, j-i+1)$-обратима и $\bar{\mathscr{A}} \in Q^{(n,\, j-i+1)}$. Однако в таком случае, согласно замечания 1, множество Q может быть только бесконечным множеством.

Следующие примеры показывают, что в условиях подслучая 2b) (i, j)-обратимые мультиоперации могут быть определены и на конечных множествах.

Пример 1. Пусть $Q=\{1, 2\}$; $n=3$; $m=2$; $i=2$; $j=3$. Определим $\mathscr{A}\colon Q^3 \to Q^2$ следующим образом:

$$\mathscr{A} = \begin{Bmatrix} (111), & (112), & (121), & (122), & (211), & (212), & (221), & (222) \\ (22), & (11), & (21), & (12), & (22), & (11), & (21), & (12) \end{Bmatrix}.$$

Легко убедиться в том, что $\mathscr{A}$ — (2, 3)-обратима.

Пример 2. Пусть Q — конечное множество, i, j, m — некоторые натуральные числа такие, что $1<i\leqq j$, $j-i+1=m$. Возмём произвольную взаимно однозначную подстановку $\bar{\mathscr{A}}\colon Q^{j-i+1} \to Q^m$. Для любого $n \geqq j$ определим мультиоперацию $\mathscr{A} \in Q^{(n,\, m)}$ следующим образом: $\mathscr{A}(x_1^{i-1}, x_i^j, x_{j+1}^n)=y_1^m$ если только $\bar{\mathscr{A}}(x_i^j)=y_1^m$. Мультиоперация $\mathscr{A}$ будет (i, j)-обратимой.

Из вышеизложенного можно делать следующее заключение:

Предложение 1. *(i, j)-обратимая мультиоперация $\mathscr{A} \in Q^{(n,\, m)}$ может быть определена на конечном множестве, если только $j-i+1=m$.*

Предложение 2. *Если* $\mathscr{A}=[A_1^m]$ — (i,j)*-обратимая мультиоперация, тогда её компоненты попарно различны.*

Действительно, если $\mathscr{A}$ — (i,j)-обратимая, тогда уравнение $\mathscr{A}(a_1^{i-1}, x_i^j, a_{j+1}^n)=b_1^m$, то есть система

$$A_p(a_1^{i-1}, x_i^j, a_{j+1}^n) = b_p; \quad p = 1, 2, \ldots, m$$

однозначно разрешима для произвольных фиксированных элементов a_1^{i-1}, a_{j+1}^n, $b_1^m \in Q$. Пусть зафиксированы такие элементы $b_p \neq b_k$, относительно которых a_i^j является решением системы. В таком случае $A_p(a_1^n)=b_p \neq b_k=A_k(a_1^n)$, т.е. $A_p \neq A_k$.

Предложение 3. (i,j)*-обратимая мультиоперация* $\mathscr{A} \in Q^{(n,m)}$ *связана со своей обратной мультиоперацией* $\mathscr{A}^{-(i,j)}$ *соотношением*

$$\mathscr{A} \odot_{ij} \mathscr{A}^{-(i,j)} = \mathscr{F}_{(i,m+i-1)}.$$

На самом деле, если

$$\mathscr{A}(x_1^{i-1}, x_i^j, x_{j+1}^n) = y_1^m, \tag{1}$$

тогда по определению $\mathscr{A}^{-(i,j)}$

$$x_i^j = \mathscr{A}^{-(i,j)}(x_1^{i-1}, y_1^m, x_{j+1}^n).$$

Подставляя эти значения последовательности x_i^j в равенстве (1), получаем

$$\mathscr{A}\big(x_1^{i-1}, \mathscr{A}^{-(i,j)}(x_1^{i-1}, y_1^m, x_{j+1}^n), x_{j+1}^n\big) = y_1^m.$$

На основании определения композиции $\odot_{ik}$, последнее равенство принимает вид:

$$\mathscr{A} \odot_{ik} \mathscr{A}^{-(i,j)}(x_1^{i-1}, y_1^m, x_{j+1}^n) = y_1^m.$$

Этим и доказано наше утверждение.

При $i=j$, $m=1$ (i,j)-обратимая мультиоперация становится (i)-квазигруппой*. Извествно, что множество всех (i)-квазигрупп (при фиксированном i) одинаковой арности, определённые на одном и том же множестве относительно композиции $\odot_i$ образует группу. Аналогичное утверждение справедливо и для некоторых (i,j)-обратимых мультиопераций.

Предложение 4. (i,j)*-обратная мультиоперация к мультиоперации* $\mathscr{A}$ *является* (i,j')*-обратимой, где* $j'=m+1-i$.

Пусть выполняются условия предложения и

$$\mathscr{A}^{-(i,j)}(a_1^{i-1}, x_i^{j'}, a_{j+1}^n) = b_1^{m'},$$

---

* Операция A называется (i)-квазигруппой, если в равенстве $A(x_1^{i-1}, x_i, x_{i+1}^n)=x_{n+1}$ любые заданные элементы $x_1^{i-1}, x_{i+1}^{n+1} \in Q$ однозначно определяют элемент x_i.

где $m'=j-i+1$. Тогда

$$\mathscr{A}(a_1^{i-1}, \mathscr{A}^{-(i,j)}(a_1^{i-1}, x_i^{j'}, a_{j+1}^n), a_{j+1}^n) = \mathscr{A}(a_1^{i-1}, b_1^{m'}, a_{j+1}^n),$$
$$\mathscr{A} \odot_{ij} \mathscr{A}^{-(i,j)}(a_1^{i-1}, x_i^{j'}, a_{j+1}^n) = \mathscr{A}(a_1^{i-1}, b_1^{m'}, a_{j+1}^n).$$

Так как $\mathscr{A} \odot_{ij} \mathscr{A}^{-(i,j)} = \mathscr{F}_{(i,j')}$, то $x_i^{j'} = \mathscr{A}(a_1^{i-1}, b_1^{m'}, a_{j+1}^n)$. Это означает, что $\mathscr{A}^{-(i,j)}$ является (i,j')-обратимой.

Предложение 5. *Пусть i, j — натуральные числа $(i \leqq j)$, а $\Lambda_{(i,j)}$ — множество всех (i,j)-обратимых мультиопераций одинаковой степени n и одинакового ранга m, определённые на одном и том же множестве Q.*

(I). *Если $j-i+1 \neq m$, тогда множество $\Lambda_{(i,j)}$ относительно операции $\odot_{ij}$ не замкнуто.*

(II). *Если $j-i+1=m$, тогда множество $\Lambda_{(i,j)}$ относительно операции $\odot_{ij}$ образует группу.*

Пусть сперва выполняется условие пункта (I). Если $j-i+1 \neq m$, тогда либо $j-i+1>m$, либо $j-i+1<m$. Предположим, что $j-i+1>m$; тогда $|\mathscr{A}, \mathscr{B}| = \delta\mathscr{A} - \varrho\mathscr{B} + 1 = n-m+1 > n-j+i > i$, т.е., $i < |\mathscr{A}, \mathscr{B}|$. Отсюда получим $\delta(\mathscr{A} \odot_{ij} \mathscr{B}) = \max[n, n+(j-i+1)-m] > n$. Следовательно $\mathscr{A} \odot_{ij} \mathscr{B} \notin Q^{(n,m)}$. При $j-i+1<m$ утверждение (I) доказывается аналогично.

Докажем втрорую часть предложения. Если $j-i+1=m$, тогда $\delta(\mathscr{A} \odot_{ij} \mathscr{B}) = \max[n, n+(j-i+1)-m] = n$, если $i < |\mathscr{A}, \mathscr{B}|$, и $\delta(\mathscr{A} \odot_{ij} \mathscr{B}) = \max(n, i-1) = n$, если $|\mathscr{A}, \mathscr{B}| \leqq i \leqq \delta\mathscr{A}$ (заметим, что в данном случае число i не может быть больше $\delta\mathscr{A}$). Из доказанных выше условий и на основании замечания 1 имеем:

В случае $i < |\mathscr{A}, \mathscr{B}|$ имеем $\delta\mathscr{B} = n = n+(j-i+1)-m = (n-m+1)-j-i = |\mathscr{A}, \mathscr{B}|+j-i$ и поэтому $\varrho(\mathscr{A} \odot_{ij} \mathscr{B}) = \varrho\mathscr{A}$.

В остальном случае получаем $\delta\mathscr{B} = n \geqq i = k$ и поэтому

$$\varrho(\mathscr{A} \odot_{ij} \mathscr{B}) = n+m-n+m-1+i-j = m+m-(j-i+1) = m.$$

Доказано, что $\delta(\mathscr{A} \odot_{ij} \mathscr{B}) = n$ и $\varrho(\mathscr{A} \odot_{ij} \mathscr{B}) = m$, т.е. $\mathscr{A} \odot_{ij} \mathscr{B} \in Q^{(n,m)}$. Покажем, что $\mathscr{A} \odot_{ij} \mathscr{B}$ — (i,j)-обратима.

Пусть

$$\mathscr{A} \odot_{ij} \mathscr{B}(a_1^{i-1}, x_i^j, a_{j+1}^n) = b_1^m, \tag{2}$$

т.е.

$$\mathscr{A}[a_1^{i-1}, \mathscr{B}(a_1^{i-1}, x_i^j, a_{j+1}^n), a_{j+1}^n] = b_1^m.$$

Обозначим $\mathscr{B}(a_1^{i-1}, x_i^j, a_{j+1}^n) = y_i^j$. Уравнение

$$\mathscr{A}(a_1^{i-1}, y_i^j, a_{j+1}^n) = b_1^m$$

однозначно разрешимо. Пусть $y_i^j = c_i^j$, т.е.

$$\mathscr{B}(a_1^{i-1}, x_i^j, a_{j+1}^n) = c_i^j.$$

Это уравнение также однозначно разрешимо. Её решение будет и решением уравнения (2). Однозначность этого решения очевидно. Таким образом $\mathscr{A} \odot_{ij} \mathscr{B} \in \in \Lambda_{(i,j)}$, т.е., $\Lambda_{(i,j)}$ замкнуто относительно операции $\odot_{ij}$, если $j-i+1=m$. Из самого определения операции $\odot_{ij}$ следует её ассоциативность. Существование единичного элемента $\mathscr{F}_{(i,m+i-1)}$ и обратного элемента $\mathscr{A}^{-(i,j)}$ доказано в предложении 3.

Предложение 5 доказано.

Следствие 1. *Если* $\Lambda_{(i,j)}$ *— группа, то*

$$\mathscr{A}^{-(i,j)}[x_1^{i-1}, \mathscr{A}(x_1^n), x_{j+1}^n] = x_i^j.$$

Следствие 2. *Множество всех* (i)*-квазигрупп (при фиксированном* i*) одинаковой арности образует группу относительно операции* $\odot_i$.

2. Рассмотрим теперь мультиоперации, являющиеся подстановками декартовных степеней множества Q и связь между их компонентами.

Пусть $\delta\mathscr{A} = \varrho\mathscr{A}$, тогда мультиоперация $\mathscr{A}$ является отображением множества $Q^{\delta\mathscr{A}}$ в себе. Если оно взаимно однозначное, назовём его подстановкой. Ясно, что если $\mathscr{A}$ подстановка, то она $(1, \delta\mathscr{A})$-обратима и наоборот.

Имеет место следующее

Предложение 6. *Операция* A *является* (i)*-квазигруппой тогда и только тогда, когда* $[F_1^{i-1}, A, F_{i+1}^n]$ *— подстановка множества* Q^n.

На самом деле, если $[F_1^{i-1}, A, F_{i+1}^n]$ подстановка, то уравнение

$$[F_1^{i+1}, A, F_{i+1}^n](x_1^n) = a_1^n$$

однозначно разрешимо. Другими словами, система

$$\begin{cases} F_j(x_1^n) = a_j; \quad j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n \\ A(x_1^n) = a_i \end{cases}$$

однозначно разрешима. Следовательно, однозначно разрешимым будет и уравнение $A(a_1^{i-1}, x_i, a_{i+1}^n) = a_i$. Так же просто доказывается и обратное утверждение.

Предложение 7. a) *Если две из мультиопераций*

$$[F_1^{i-1}, A_i^{i+1}, F_{i+2}^n], [F_1^{i-1}, A_i, F_{i+1}^n], [F_1^i, A_{i+1} \odot_i A_i^{-(i)}, F_{i+2}^n]$$

являются подстановками, тогда и третья мультиоперация — подстановка

b) *Если две из следующих трёх мультиопераций являются подстановками:*

$$[F_1^{i-1}, A_1^{i+1}, F_{i+2}^n], [F_1^i, A_{i+1}, F_{i+2}^n], [F_1^{i-1}, A_i \odot_{i+1} A_{i+1}^{-(i+1)}, F_{i+2}^n],$$

тогда третья мультиоперация также является подстановкой.

На самом деле, пусть выполняются условия нашего утверждения. Тогда мультиоперация $[F_1^{i-1}, A_i^{-(i)}, F_{i+1}^n]$, где $A_i^{-(i)}$ обратная операция к операции A_i в группе (i)-квазигрупп относительно операции $\odot_i$, также является подстановкой. Подстановкой будет и произведение подстановок $[F_1^{i-1}, A_i^{i+1}, F_{i+2}^n]$ и $[F_1^{i-1}, A_i^{-(i)}, F_{i+1}^n]$, которое, однако, равняется $[F_1^i, A_{i+1} \odot_i A_i^{-(i)}, F_{i+2}^n]$. На самом деле,

$$\begin{aligned}
&[F_1^{i-1}, A_i^{i+1}, F_{i+2}^n]\cdot[F_1^{i-1}, A_i^{-(i)}, F_{i+1}^n](x_1^n) =\\
&= [F_1^{i-1}, A_i^{i+1}, F_{i+2}^n]\big(x_1^{i-1}, A_i^{-(i)}(x_1^n), x_{i+1}^n\big) =\\
&= \big(x_1^{i-1}, A_i(x_1^{i-1}, A_i^{-(i)}(x_1^n), x_{i+1}^n), A_{i+1}(x_1^{i-1}, A_i^{-(i)}, (x_1^n), x_{i+1}^n), x_{i+2}^n\big) =\\
&= \big(x_1^{i-1}, A_i \odot_i A_i^{-(i)}(x_1^n), A_{i+1} \odot_i A_i^{-(i)}(x_1^n), x_{i+2}^n\big) =\\
&= \big(x_1^{i-1}, x_i, A_{i+1} \odot_i A_i^{-(i)}(x_1^n), x_{i+2}^n\big) =\\
&= [F_1^i, A_{i+1} \odot_i A_i^{-(i)}, F_{i+2}^n](x_1^n),
\end{aligned}$$

т.е.

$$(3)\qquad [F_1^{i-1}, A_i^{i+1}, F_{i+2}^n]\cdot[F_1^{i-1}, A_i^{-(i)}, F_{i+1}^n] = [F_1^i, A_{i+1} \odot_i A_i^{-(i)}, F_{i+2}^n].$$

Здесь мы использовали равенство $A_i \odot_i A_i^{-(i)}(x_i) = x_i$, которое всегда верно, так как A_i является (i)-квазигруппой, и $A_i^{-(i)}$ — её обратный элемент в группе всех (i)-квазигрупп (см. следствие 2) с единицей $F_i = A_i \odot_i A_i^{-(i)}$.

Аналогично доказывается и равенство

$$(4)\qquad [F_1^{i-1}, A_i^{i+1}, F_{i+2}^n]\cdot[F_1^i, A_{i+1}^{-(i+1)}, F_{i+2}^n] = [F_1^{i-1}, A_i \odot_{i+1} A_{i+1}^{-(i+1)}, F_{i+1}^n].$$

Из доказанных равенств (3) и (4) следуют и остальные утверждения предложения 7.

Следствие 3. a) *Если A_i является (i)-квазигруппой, то $[F_1^{i-1}, A_i^{i+1}, F_{i+2}^n]$ является подстановкой если и только если $A_{i+1} \odot_i A_i^{-(i)}$ является $(i+1)$-квазигруппой.*

b) *Если A_{i+1} $(i+1)$-квазигруппа, то $[F_1^{i-1}, A_i^{i+1}, F_{i+2}^n]$ является подстановкой если и только если $A_i \odot_{i+1} A_{i+1}^{-(i+1)}$ является (i)-квазигруппой.*

Замечание 6. Бинарные операции A и B ортогональны тогда и только тогда, когда $\mathscr{A} = [A, B]$ является подстановкой множества Q^2.

При $i=1$ и $n=2$ (т.е., для бинарных операций) получаем следующее обобщение леммы 2 из [1]:

Следствие 4. *Если A_1 является (1)-квазигруппой (левой квазигруппой), то $[A_1, A_2]$ является подстановкой множества Q^2 (другими словами, A_1 и A_2 ортогональны) тогда и только тогда, когда $A_2 \odot_1 A_1^{-(1)}$ будет (2)-квазигруппой (правой квазигруппой).*

Аналогичное утверждение получаем и в случае b) следствия 1.

Заметим, что на основании определения операции $\cdot = \odot_{1,n}$ (см. следствие 3) для мультиопераций $\mathscr{A} = [A_1^m]$ и $\mathscr{B} = [B_1^n]$, таких что $\delta\mathscr{A} = \varrho\mathscr{B}$, следует справедливость равенства:

(5) $$[A_1^m]\cdot[B_1^n] = \left[A_1\cdot[B_1^n], A_2\cdot[B_1^n], \dots, A_m\cdot[B_1^n]\right].$$

Также очевидно, что если B — (i)-квазигруппа, тогда для любой операции K, однаковой арности что и B, справедливы равенства:

(6) $$K\odot_i B^{-(i)}\cdot[F_1^{i-1}, B, F_{i+1}^n] = K,$$

(7) $$F_i\cdot[A_1^m] = A_i.$$

На основании равенств (5) и (6) без особых трудностей доказывается равенство (8)

$$[B_1^n] = [B_1\odot_i B_i^{-(i)}, \dots, B_{i-1}\odot_i B_i^{-i}, F_i, B_{i+1}\odot B_i^{-(i)}, \dots, B_n\odot_i B_i^{-(i)}]\cdot[F_1^{i-1}, B_i, F_{i+1}^n],$$

если B_i является (i)-квазигруппой.

Говорим, что мультиоперация $\mathscr{A}=[F_1^{k-1}, A_k^n]$ *удовлетворяет условию* α_k, если $\mathscr{A}\in Q^{(n,n)}$ и её компоненты таковы, что A_i является (i)-, $(i+1)$-квазигруппой для $i=k+1, k+2, \dots, n-1$; A_k — $(k+1)$-квазигруппа и A_n — (n)-квазигруппа.

Имеет место

Предложение 8. *Если мультиоперация* $\mathscr{A}=[A_1^n]$ *удовлетворяет условию* α_1 *и* $B_j=A_j\odot_{j+1}A_{j+1}^{-(j+1)}$, $j=1, 2, \dots, n-1$, $B_n=A_n$ *является* (j)-*квазигруппой, тогда* $\mathscr{A}$ — *подстановка, и*

$$\mathscr{A} = [A_1^n] = \prod_{j=1}^{n}[F_1^{j-1}, B_j, F_{j+1}^n].$$

Действительно, пусть решением уравнения $X\odot_{i+1}A_{i+1}=A_i$, $i=1, 2, \dots, n-1$ является операция B_i (B_i всегда существует и является $(i+1)$-квазигруппой, так как нам дано, что A_i, A_{i+1} — $(i+1)$-квазигруппы, которые принадлежат группе всех $(i+1)$-квазигрупп $\Lambda(\odot_{i+1})$). Следовательно $A_i=B_i\odot_{i+1}A_{i+1}$. Обозначим $A_n=B_n$. Тогда

(9) $$A_i = B_i\odot_{i+1}B_{i+1}\odot_{i+2}\dots\odot_{n-1}B_{n-1}\odot_n B_n.$$

Поэтому

$$\mathscr{A} = [A_1^n] = [B_1\odot_2 B_2\odot_3\dots\odot_n B_n, B_2\odot_3 B_3\odot_4\dots\odot_n B_n, \dots, B_n].$$

По предположению B_i является (i)-квазигруппой, и тогда $B_i\odot_i B_i^{-(i)}=F_i$. На основании равенства (8) имеем при $i=n$

$$\mathscr{A} = [B_1\odot_2\dots\odot_{n-1}B_{n-1}\odot_n F_n, B_2\odot_3\dots\odot_{n-1}B_{n-1}\odot_n F_n, \dots$$
$$\dots, B_{n-1}\odot_n F_n, F_n]\cdot[F_1^{n-1}, B_n],$$

а при $i=n-1$, используя равенство (6), получаем

$$\mathscr{A} = [B_1\odot_2\dots\odot_{n-2}B_{n-2}\odot_{n-1}F_{n-1}\odot_n F_n, B_2\odot_3\dots\odot_{n-2}B_{n-2}\odot_{n-1}F_{n-1}\odot_n F_n, \dots$$
$$\dots, B_{n-2}\odot_{n-1}F_{n-1}\odot_n F_n, F_{n-1}\odot_n F_n, F_n]\cdot[F_1^{n-2}, B_{n-1}, F_n]\cdot[F_1^{n-1}, B_n],$$

Продолжая этот процесс, на n-ом шаге получаем:

$$\mathscr{A}=[F_1\odot_2\dots\odot_n F_n,\ F_2\odot_3\dots\odot_n F_n,\ \dots,\ F_n]\cdot\prod_{j=1}^{n}[F_1^{j-1},\ B_j,\ F_{j+1}^n].$$

Однако $F_j\odot_{j+1}F_{j+1}\odot_{j+2},\dots,\odot_n F_n=F_j$, так как F_k единица в группе $A(\odot_k)$, $k=j+1,j+2,\dots,n$. Кроме того, $[F_1^n]$ тождественная подстановка. Поэтому

$$(10)\qquad [A]=\prod_{j=1}^{n}[F_1^{j-1},\ B_j,\ F_{j+1}^n].$$

Замечание 7. Очевидно, что если B_i $(i=1,2,\dots,n)$ является (i)-квазигруппой и $A_i=B_i\odot_{i+1}B_{i+1}\odot_{i+2}\dots\odot_n B_n$, $B_n=A_n$, тогда $[A_1^n]$ является подстановкой множества Q^n.

Другими словами, при наличии n (i)-квазигрупп $(i=1,2,\dots,n)$ арности n, мы всегда можем построить подстановку множества Q^n.

При $n=2$ получаем следующее

Следствие 5. *Если A_1, A_2 — бинарные операции, то $[A_1, A_2]$ — подстановка множества Q^2 тогда и только тогда, когда $B_1=A_1\odot_1 A_2^{-(2)}$ является (1)-квазигруппой, A_1 и $B_2=A_2$ являются (2)-квазигруппами.*

Необходимость этого утверждения доказано утверждением предложения 8. Достаточность сразу следует из того, что при $n=2$ равенство (9) принимает вид:

$$[A_1,A_2]=[B_1,\ F_2]\cdot[F_1,\ B_2].$$

Если B_j — (j)-квазигруппа, тогда $[B_1,\ F_2]$ и $[F_1,\ B_2]$ — подстановки множества Q^2; подстановкой будет и их произведение $[B_1,\ F_2]\cdot[F_1,\ B_2]=[A_1,\ A_2]$.

Возникает вопрос: будут ли справедливы утверждения обратные к утверждениям предложения 8 для любого n?

Следствие 6. *Если компоненты мультиопераций*

$$\mathscr{A}'=[F_1^k,\ A_{k+1}^n],\qquad \mathscr{A}''=[F_1^{k+1},\ A_k^{k+1},\ F_{k+2}^n]$$

удовлетворяют условиям α_k и α_{k+1} соответственно, тогда $\mathscr{A}'''=[F_1^{k-1},\ A_k^n]$ является подстановкой.

Действительно, если компоненты мультиоперации $\mathscr{A}'$ удовлетворяют условию α_k, то $[F_1^k,\ A_{k+1}^n]$ — подстановка и равенство (10) принимает вид:

$$\mathscr{A}'=\prod_{j=k+1}^{n}[F_1^{j-1},\ B_j,\ F_{j+1}^n].$$

На основании пункта b) предложения 7, $[F_1^{k-1},\ B_k,\ F_{k+1}^n]$, где $B_k=A_k\odot_{k+1}A_{k+1}^{-(k+1)}$ также является подстановкой. Произведение подстановок

$$[F_1^{k-1},B_k,F_{k+1}^n]\cdot\prod_{j=k+1}^{n}[F_1^{j-1},\ B_j,\ F_{j+1}^n]=\prod_{j=k}^{n}[F_1^{j-1},\ B_j,\ F_{j+1}^n]=\mathscr{A}'''$$

— подстановка. Становится очевидным и обратное утверждение, что даёт нам возможность в итоге утверждать справедливость следующего предложения.

Предложение 9. *Если* $[F_1^{k-1}, A_k^{k+1}, F_{k+2}^n]$ — *подстановка, то* $[F_1^{k-1}, A_k^n]$ *будет подстановкой тогда и только тогда, когда её компоненты удовлетворяют условию* α_k.

Предложение 10. *Если компоненты мультиоперации* $\mathscr{A}=[F_1^{k-1}, A_k^n]$ *удовлетворяют условию* α_k, *то*

$$\overline{\mathscr{A}} = [A_k^n] = [B_k, F_{k+1}^n]\cdot \prod_{j=k+1}^{n} [F_1^{j-1}, B_j, F_{j+1}^n], \quad B_j = A_j \odot_{j+1} A_{j+1}^{-(j+1)}$$

и, следовательно, $\overline{\mathscr{A}}$ *является взаимно однозначным отображением* $Q^n\to\to Q^{n-k+1}$.

Действительно, из условиях предложения и на основании равенства (9) следует, что

$$\overline{\mathscr{A}} = [A_n^k] = [B_k \odot_{k+1} B_{k+1} \odot_{k+2} \dots \odot_n B_n, \dots, B_{n-1}\odot_n B_n, B_n].$$

В силу (7), из последнего равенства имеем

$$\overline{\mathscr{A}} = [A_k^n] = [B_k, F_{k+1}^n]\cdot \prod_{j=k+1}^{n} [F_1^{j-1}, B_j, F_{j+1}^n]. \tag{11}$$

Замечание 8. Если $[F_1^k, A_{k+1}^n]=\mathscr{A}$ взаимно однозначное отображение $Q^n\to Q^n$, то $[A_{k+1}^n]=\overline{\mathscr{A}}$ является взаимно однозначным отображением $Q^n\to Q^{n-k}$ и обратно.

На основании этого замечания и доказанного равенства (11) заключаем, что от взаимно однозначного отображения $\mathscr{A}$: $Q^n\to Q^{n-k+1}$, компоненты которой удовлетворяют условию α_k, можно переходить к взаимно однозначному отображению $\overline{\mathscr{A}}$: $Q^n\to Q^{n-k+1}$ и обратно.

Замечание 9. Если B_i $(i=k, \dots, n)$ является (i)-квазигруппой и $A_i= =B_i\odot_{i+1}B_{i+1}\odot_{i+2}\dots\odot_n B_n$, $B_n=A_n$, тогда $[A_k^n]=\overline{\mathscr{A}}$ — взаимно однозначное соответствие между Q^n и Q^{n-k+1}.

Литература

[1] В. Д. Белоусов, Системы ортогональных операций, *Матем. Сборник*, **77** (119), (1968), 38—58.

[2] С. С. Одобеску, М. Д. Садник, Обратимые мультиоперации, *Исслед. по теор. квазигрупп и луп*, Штиинца (Кишинев, 1973), 133—139.

[3] М. Д. Сандик, Алгебра мультиопераций, *Изв. АН МССР*, № 1, (1972), 31—38.

КАФ. ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. С. ЛАЗО
КИШИНЕВ, СССР