Acta Sci. Math., 40 (1978), 3—8

Produit de convolution des mesures opératorielles

S. K. BERBERIAN

Si, pour $i=1,2$, A_i est un opérateur normal dans l'espace hilbertien H_i, avec la représentation spectrale $A_i=\int\lambda\,dE_i$, l'opérateur

$$A = A_1\otimes 1+1\otimes A_2 \tag{1}$$

dans l'espace produit tensoriel hilbertien $H_1\otimes H_2$ est aussi normal, donc possède une représentation spectrale $A=\int\lambda\,dE$. Dans un article récent [6], D. W. Fox a montré qu'on peut regarder E comme un produit de convolution $E=E_1*E_2$ dans un sens convenable (Fox ne considère que des opérateurs hermitiens, mais ses raisonnements se généralisent immédiatement). Le but de cet article est de pousser les raisonnements de Fox vers leurs limites naturelles, et indiquer quelques applications aux représentations des groupes abéliens et aux représentations intégrales des contractions.

Par *espace à mesure p. o.* (sur un espace hilbertien H) nous entendons un triple $(X,\mathscr{S},E)$, où X est un ensemble, $\mathscr{S}$ est un σ-anneau de sous-ensembles de X, et E est une mesure positive opératorielle (c'est-à-dire une PO-mesure au sens de [1, Def. 1]) définie sur $\mathscr{S}$, dont les valeurs sont des opérateurs positifs dans H. Ainsi, pour chaque couple de vecteurs x,y dans H, il est défini sur $\mathscr{S}$ une mesure complexe bornée $\mu^E_{x,y}$ telle que

$$\mu^E_{x,y}(M)=\big(E(M)x|y\big)\quad\text{pour tout}\quad M\in\mathscr{S}. \tag{2}$$

Si, de plus, X est un espace topologique et si la mesure E est birégulière [1, p. 88] au sens que, pour chaque $M\in\mathscr{S}$, on a

$$E(M)=\sup\{E(C)\colon C\subset M,\ \ C\text{ compact},\ \ C\in\mathscr{S}\}, \tag{3a}$$

$$E(M)=\inf\{E(U)\colon U\supset M,\ \ U\text{ ouvert},\ \ U\in\mathscr{S}\}, \tag{3b}$$

nous appellerons $(X,\mathscr{S},E)$ un *espace à mesure p. o. birégulière* (sur H).

Received June 6, 1977.

Lemme 1. *Si, pour* $i=1, 2$, $(X_i, \mathscr{S}_i, E_i)$ *est un espace à mesure p. o. birégulière sur l'espace hilbertien* H_i, *alors il existe une mesure p. o.* $E_1 \otimes E_2$ *(sur* $H_1 \otimes H_2$*) définie sur* $\mathscr{S}_1 \times \mathscr{S}_2$, *et une seule, telle que*

$$(E_1 \otimes E_2)(M_1 \times M_2) = E_1(M_1) \otimes E_2(M_2) \tag{4}$$

pour chaque rectangle mesurable $M_1 \times M_2$.

Démonstration. Définissons les mesures p. o. $E_1 \otimes 1$ et $1 \otimes E_2$ sur $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$, suivant les cas, par les formules

$$(E_1 \otimes 1)(M_1) = E_1(M_1) \otimes 1_{H_2}, \quad (1 \otimes E_2)(M_2) = 1_{H_1} \otimes E_2(M_2).$$

On voit immédiatement que $(X_1, \mathscr{S}_1, E_1 \otimes 1)$ et $(X_2, \mathscr{S}_2, 1 \otimes E_2)$ sont tous les deux des espaces à mesure p. o. birégulière sur $H_1 \otimes H_2$, et que $E_1 \otimes 1 \leftrightarrow 1 \otimes E_2$, c'est-à-dire que chaque valeur de $E_1 \otimes 1$ est permutable avec chaque valeur de $1 \otimes E_2$; l'existence et l'unicité de $E_1 \otimes E_2$ dérivent donc immédiatement de [1, Th. 33]. ∎

Il y a une relation naturelle entre le produit tensoriel des mesures opératorielles et le produit des mesures numériques:

Lemme 2. *Avec les notations du lemme* 1 *on a*

$$\mu^{E_1 \otimes E_2}_{x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2} = \mu^{E_1}_{x_1, y_1} \times \mu^{E_2}_{x_2, y_2} \tag{5}$$

pour tous $x_1, y_1 \in H_1$ *et* $x_2, y_2 \in H_2$.

Démonstration. Les deux membres de l'équation sont des mesures bornées sur $\mathscr{S}_1 \otimes \mathscr{S}_2$, et il est immédiat des définitions qu'elles sont égaux pour chaque rectangle mesurable. ∎

Avec les notations du lemme l, supposons donné une application $\varphi: X_1 \times X_2 \to Y$ (Y un ensemble quelconque). Soit $\mathscr{T} = \{N \subset Y: \varphi^{-1}(N) \in \mathscr{S}_1 \times \mathscr{S}_2\}$; alors $\mathscr{T}$ est un σ-anneau de sous-ensembles de Y, et la correspondance $N \to (E_1 \otimes E_2)(\varphi^{-1}(N))$ définit une mesure p. o. sur $\mathscr{T}$, qu'on appelle l'image de $E_1 \otimes E_2$ par φ et que l'on note $\varphi(E_1 \otimes E_2)$; $\varphi(E_1 \otimes E_2)$ s'appelle aussi le *produit de convolution* de E_1 et E_2 pour φ et se note $E_1 *_\varphi E_2$ [cf. 4, Ch. VIII, § 1, Déf. 1]; lorsque $X_1 = X_2 = Y$ est un groupe abélien et $\varphi(s, t) = s + t$ (la loi du groupe), nous supprimons le φ et écrivons simplement $E_1 * E_2$. La convolution des mesures opératorielles et la convolution des mesures numériques sont liées par une formule naturelle:

Lemme 3. *Si* $F = E_1 *_\varphi E_2$, *avec les notations précédentes, on a*

$$\mu^{F}_{x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2} = \mu^{E_1}_{x_1, y_1} *_\varphi \mu^{E_2}_{x_2, y_2} \tag{6}$$

pour $x_1, y_1 \in H_1$ *et* $x_2, y_2 \in H_2$.

Démonstration. Les deux membres de (6) sont des mesures complexes bornées sur $\mathcal{T}$. Écrivons μ pour la mesure à gauche; pour tout $N \in \mathcal{T}$ on a (en citant le lemme 2 et les définitions)

$$\mu(N) = \big(F(N)(x_1 \otimes x_2) | y_1 \otimes y_2\big) = \big((E_1 \otimes E_2)(\varphi^{-1}(N))x_1 \otimes x_2 | y_1 \otimes y_2\big) =$$
$$= \mu^{E_1 \otimes E_2}_{x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2}(\varphi^{-1}(N)) = (\mu^{E_1}_{x_1, y_1} \times \mu^{E_2}_{x_2, y_2})(\varphi^{-1}(N)) =$$
$$= \varphi(\mu^{E_1}_{x_1, y_1} \times \mu^{E_2}_{x_2, y_2})(N) = (\mu^{E_1}_{x_1\, y_1} *_\varphi \mu^{E_2}_{x_2, y_2})(N). \ \blacksquare$$

Adaptons les résultats précédents au contexte des espaces localements compacts et des mesures (de Radon) au sens de [4]. Soient X un espace localement compact, $\mathcal{B}(X)$ la σ-algèbre engendrée par les ensembles fermés de X, c'est-à-dire la tribu des ensembles boréliens de X (appelés les ensembles « faiblement boréliens » dans [1]). Si E est une mesure p. o. (sur un espace hilbertien H) définie sur $\mathcal{B}(X)$, la formule $T_f = \int f\,dE$ définit une application linéaire $f \to T_f$ de l'espace $\mathcal{K}(X)$ des fonctions complexes continues f sur X à support compact, dans l'espace $\mathcal{L}(H)$ des opérateurs linéaires continus dans H; cette application est *positive* au sens que $f \geqq 0$ entraîne $T_f \geqq 0$, et *bornée* au sens que $\|T_f\| \leqq M \|f\|_\infty$ pour tout $f \in \mathcal{K}(X)$, où $M = \|E(X)\|$. Inversement:

Lemme 4. (Théorème de Riesz) *Si X est un espace localement compact, H un espace hilbertien, et $f \to T_f$ une application linéaire positive bornée de $\mathcal{K}(X)$ dans $\mathcal{L}(H)$, il existe une mesure p. o. birégulière E sur $\mathcal{B}(X)$, et une seule, telle que*

$$T_f = \int f\,dE \quad \textit{pour tout} \quad f \in \mathcal{K}(X). \tag{7}$$

Démonstration. D'abord on définit E sur le σ-anneau engendré par les ensembles G_δ compacts de X [1, Th. 19], puis on l'étend à une mesure opératorielle positive « régulière à l'intérieur » sur $\mathcal{B}(X)$ [1, Ths. 21, 22], puis on observe que E est en fait birégulière (parce qu'une mesure positive, bornée, régulière à l'intérieur sur la tribu $\mathcal{B}(X)$ est automatiquement régulière à l'extérieur [3, Th. 3]). $\blacksquare$

Des lemmes 1 et 4 on déduit aisément (cf. 5, p. 105, Prop. 3.1]:

Lemme 5. *Si, pour $i=1, 2$, X_i est un espace localement compact, H_i un espace hilbertien, et $f \to T^i_f$ une application linéaire positive bornée de $\mathcal{K}(X_i)$ dans $\mathcal{L}(H_i)$, alors il existe une application linéaire positive bornée $f \to T_f$ de $\mathcal{K}(X_1 \times X_2)$ dans $\mathcal{L}(H_1 \otimes H_2)$, et une seule, telle que*

$$T_{f_1 \otimes f_2} = T^1_{f_1} \otimes T^2_{f_2} \tag{8}$$

pour tout $f_1 \in \mathcal{K}(X_1)$, $f_2 \in \mathcal{K}(X_2)$, où $(f_1 \otimes f_2)(s_1, s_2) = f_1(s_1) f_2(s_2)$ pour $s_1 \in X_1$, $s_2 \in X_2$. En effet, si E_i est la mesure p. o. birégulière sur $\mathcal{B}(X_i)$ qui représente $f \to T^i_f$, alors l'application $f \to T_f$ est représentée par la mesure p. o. birégulière unique E sur $\mathcal{B}(X_1 \times X_2)$ qui prolonge la mesure p. o. $E_1 \otimes E_2$ sur $\mathcal{B}(X_1) \times \mathcal{B}(X_2)$.

Avec les notations du lemme 5, écrivons simplement $E=E_1\otimes E_2$ (abus de notation); ainsi, par $E_1\otimes E_2$ on entend la mesure p. o. birégulière unique sur $\mathscr{B}(X_1\times X_2)$ qui associe à chaque rectangle borélien $M_1\times M_2$ l'opérateur $E_1(M_1)\otimes\otimes E_2(M_2)$. Continuant avec ces notations, considérons un espace localement compact Y et une application $\varphi: X_1\times X_2\to Y$. Pour simplicité supposons que φ est *continue* (ce qui suffira pour nos buts), donc borélienne. Si $f: Y\to\mathbf{C}$ est une fonction borélienne bornée, alors $f\circ\varphi$ est une fonction borélienne bornée sur $X_1\times X_2$, et on peut former l'opérateur $\int(f\circ\varphi)dE$; en particulier, $f\to\int(f\circ\varphi)dE$ définit une application linéaire, positive, bornée de $\mathscr{K}(Y)$ dans $\mathscr{L}(H_1\otimes H_2)$, donc (lemme 4) une mesure p. o. birégulière $\varphi(E)$ sur $\mathscr{B}(Y)$, telle que

$$\int f d(\varphi(E)) = \int (f\circ\varphi)\, dE \tag{9}$$

pour tout $f\in\mathscr{K}(Y)$. Conformément aux notations antérieures, la mesure p. o. $\varphi(E)$ aussi s'écrit $E_1 *_\varphi E_2$. On a encore (cf. lemme 2) la formule

$$\mu^{E_1\otimes E_2}_{x_1\otimes x_2,\, y_1\otimes y_2} = \mu^{E_1}_{x_1,y_1}\otimes\mu^{E_2}_{x_2,y_2} \tag{10}$$

(le produit à droite est pris au sens de [4, Ch. III, § 4, n° 2]) et, en écrivant $F=E_1 *_\varphi E_2$, on a

$$\mu^{F}_{x_1\otimes x_2,\, y_1\otimes y_2} = \mu^{E_1}_{x_1,y_1} *_\varphi \mu^{E_2}_{x_2,y_2} \tag{11}$$

(cf. lemme 3 et [4, Ch. VIII, § 1, Déf. 1]). La formule (9) devient alors

$$\int f d(E_1 *_\varphi E_2) = \int (f\circ\varphi)\, d(E_1\otimes E_2); \tag{12}$$

cette formule reste valable pour toute fonction borélienne bornée f sur Y, et, en l'appliquant à un couple de vecteurs élémentaires $x_1\otimes x_2$, $y_1\otimes y_2$, l'intégration numérique indiquée à droite peut être calculée par des intégrations simples successives [4, Ch. V, § 6, Th. 1 et § 8, Th. 1]. Si les supports S_1, S_2 de E_1, E_2 sont compacts, il est évident de (11) que le support de $E_1 *_\varphi E_2$ est contenu dans $\varphi(S_1\times S_2)$, donc est aussi compact [4, Ch. VIII, § 1, Prop. 5a)]; la formule (12) est alors valable pour toute fonction borélienne f qui est bornée sur le support de $E_1 *_\varphi E_2$, en particulier pour toute fonction continue f. On voit aisément que les constructions précédentes, appliquées aux mesures p. o. normalisées (resp. dont les valeurs sont des projecteurs) produisent des mesures p. o. de la même sorte.

Considérons maintenant quelques applications.

Théorème 1. *Soit $X=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et soient E_1, E_2 des mesures p. o. (nécessairement birégulières) définies sur $\mathscr{B}(X)$, à support compact. On a alors*

$$\int \lambda d(E_1 * E_2) = \left(\int \lambda dE_1\right)\otimes E_2(X) + E_1(X)\otimes\left(\int\lambda dE_2\right). \tag{13}$$

Démonstration. Ici $E_1 * E_2 = \varphi(E_1 \times E_2)$, où $\varphi(s_1, s_2) = s_1 + s_2$. Si $f: X \to \mathbf{C}$ est l'injection identique, on a $(f \circ \varphi)(s_1, s_2) = s_1 + s_2$. En écrivant $A_1 = \int \lambda dE_1$, $A_2 = \int \lambda dE_2$, $A = \int \lambda d(E_1 * E_2)$, il résulte de (12) et (10) que

$$\begin{aligned}(A(x_1 \otimes x_2) | y_1 \otimes y_2) &= \iint (s_1 + s_2)\, d\mu^{E_1}_{x_1, y_1}(s_1)\, d\mu^{E_2}_{x_2, y_2}(s_2) = \\ &= \int [(A_1 x_1 | y_1) + (E_1(X) x_1 | y_1) s_2]\, d\mu^{E_2}_{x_2, y_2}(s_2) = \\ &= (A_1 x_1 | y_1)(E_1(X) x_2 | y_2) + (E_1(X) x_1 | y_1)(A_2 x_2 | y_2) = \\ &\qquad = ([A_1 \otimes E_2(X) + E_1(X) \otimes A_2](x_1 \otimes x_2) | y_1 \otimes y_2),\end{aligned}$$

d'où $A = A_1 \otimes E_2(X) + E_1(X) \otimes A_2$. ∎

Si de plus E_1, E_2 sont des mesures spectrales normalisées sur $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ [resp. $\mathscr{B}(\mathbf{C})$], on obtient la formule de Fox pour un couple A_1, A_2 d'opérateurs hermitiens (resp. normaux). Alternativement, si E_1, E_2 sont des mesures spectrales sur $\mathscr{B}(\mathbf{R})$ et si l'on pose $A_1 = \int \lambda\, dE_1$, $A_2 = \int \lambda\, dE_2$, $A = \int \lambda\, d(E_1 * E_2)$, en appliquant (12) à la fonction bornée $f(s) = e^{its}$ (s, t réels, t fixé) on obtient la formule $e^{itA} = e^{itA_1} \otimes e^{itA_2}$; en dérivant cette formule par rapport à t, divisant par i, et substituant $t=0$, on obtient la formule (1). Cette méthode ouvre la porte pour les opérateurs hermitiens non bornés (ce qui étaient en effet considérés par Fox).

Dans le théorème suivant, les lois du groupe sont notées multiplicativement:

Théorème 2. *Soit G un groupe localement compact abélien et, pour $i=1,2$, soit $s \to U^i_s$ une représentation unitaire fortement continue de G dans l'espace hilbertien H_i. Soit X le groupe des caractères de G et, selon le théorème de Stone, soit E_i la mesure spectrale normalisée sur $\mathscr{B}(X)$ telle que*

$$(14) \qquad U^i_s = \int \hat{s}\, dE_i \quad \text{pour tout} \quad s \in G,$$

où $\hat{s}(\alpha) = \alpha(s)$ pour $s \in G$ et $\alpha \in X$ [cf. 2, p. 182]. *Alors la mesure spectrale sur $\mathscr{B}(X)$ pour la représentation unitaire fortement continue $s \to U^1_s \otimes U^2_s$ est $E_1 *_\varphi E_2$, où $\varphi: X \times X \to X$ est l'application $\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 \alpha_2$; c'est-à-dire,*

$$(15) \qquad U^1_s \otimes U^2_s = \int \hat{s}\, d(E_1 * E_2) \quad \text{pour tout} \quad s \in G.$$

Démonstration. On a $(\hat{s} \circ \varphi)(\alpha_1, \alpha_2) = \hat{s}(\alpha_1)\hat{s}(\alpha_2)$, et on voit que $\int (\hat{s} \circ \varphi)\, d(E_1 \otimes E_2) = U^1_s \otimes U^1_s$ tout comme dans la démonstration du théorème 1. ∎

Pour $G = \mathbf{Z}$ (le groupe additif des entiers) on a $X = \mathbf{T} = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| = 1\}$ (le groupe du cercle), l'élément $\lambda \in \mathbf{T}$ s'identifiant au caractère $n \to \lambda^n$ de $\mathbf{Z}$; pour $n \in \mathbf{Z}$ et $\lambda \in \mathbf{T}$, on a donc $\hat{n}(\lambda) = \lambda^n$. Rappelons qu'une mesure p. o. E sur $\mathscr{B}(\mathbf{T})$ s'appelle une *mesure opératorielle de Sz.-Nagy* [2, p. 181] si $E(\mathbf{T}) = 1$ et si

$$(16) \qquad \int \lambda^n\, dE = \Big(\int \lambda dE\Big)^n \quad \text{pour} \quad n = 2, 3, 4, \ldots .$$

Si T est une contraction dans un espace hilbertien, il existe une mesure opératorielle de Sz.-Nagy E, et une seule, telle que $T = \int \lambda dE$ (théorème de Sz.-Nagy [2, p. 181]); E s'appelle la mesure opératorielle de Sz.-Nagy *associée à T*.

Théorème 3. *Si T_1, T_2 sont des contractions dans les espaces hilbertiens H_1, H_2, et si E_1, E_2 sont les mesures opératorielles de Sz.-Nagy associées, alors la mesure opératorielle de Sz.-Nagy associée à la contraction $T_1 \otimes T_2$ dans $H_1 \otimes H_2$ est $E_1 *_\varphi E_2$, où $\varphi: \mathbf{T} \times \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ est l'application $\varphi(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 \lambda_2$; donc*

$$T_1 \otimes T_2 = \int \lambda \, d(E_1 * E_2) \tag{17}$$

est la représentation de Sz.-Nagy pour $T_1 \otimes T_2$.

Démonstration. Fixons un entier positif n et posons $f(\lambda) = \lambda^n$ pour $\lambda \in \mathbf{T}$. Alors $(f \circ \varphi)(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^n \lambda_2^n$, donc $f \circ \varphi = f \otimes f$, donc

$$\int \lambda^n d(E_1 * E_2) = \iint \lambda_1^n \lambda_2^n \, d(E_1 \otimes E_2) = \left(\int \lambda^n dE_1\right) \otimes \left(\int \lambda^n dE_2\right) =$$
$$= \left(\int \lambda dE_1\right)^n \otimes \left(\int \lambda dE_2\right)^n = \left[\left(\int \lambda dE_1\right) \otimes \left(\int \lambda dE_2\right)\right]^n$$

ce qui montre que $E_1 * E_2$ est une mesure opératorielle de Sz.-Nagy pour la contraction $\int \lambda \, d(E_1 * E_2) = \left(\int \lambda \, dE_1\right) \otimes \left(\int \lambda \, dE_2\right) = T_1 \otimes T_2$. ∎

Ouvrages cités

[1] S. K. Berberian, *Notes on spectral theory,* Van Nostrand (Princeton, N. J., 1966).
[2] S. K. Berberian, Naĭmark's moment theorem, *Michigan Math. J.,* **13** (1966), 171—184.
[3] S. K. Berberian, Sesquiregular measures, *Amer. Math. Monthly,* **74** (1967), 986—990.
[4] N. Bourbaki, *Intégration,* Chs. I—IV (2e éd.), Ch. V (2e éd.), Chs. VII—VIII, Hermann (Paris, 1965, 1967, 1963).
[5] I. Colojoară and C. Foiaş. *Theory of generalized spectral operators,* Gordon and Breach (New York, 1968).
[6] D. W. Fox, Spectral measures and separation of variables, *J. Res. Nat. Bur. Standards, Sect. B,* **80B** (1976), 347—351.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
THE UNIVERSITY OF TEXAS
AUSTIN, TEXAS 78 712, USA