Acta Sci. Math., 39 (1977), 163—168

Ein Finslerscher Raum ist gerade dann von skalarer Krümmung, wenn seine Weylsche Projektivkrümmung verschwindet

Z. I. SZABÓ

L. BERWALD hat bewiesen, dass die Finslerschen Räume skalarer Krümmung die Weylsche Projektivkrümmung Null haben. Sie lassen sich daher für dim>2 durch bahntreue Abbildung in allgemeine affine Räume mit der Krümmung Null überführen [1]. BERWALD, und ihn folgend mehrere Verfasser haben aber gemeint, dass nicht jeder Finslersche Raum mit verschwindendem Weylschem Krümmungstensor von skalarer Krümmung ist [1], [2]. Z. B. hat L. BERWALD den folgenden Satz behauptet [1]:

„Die Räume skalarer Krümmung sind für $n=\dim>2$ unter den Finslerschen Räumen mit der Projektivkrümmung Null durch

$$R_0{}^p{}_{0h\|p}-\frac{1}{n-1}R_0{}^p{}_{0p\|h}+R_0{}^p{}_{0p}l_h=0,$$

oder durch die äquivalenten Bedingungen:

$$(n+1)(R_0{}^p{}_{hp}-R_0{}^p{}_{0p}l_h)+(n-2)(R_0{}^p{}_{0h}A_p+A_{h|0|0})=0$$

gekennzeichnet.“

Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist der folgende

Satz. *Ein Finslerscher Raum F_n ist für* $\dim F_n>2$ *genau dann von skalarer Krümmung, wenn sein Weylscher Tensor W^i_{jk} verschwindet.*

Aus dieser Aussage folgt offensichtlich, dass die obigen Gleichungen für Finslersche Räume mit $W^i_{jk}=0$ automatisch erfült sind.

§ 1. Einleitung

Bezeichne $L(x^1,\dots x^n,y^1,\dots,y^n)$, oder $L(x,y)$ die metrische Grundfunktion eines n-dimensionalen Finslerschen Raumes F_n. $L(x,y)$ wird als positiv, und in y als positiv homogen von erster Ordnung vorausgesetzt. Es ist auch vorausgesetzt

Eingegangen am 30. September 1976.

dass der Finslersche Tensor $g_{ij}=(1/2)\dot{\partial}_i\dot{\partial}_j L^2$ vom $(0,2)$-Typ positiv definit ist, wobei $\dot{\partial}$ die partielle Ableitung $\partial/\partial y_i$ bezeichnet.

Der Einheitsvektor im Punkte (x) in der Richtung des Linienelementes (x, y) hat die kontravarianten, bzw. kovarianten Komponenten

$$l^i = y^i/L, \quad l_i = \dot{\partial}_i L = g_{ij} l^i.$$

Es gilt auch $l^i = g^{ij} l_j$, wobei der reziproke Tensor g^{il} durch $g^{ij} g_{lj} = \delta^i_l$ definiert ist.

Es bezeichne ∂_i die partielle Ableitung: $\partial/\partial x^i$. Die Zusammenhangsobjekte $G^i(x, y)$ des Raumes definieren wir durch:

$$G^i(x, y) = (1/4)\, g^{ih}(y^m \dot{\partial}_h \partial_m L^2 - \partial_h L^2),$$

ferner sei

$$G^i_j \overset{\text{def}}{=} \dot{\partial}_j G^i, \quad G^i_{jk} \overset{\text{def}}{=} \dot{\partial}_j G^i_k, \dots \text{ u.s.w.}$$

Mit Hilfe dieser Objekte definieren wir den Grundtensor der affinen Krümmung, bzw. den Weylschen Krümmungstensor durch

$$H^i_{jk} = \partial_k G^i_j - \partial_j G^i_k + G^r_j G^i_{rk} - G^r_k G^i_{rj}, \tag{1.1}$$

$$W^i_{jk} = H^i_{jk} - \frac{1}{n+1} H_r{}^r{}_{jk} y^i + \frac{1}{n^2-1}\delta^i_j(nH_k + H_{km} y^m) - \frac{1}{n^2-1}\delta^i_k(nH_j + H_{jm} y^m), \tag{1.2}$$

wobei

$$H_h{}^i{}_{jk} = \dot{\partial}_h H^i_{jk}, \quad H_j = H^r_{jr}, \quad H_{hj} = H_h{}^r{}_{jr}.$$

Der Skalar $H = \dfrac{1}{n-1} H^r_r$ ist der affine Krümmungsskalar des Raumes. Wir benötigen später die Formeln [1]:

$$H = \frac{1}{n-1} y^i H^k_{ik}, \quad H_{hj} = \dot{\partial}_h H_j, \quad H_{jk} - H_{kj} = -H_r{}^r{}_{jk}. \tag{1.3}$$

L. Berwald hat das Krümmungsmass $R(x, y, \eta)$ des Raumes im Linienelement (x, y) nach der 2-Richtung (y, η) durch

$$R(x, y, \eta) = H_{ikhm} y^i y^h \eta^k \eta^m / (g_{ih} g_{km} - g_{im} g_{hk}) y^i y^h \eta^k \eta^m, \tag{1.4}$$

und den Krümmungsskalar $R(x, y)$ im Linienelement (x, y) durch

$$R(x, y) = H(x, y)/L^2 \tag{1.5}$$

definiert. Der Raum heisst von skalarer Krümmung, wenn $R(x, y, \eta)$ von der Wahl des Vektors η unabhängig ist. In diesem Fall gilt die Gleichung: $R(x, y, \eta) = R(x, y)$. Ein Satz von Schur [1] lautet: Ist der Raum von skalarer Krümmung, und ist $R(x, y)$ nur eine Funktion des Ortes, so ist $R(x, y)$ konstant. Diese Räume sind die Räume von konstanter Krümmung.

Bezeichnet $R_j{}^i{}_{kh}$ bzw. $g_{si}R_j{}^s{}_{kh}=R_{jikh}$ den Cartanschen Krümmungstensor des Raumes, so gelten die Relationen [1]:

$$H^i_{jk} = y^l R_l{}^i{}_{jk}, \tag{1.6}$$

$$H^i_j = y^l y^k R_l{}^i{}_{kj}. \tag{1.7}$$

Aus der wohlbekannten schiefsymmetrischen Eigenschaft $R_{jikh}=-R_{jikh}$ folgt auch: $y^i y^j R_{jikh}=0$, und somit $l_i H^i_{kj}=0$.

Berwald hat auch folgendes bewiesen [1]:

Ein Finslerscher Raum F_n, dim $F_n>2$ ist genau dann von skalarer Krümmung, wenn der Tensor $R_0{}^i{}_{0j} \overset{\text{def}}{=} l^k l^m R_k{}^i{}_{mj}=(1/L^2)H^i_j$ die folgende Form hat:

$$R_0{}^i{}_{0j} = R(x, y)(\delta^i_j - l^i l_j). \tag{1.8}$$

Die Antiderivationen d_h und d_v auf den schiefsymmetrischen Finslerschen Tensoren vom $(0, s)$-Typ führt man folgendermassen ein:

$$(d_h\omega)_{i_0 i_1 \dots i_s} = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \omega_{i_0 i_1 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_s | i_k}, \tag{1.9}$$

$$(d_v\omega)_{i_0 i_1 \dots i_s} = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \dot{\partial}_{i_k} \omega_{i_0 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_s}, \tag{1.10}$$

wobei $\omega_{i_0 i_1 \dots i_s}$ ein schiefsymmetrischer Finslerscher Tensor vom $(0, s)$-Typ ist, ferner das Symbol „I" die Berwaldschen kovarianten Ableitung bezüglich den Objekten G^i_{jk} bezeichnet. Aus den obigen Definitionen erhalten wir mühelos:

Satz 1. 1) *d_h und d_v sind beide Antiderivationen bezüglich des äusseren Tensorproduktes $\wedge$, ferner gilt $d_h d_v + d_v d_h = 0$.*

2) *Die Gleichung $d_h^2=0$ besteht genau dann, wenn $H^i_{jk}=0$.*

3) $d_v^2=0$.

Der Tensor ω ist in horizontaler bzw. in vertikaler Weise geschlossen, wenn es $d_h\omega=0$ bzw. $d_v\omega=0$ gilt. Es gilt auch der interessante Satz von Poincaré:

Ist ω ein Finslerscher, in vertikaler Weise geschlossener Tensor vom $(0, s)$-Typ, so gibt es einen globalen Tensor ω^* vom $(0, s-1)$-Typ, für den $d_v\omega^*=\omega$ gilt.

Diesen Satz benötigen wir in folgendem nicht.

§ 2. Die Umkehrung des Satzes von Berwald. Der kanonische Krümmungstensor

Das Hauptergebnis dieses Paragraphen ist:

Satz 2. *Ein Finslerscher Raum F_n, mit dim $F_n>2$, ist genau dann von skalarer Krümmung, wenn sein Weylscher Tensor W^i_{jk} verschwindet.*

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir das

Lemma. *Der Grundtensor* H^i_{jk} *eines beliebigen Finslerschen Raumes lässt sich eindeutig in der Form*

$$H^i_{jk} = W^i_{jk} + \omega_j \delta^i_k - \omega_k \delta^i_j - (d_v \omega)_{jk} y^i \tag{2.1}$$

darstellen, wobei ω *ein positiv homogener (von* 1*-ter Ordnung) Finslerscher kovarianter Vektor ist, ferner gelten:*

$$y^i \omega_i = H, \tag{2.2}$$

$$y^i (d_v \omega)_{ij} = 2\omega_j - \dot{\partial}_j H. \tag{2.3}$$

Beweis. Aus (1.2) folgt

$$H^i_{jk} = W^i_{jk} + \omega_j \delta^i_k - \omega_k \delta^i_j - \Omega_{jk} y^i$$

mit

$$\omega_k = \frac{1}{n^2 - 1} (n H_k + H_{km} y^m), \tag{2.4}$$

$$\Omega_{jk} = - \frac{1}{n+1} H_r{}^r{}_{jk}. \tag{2.5}$$

In diesem Fall:

$$(d_v \omega)_{jk} = \dot{\partial}_j \omega_k - \dot{\partial}_k \omega_j = \frac{1}{n^2 - 1} \big((n-1)(H_{jk} - H_{kj}) + y^m (\dot{\partial}_j H_{km} - \dot{\partial}_k H_{jm})\big).$$

Wegen $H_{km} = \dot{\partial}_k H_m$ verschwindet das letzte Glied im Klammer, so folgt aus (1.3)

$$\Omega_{jk} = - \frac{1}{n+1} H_r{}^r{}_{jk} = \big((n-1)/(n^2-1)\big)(H_{jk} - H_{kj}) = (d_v \omega)_{jk}.$$

Somit ist H^i_{jk} von der Form (2.1). Wir beweisen jetzt (2.2) und (2.3). Aus (1.3) und (2.1) folgt:

$$H = \big(1/(n-1)\big) y^i H^k_{ik} = \big(1/(n-1)\big)\big(y^i W^k_{ik} + (n-1) y^i \omega_i - y^j y^i (\dot{\partial}_j \omega_i - \dot{\partial}_i \omega_j\big) = y^i \omega_i,$$

da

$$W^k_{ik} = 0, \quad y^i y^j (d_v \omega)_{ij} = 0.$$

Ähnlich folgt:

$$y^i (d_v \omega)_{ij} = y^i (\dot{\partial}_i \omega_j - \dot{\partial}_j \omega_i) = \omega_j - y^i \dot{\partial}_j \omega_i = 2\omega_j - \dot{\partial}_j H.$$

Wir beweisen noch, dass der Tensor ω in (2.1) eindeutig bestimmt ist. In der Tat, aus (2.1), (2.2) und (2.3) erhalten wir:

$$y^i H^k_{ij} = y^i W^k_{ij} + H \delta^k_j - \omega_j y^k - 2(\omega_j - \dot{\partial}_j H) y^i.$$

Komponiert man diese Gleichung mit l_k, so bekommt man

$$\omega_j = (1/3)\big(l_k l^i W^k_{ij} + (H/L) l_j + \dot{\partial}_j H\big).$$

Beweis des Satzes 2. Wenn der Raum von skalarer Krümmung ist, so hat er einen verschwindenen Weylschen Tensor. Diesen Tat hat Berwald bewiesen [1], so werden wir uns mit diesem Teil des Satzes nicht beschäftigen.

Umgekehrt, wenn für F_n die Gleichung $W^i_{jk}=0$ gilt, dann folgt aus (2.1):

$$H^i_{jk} = \omega_j \delta^i_k - \omega_k \delta^i_j - \omega_k \delta^i_j - (d_v \omega)_{jk} y^i.$$

Komponiert man diese Gleichung mit l_i, so erhält man:

$$L(d_v\omega)_{jk} = \omega_j l_k - \omega_k l_j,$$

und daraus folgt:

$$y^j (d_v \omega)_{jk} = \omega_j l_k - \omega_k l_j.$$

Mit Rücksicht auf (2.3) erhalten wir:

$$\omega_j = (1/3)\big((H/L) l_k + \dot{\partial}_j H\big) = RL_{\|i} + (1/3) LR_{\|i}, \tag{2.6}$$

und daraus:

$$(d_v \omega)_{ij} = (1/3)(l_j R_{\|i} - l_i R_{\|j}), \tag{2.7}$$

wobei $R=H/L^2$, und die Operation $\|i$ durch $L\dot{\partial}_i$ definiert ist. Substitutiert man (2.6) und (2.7) in (2.1) so rechnet man mühelos aus:

$$R_0{}^j{}_{0m} = (1/L^2) y^i H^j_{im} = (1/L^2)\big(H\delta^j_m - (RL_{\|m} + (1/3) LR_{\|m}) y^j + (1/3) LR_{\|m} y^j\big) =$$
$$= R(\delta^j_m - l^j l_m),$$

damit ist der Raum von skalarer Krümmung. Q.E.D.

Den Tensor ω nennen wir den kanonischen Krümmungstensor des Finslerschen Raumes. Im allgemeinen gilt die Formel:

$$\omega_i = \frac{1}{n^2-1}(nH_i + H_{im} y^m) = \frac{1}{n+1}(H_i + \dot{\partial}_i H), \tag{2.8}$$

und wenn der Raum von skalarer Krümmung ist, so gilt:

$$\omega_i = RL_{\|i} + (1/3) LR_{\|i}. \tag{2.9}$$

Aus (2.9) folgt unmittelbar:

Satz 3. *Der Raum* F_n, dim $F_n > 2$, *ist genau dann von konstanter Krümmung wenn* $W^i_{jk}=0$, $(d_v\omega)_{jk}=0$. *In diesem Fall gilt:*

$$\omega_i = (1/2)\dot{\partial}_i H = RLl_i.$$

Satz 4. *In einem allgemeinen Finslerschen Raum gelten die Folgenden:*

1) $d_v\omega=0$ *genau dann, wenn* $H_k{}^k{}_{ij}=0$.

2) $d_h\omega=0$ *genau dann, wenn* $W_i{}^s{}_{j|s}=0$.

3) *In einem Raum von skalarer Krümmung gelten die Gleichungen:*

$$(d_h\omega)_{ij} = 0; \quad (d_v L\omega)_{ij} = 0,$$

und in einem Raum von konstanter Krümmung:

$$(d_h\omega)_{ij} = 0; \quad (d_v\omega)_{ij} = 0; \quad l_i \wedge \omega_j = 0.$$

Beweis. 1) folgt aus (2.5), und 3) folgt aus 1) und 2) unmittelbar. Der Beweis des Punktes 2) ist, wie folgt.

Substitutiert man in die Bianchi-Identität

$$H^i_{jk|l} + H^i_{kl|j} + H^i_{lj|k} = 0$$

den Ausdruck (2.1), so erhält man:

$$-\sigma W^i_{jk|l} = \sigma(d_h\omega)_{jk}\delta^i_l - (d_h d_v \omega)_{jkl}\, y^i,$$

wobei σ dei zyklische Summe bezüglich den Indizes k, j, l bezeichnet. Wendet man die Gleichung $-d_h d_v \omega = d_v d_h \omega$ an, dann bekommt man die Behauptung 2) mit der Kontraktion $i \to j$. Q.E.D.

Literaturverzeichnis

[1] L. Berwald, Finslersche und Cartansche Geometrie. IV, *Annals of Math.*, **48** (1947), 755—781.

[2] H. Rund, *The differential geometry of Finsler spaces*, Springer-Verlag (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1959).

[3] O. Varga, Eine geometrische Charakterisierung der Finslerschen Räume skalarer und konstanter Krümmung, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **2** (1951), 143—156.