Acta Sci. Math., 39 (1977), 169—174

Vecteurs cycliques et commutativité des commutants. II

BÉLA SZ.-NAGY et CIPRIAN FOIAŞ

1. Dans la Note I (*Acta Sci. Math.*, **32** (1971), 177—183) on a démontré que pour toute contraction complètement non-unitaire T dans l'espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, de classe $C_{\cdot 1}$, la condition

(i$_*$) T^* admet un vecteur cyclique

entraîne que

(i) T admet un vecteur cyclique,

(ii) le commutant $\{T\}'$ est commutatif.

Dans la Note présente on va compléter ce résultat comme il suit:

Théorème. *Pour une contraction T de classe C_{01}, telle que $I-TT^*$ est de trace finie, la condition* (i$_*$) *entraîne même que $\{T\}'$ est constitué des fonctions de T, notamment*

(iii) $\{T\}'=\{u(T): u\in H^\infty\}$.

Tout comme dans la Note I, la démonstration sera basée sur des éléments de la théorie des dilatations.

2. Pour une contraction quelconque T de l'espace $\mathfrak{H}$, désignons par U la dilatation unitaire minimum de T, opérant dans un espace $\mathfrak{K}(\supset\mathfrak{H})$, et par U_+ la dilatation isométrique minimum de T, opérant dans l'espace

$$\mathfrak{K}_+ = \bigvee_{n\geq 0} U^n\mathfrak{H}. \tag{1}$$

Soit R la partie unitaire de U_+, opérant dans l'espace

$$\mathfrak{R} = \bigcap_{n\geq 0} U_+^n\mathfrak{K}_+\,(\subset\mathfrak{K}_+).$$

L'opérateur $X=P_{\mathfrak{R}}|\mathfrak{H}$ $(\mathfrak{H}\to\mathfrak{R})$ et son adjoint $X^*=P_{\mathfrak{H}}|\mathfrak{R}$ $(\mathfrak{R}\to\mathfrak{H})$ vérifient alors les relations (cf. Note I)

$$XT^{*n} = R^{*n}X, \quad T^nX^* = X^*R^n \qquad (n=0,1,\ldots). \tag{2}$$

Il s'ensuit que $R^*\overline{X\mathfrak{H}}\subset\overline{X\mathfrak{H}}$, d'où $R(\mathfrak{R}\ominus\overline{X\mathfrak{H}})\subset\mathfrak{R}\ominus\overline{X\mathfrak{H}}$.

Reçu le 7. avril 1976, en forme revue et augmentée le 1. novembre 1976.

Soit $\mathfrak{R}'$ l'espace de la partie unitaire de l'isométrie $R_0 = R|(\mathfrak{R} \ominus \overline{X\mathfrak{H}})$. On a $R_0\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}'$, $R\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}'$, $U_+\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}'$, d'où il s'ensuit que $\mathfrak{R}'$ réduit U_+ aussi. Or on a

$$\mathfrak{R}' \perp X\mathfrak{H} = P_{\mathfrak{R}}\mathfrak{H}, \quad \mathfrak{R}' \perp \mathfrak{H}.$$

Comme la dilatation U_+ est minimum cela entraîne $\mathfrak{R}' = \{0\}$. Ainsi dans la condition

$$\text{(a)} \qquad \mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R} \ominus \overline{X\mathfrak{H}} \neq \{0\}$$

l'opérateur R_0 est une translation unilatérale non banale (c'est-à-dire de multiplicité $\geqq 1$). Toujours dans la condition (a), posons

$$\mathfrak{R}_1 = \bigvee_{n \geqq 0} R^{-n}\mathfrak{R}_0, \quad R_1 = R|\mathfrak{R}_1;$$

R_1 est évidemment une translation bilatérale: prolongement unitaire minimum de la translation unilatérale R_0.

Faisons aussi l'hypothèse:

(b) T^* admet un vecteur cyclique, soit h.

On déduit alors de (2) et (1) que

$$\overline{P_{\mathfrak{R}}\mathfrak{H}} = \overline{P_{\mathfrak{R}} \bigvee_{n \geqq 0} T^{*n}h} = \bigvee_{n \geqq 0} R^{*n}r \quad \text{où} \quad r = P_{\mathfrak{R}}h, \tag{3}$$

$$\mathfrak{R} = P_{\mathfrak{R}}\mathfrak{K}_+ = \bigvee_{m \geqq 0} P_{\mathfrak{R}}U_+^m\mathfrak{H} = \bigvee_{m \geqq 0} U_+^m P_{\mathfrak{R}}\mathfrak{H} = \bigvee_{m \geqq 0} R^m P_{\mathfrak{R}}\mathfrak{H} = \bigvee_{j=-\infty}^{\infty} R^j r. \tag{4}$$

Supposons de plus que

(c) T est complètement non-unitaire.

Dans ce cas U et par conséquent R ont leurs mesures spectrales E^U et $E^R = E^U|\mathfrak{R}$ absolûment continues. Comme, d'autre part, dans nos hypothèses R contient une translation bilatérale non banale, nous concluons en particulier que la fonction $(E_t^R r, r)$ est absolûment continue et que

$$\alpha(t) = \frac{d}{dt}(E_t^R r, r) > 0 \quad \text{p.p.} \tag{5}$$

Vu que pour j, k entiers quelconques on a

$$(R^j r, R^k r) = \int_0^{2\pi} e^{i(j-k)t}\alpha(t)\,dt,$$

la correspondance

$$\sum_j c_j R^j r \mapsto \sum_j c_j e^{ijt} \cdot \sqrt{\alpha(t)}$$

(pour des sommes finies) est isométrique; en vertu de (4) et (5) elle s'étend par continuité à un opérateur unitaire

$$\tau : \mathfrak{R} \to L^2(0,2\pi).$$

R se transforme par τ en l'opérateur de multiplication par e^{it} dans $L^2(0,2\pi)$. On conclut que R est une translation bilatérale simple dans $\mathfrak{R}$.

Comme R_1 est aussi une translation bilatérale, restriction de R à $\mathfrak{R}_1$, on a nécessairement $\mathfrak{R}_1=\mathfrak{R}$, $R_1=R$; *cf.* [H], Proposition I.2.1. Ainsi, R_0 est une translation unilatérale simple dans $\mathfrak{R}_0$ et R est une extension unitaire minimum de R_0.

Cela étant, envisageons, toujours dans les hypothèses (a)—(c), un $A\in\{T\}'$. On y peut attacher un $B\in\{U_+\}'$ tel que

$$AP_{\mathfrak{H}}=P_{\mathfrak{H}}B, \quad \|B\|=\|A\|, \tag{6}$$

et on a $B\mathfrak{R}\subset\mathfrak{R}$, $C=B|\mathfrak{R}\in\{R\}'$; *cf.* Note I, (17). Par (6) on a

$$AX^*=X^*C, \quad XA^*=C^*X, \quad \text{d'où} \quad C^*\overline{X\mathfrak{H}}\subset\overline{X\mathfrak{H}}, \quad C\mathfrak{R}_0\subset\mathfrak{R}_0. \tag{7}$$

En posant $C_0=C|\mathfrak{R}_0$ on aura $C_0\in\{R_0\}'$. Comme R_0 est une translation unilatérale simple, cela entraîne qu'il existe $u\in H^\infty$ tel que

$$C_0=u(R_0), \quad \text{d'où} \quad C|\mathfrak{R}_0=u(R)|\mathfrak{R}_0$$

Puisque R permute à C et à $u(R)$, et que

$$\mathfrak{R}=\bigvee_{n\geqq 0}R^{-n}\mathfrak{R}_0,$$

il vient:

$$C=u(R), \tag{8}$$

Par (7) et (8), et par la relation $TP_{\mathfrak{H}}=P_{\mathfrak{H}}U_+$ entre T et U_+ il s'ensuit:

$$AX^*=X^*u(R)=P_{\mathfrak{H}}u(U_+)|\mathfrak{R}=u(T)P_{\mathfrak{H}}|\mathfrak{R}, \quad \big(A-u(T)\big)P_{\mathfrak{H}}|\mathfrak{R}=0.$$

Lorsque $T\in C_{\cdot 1}$, on a $\ker P_{\mathfrak{R}}|\mathfrak{H}=\{0\}$ (*cf.* [H], Prop. II.3.1) et par conséquent $(P_{\mathfrak{R}}|\mathfrak{H})^*=P_{\mathfrak{H}}|\mathfrak{R}$ a ses valeurs denses dans $\mathfrak{H}$, donc dans ce cas

$$A-u(T)=0, \quad A=u(T). \tag{9}$$

On a donc démontré le suivant

Lemme 1. *Pour toute contraction T dans $\mathfrak{H}$, de classe $C_{\cdot 1}$, vérifiant les conditions* (a)—(c), *et pour tout $A\in\{T\}'$ on a la représentation* (9), *avec un $u\in H^\infty$.*

Remarque. On aboutit au même résultat si, au lieu de la condition (c), on suppose seulement que la partie unitaire de T ait sa mesure spectrale absolument continue.

3. Afin d'élucider la condition (a) rappelons que pour une contraction T quelconque dans $\mathfrak{H}$ on a les décompositions

$$\mathfrak{K}_+=\mathfrak{H}\oplus M_+(\mathfrak{L}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{K}_+=M_+(\mathfrak{L}_*)\oplus\mathfrak{R}$$

où $\mathfrak{L}=\overline{(U-T)\mathfrak{H}}$, $\mathfrak{L}_*=\overline{(I-UT^*)\mathfrak{H}}$; *cf.* [H], Chap. I.

Il s'ensuit l'équivalence:

$$\{\overline{P_{\mathfrak{R}}\mathfrak{H}}=\mathfrak{R}\}\Leftrightarrow\{Q_+:M_+(\mathfrak{L})\to M_+(\mathfrak{L}_*) \text{ est injectif}\},$$

où Q_+ désigne la projection orthogonale de $M_+(\mathfrak{L})$ à $M_+(\mathfrak{L}_*)$. Dans la représentation de Fourier de Q_+ (*cf.* [H], Chap. VI) la dernière condition veut dire que l'opérateur

$$\Theta : H^2(\mathfrak{L}) \to H^2(\mathfrak{L}_*)$$

de multiplication par la fonction caractéristique $\Theta(\lambda)$ de T est injectif.

Ainsi, la condition (a) est équivalente à la suivante:

$$\text{(a*)} \quad \text{il existe } h \in H^2(\mathfrak{L}), \ h \neq 0, \ \text{tel que } \Theta h = 0.$$

Lemme 2. *La condition* (a*) *est vérifiée en particulier dans le cas où* $T \in C_{01}$ *et* $I - TT^*$ *est de trace finie.*

Démonstration. Soit

$$(I - TT^*)h = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(h, \varphi_n)\varphi_n \quad (h \in \mathfrak{H}) \tag{10}$$

la représentation spectrale de $I - TT^*$ suivant un système orthonormal $\{\varphi_n\}$ de vecteurs propres, où $\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \ldots > 0$.[1] Puisque $T \in C_{01}$ $(\subset C_{\cdot 1})$, on a $T^*\varphi_n \neq 0$ et par conséquent $\mu_n < 1$. Les vecteurs

$$\psi_n = (1 - \mu_n)^{-1/2} T^* \varphi_n \tag{11}$$

forment eux aussi un système orthonormal et on a

$$\varphi_n = (1 - \mu_n)^{-1/2} T \psi_n. \tag{12}$$

De plus, on déduit de (11) et (12)

$$\begin{aligned}(I - T^*T)\psi_n &= (1-\mu_n)^{-1/2}(I - T^*T)T^*\varphi_n = (1-\mu_n)^{-1/2}T^*(I - TT^*)\varphi_n = \\ &= (1-\mu_n)^{-1/2}\mu_n T^*\varphi_n = \mu_n \psi_n.\end{aligned} \tag{13}$$

Considérons les sous-espaces $\mathfrak{M}_n$ de $\mathfrak{D}_T (= \overline{(I - T^*T)\mathfrak{H}})$ et $\mathfrak{M}_{*n}$ de $\mathfrak{D}_{T^*} (= \overline{(I - TT^*)\mathfrak{H}})$ engendrés par les vecteurs $\psi_1, \ldots, \psi_n$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, selon les cas. Notons que par (10) on a $\mathfrak{D}_{T^*} = \bigvee_1^\infty \varphi_n$, tandis que (13) assure seulement que $\mathfrak{M} = \bigvee_1^\infty \psi_n$ est un sous-espace de $\mathfrak{D}_T$. Soient P_n et P les projections orthogonale sde $\mathfrak{D}_T$ sur $\mathfrak{M}_n$ et $\mathfrak{M}$, selon les cas, et soit P_{*n} la projection orthogonale de $\mathfrak{D}_{T^*}$ sur $\mathfrak{M}_{*n}$.

On a donc

$$P_{*n} \to I_{\mathfrak{D}_{T^*}} \quad \text{et} \quad P_n \to P \quad (n \to \infty). \tag{14}$$

Cela étant, considérons la fonction caractéristique de T dans sa forme canonique $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_T(\lambda)\}$, *cf.* [H], Sec. VI.1.1. Soit $d_n(\lambda)$ le déterminant de la matrice

$$M_n(\lambda) = [m_{ij}(\lambda)]_{i,j=1,\ldots,n} \quad \text{où} \quad m_{ij}(\lambda) = (\Theta_T(\lambda)\psi_j, \varphi_i).$$

[1]) Si $I - TT^*$ est de rang fini, les sommes dans (10), et dans ce qui suit, s'étendent à un nombre fini de termes.

Puisque $\Theta_T(0) = -T|\mathfrak{D}_T$, on a

$$|d_n(0)| = |\det[(T\psi_j, \varphi_i)]_{i,j=1,\dots,n}| =$$
$$= |\det[((1-\mu_j)^{1/2}\varphi_j, \varphi_i)]_{i,j=1,\dots,n}| = \prod_{j=1}^{n}(1-\mu_j)^{1/2} \geqq a,$$

où

$$a = \prod_{j=1}^{\infty}(1-\mu_j)^{1/2} > 0 \quad \text{parce que} \quad \sum_j \mu_j = \operatorname{tr}(I-TT^*) < \infty.$$

Définissons les fonctions $\{\mathfrak{D}_T, \mathfrak{D}_{T^*}, \Theta_n(\lambda)\}$ par

$$\Theta_n(\lambda)f = P_{*n}\Theta_T(\lambda)P_n f + \sum_{k=n+1}^{\infty}(f, \psi_k)\varphi_k \quad (f \in \mathfrak{D}_T); \tag{15}$$

ces fonctions sont évidemment analytiques, contractives, et on a

$$\Theta_n(\lambda)^* g = P_n\Theta_T(\lambda)^* P_{*n} g + \sum_{k=n+1}^{\infty}(g, \varphi_k)\psi_k \quad (g \in \mathfrak{D}_{T^*}). \tag{16}$$

Faisant usage de ce que P_n et P_{*n} sont des projections orthogonales et convergent suivant (14), on déduit de (15) et (16) que

$$\Theta_n(\lambda)f \to \Theta_T(\lambda)Pf \quad (f \in \mathfrak{D}_T) \tag{17}$$

$$\Theta_n(\lambda)^* g \to P\Theta_T(\lambda)^* g \quad (g \in \mathfrak{D}_{T^*}) \tag{18}$$

lorsque $n \to \infty$.

Soit $\omega_n(\lambda)$ l'opérateur de $\mathfrak{M}_{*n}$ dans $\mathfrak{M}_n$ dont la matrice $[(\omega_n(\lambda)\varphi_j, \psi_i)]_{i,j=1,\dots,n}$ est l'adjoint algébrique de la matrice $M_n(\lambda)$, donc telle que

$$M_n(\lambda)\omega_n(\lambda) = \omega_n(\lambda)M_n(\lambda) = d_n(\lambda)I_n$$

où I_n désigne la matrice unité d'ordre n. En fonctions de λ ($|\lambda| < 1$) toutes ces matrices sont analytiques et contractives; *cf.* [H], Sec. V.6.1.

Définissons alors les fonctions $\{\mathfrak{D}_{T^*}, \mathfrak{D}_T, \Omega_n(\lambda)\}$ par

$$\Omega_n(\lambda)g = \omega_n(\lambda)P_{*n}g + d_n(\lambda)\sum_{k=n+1}^{\infty}(g, \varphi_k)\psi_k \quad (g \in \mathfrak{D}_{T^*}). \tag{19}$$

Elles sont aussi analytiques, contractives et on a

$$\Omega_n(\lambda)\mathfrak{D}_{T^*} \subset \mathfrak{M} \quad \text{pour tout } n \text{ et } \lambda,\ |\lambda| < 1. \tag{20}$$

On déduit de (15) et (19):

$$\Theta_n(\lambda)\,\Omega_n(\lambda)g = d_n(\lambda)g \quad (g \in \mathfrak{D}_{T^*}). \tag{21}$$

Faisant usage du théorème de Vitali—Montel on montre qu'il existe une suite partielle $\{n_q\}$ d'indices telle que $d_{n_q}(\lambda)$ tend dans $|\lambda| < 1$ vers une fonction analytique $d(\lambda)$ et $\Omega_{n_q}(\lambda)$ tend (faiblement) vers une fonction analytique $\{\mathfrak{D}_{T^*}, \mathfrak{D}_T, \Omega(\lambda)\}$;

on a $|d(\lambda)|\leqq 1$, $|d(0)|\geqq a(>0)$ et $\Omega(\lambda)$ est aussi contractive. De plus, (20) entraîne

$$\Omega(\lambda)\mathfrak{D}_{T^*}\subset \mathfrak{M}. \tag{22}$$

Enfin, (21) entraîne, eu égard à (13) et (17), que

$$\Theta_T(\lambda)\Omega(\lambda)g=d(\lambda)g \quad (g\in\mathfrak{D}_{T^*}), \tag{23}$$

d'où, en particulier (posant $g=\Theta_T(\lambda)f$),

$$\Theta_T(\lambda)\big(\Omega(\lambda)\Theta_T(\lambda)f-d(\lambda)f\big)=0 \quad (f\in\mathfrak{D}_T). \tag{24}$$

Si la condition (a*) n'est pas vérifiée, (24) entraîne

$$\Omega(\lambda)\Theta_T(\lambda)f=d(\lambda)f \quad \text{pour tout} \quad f\in\mathfrak{D}_T,$$

ce qui, ensemble avec (23), veut dire que $\Theta_T(\lambda)$ admet le multiple scalaire $d(\lambda)$. Or, cela est impossible parce que $T\in C_{01}$.

Cette contradiction prouve que (a*) est vérifiée et achève la démonstration du Lemme 2. Les deux lemmes ensemble entraînent le théorème énoncé au commencement de cette Note.

Remarque. **1.** La condition que $I-TT^*$ soit de trace finie est vérifiée en particulier si $I-TT^*$ est de rang $\mathfrak{d}_{T^*}<\infty$. Des exemples de contractions $T\in C_{01}$ avec T^* cyclique est $\mathfrak{d}_{T^*}$ fini (notamment avec $\mathfrak{d}_{T^*}=1$) ont été construits dans [1], Proposition 2. (Prendre les adjoints des opérateurs $S(\Theta)$ qui y sont considérés.) Ces exemples sont quasi-similaires à l'adjoint S^* de la translation unilatérale simple S. Il se peut que toute contraction T vérifiant les hypothèses de notre théorème et avec T^* cyclique soit quasi-similaire à S (problème ouvert).

2. Lemme 2 n'est pas en général valable si $I-TT^*$ est compact, mais de trace infinie, même si $\sum_n \mu_n^p<\infty$ pour un exposant $p>1$. En effet, dans [2] on construit des contractions $T\in C_{01}$ telles que $\sum_n \mu_n^p<\infty$ pour un p donné d'avance et que ni T ni T^* n'ont pas de valeurs propres. Par conséquent, $\Theta_T(\lambda)$ est alors une injection pour toute valeur de λ et (a*) est impossible.

Ouvrages cités

[H] Béla Sz.-Nagy—Ciprian Foiaş, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, North Holland/Akadémiai Kiadó (Amsterdam/Budapest, 1970).

[1] Béla Sz.-Nagy—Ciprian Foiaş, Jordan model for contractions of class $C_{\cdot 0}$, *Acta Sci. Math*,. **36** (1974), 303—322.

[2] F. Gilfeather, Weighted bilateral shifts of class C_{01}, *Acta Sci. Math.*, **33** (1971), 251—254.

INSTITUT BOLYAI
ARADI VÉRTANÚK TERE 1
6720 SZEGED, HONGRIE

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES
STR. ACADEMIEI 14
BUCAREST, ROUMANIE