Acta Sci. Math., 40 (1978), 129—142

Otsukische Übertragung mit rekurrentem Maßtensor

ARTHUR MOÓR

§ 1. Einleitung

Im Aufsatz [3] begründete T. Otsuki eine Übertragungstheorie in den n-dimensionalen Punkträumen, die in der lokalen Schreibweise auf die folgende Weise charakterisiert werden kann:

Der invariante Differentialquotient eines Tensors $V^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ ist längs einer Kurve $C: x^i = x^i(t)$ durch die Formeln

$$\frac{D}{dt} V^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \overset{\text{def}}{=} P^{i_1}_{r_1} \dots P^{i_p}_{r_p} V^{r_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q|k} \frac{dx^k}{dt} P^{s_1}_{j_1} \dots P^{s_q}_{j_q} \tag{1.1}$$

$$V^{r_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q|k} \overset{\text{def}}{=} \partial_k V^{r_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q} + \sum_{t=1}^{p} {}'\Gamma_h{}^{r_t}{}_k V^{r_1 \dots r_{t-1} h r_{t+1} \dots r_p}_{s_1 s_2 \dots \dots s_q} - \sum_{t=1}^{q} {}''\Gamma_{s_t}{}^h{}_k V^{r_1 r_2 \dots \dots r_p}_{s_1 \dots s_{t-1} h s_{t+1} \dots s_q} \tag{1.2}$$

definiert, wo die Indizes jetzt und im folgenden immer die Werte $1, 2, \dots, n$ annehmen werden, und ${}'\Gamma_a{}^b{}_c$, ${}''\Gamma_a{}^b{}_c$ gewöhnliche affine Übertragunsgparameter bedeuten. P^i_j bedeutet in diesen Formeln und auch im folgenden einen gemischten Tensor (vgl. [3], Formeln (4.9) und (4.10), wo aber die — von uns im folgenden nicht zu benützende — Bezeichnung:

$$\frac{\bar{D} V^{r_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q}}{dt} \overset{\text{def}}{=} V^{r_1 \dots r_p}_{s_1 \dots s_q|k} \frac{dx^k}{dt}$$

verwendet wurde). Die Übertragungsparameter ${}'\Gamma_a{}^b{}_c$ bzw. ${}''\Gamma_a{}^b{}_c$, die bei der Bildung des invarianten Differentialquotienten bei den kontra- bzw. kovarianten Indizes verwendet sind, brauchen nicht übereinstimmen.

Neben dem Tensor P^i_j soll auch der inverse Tensor Q^i_j eindeutig bestimmt sein, d. h. es ist $det(P^i_j) \neq 0$ und

(1.3a) $\quad P^i_j Q^j_k = \delta^i_k, \qquad$ (1.3b) $\quad P^i_r Q^s_i = \delta^s_r.$

Eingegangen am 12. November 1976.

Satt (1.2) benützt man in der Otsukischen Theorie lieber die kovariante Ableitung:

$$\nabla_k V^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} \overset{\text{def}}{=} P^{i_1}_{r_1}\dots P^{i_p}_{r_p} V^{r_1\dots r_p}_{s_1\dots s_q|k} P^{s_1}_{j_1}\dots P^{s_q}_{j_q} \tag{1.4}$$

(vgl. [3], (3.8)), wodurch der fundamentale Differentialquotient (1.1) die Form:

$$\frac{D}{dt} V^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = \nabla_k V^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}\frac{dx^k}{dt} = P^{i_1}_{r_1}\dots P^{i_p}_{r_q}\left(\frac{\bar D}{dt} V^{r_1\dots r_p}_{s_1\dots s_p}\right) P^{s_1}_{j_1}\dots P^{s_q}_{r_p} \tag{1.5}$$

haben wird. Mit den Bezeichnungen

$$\Gamma_j{}^i{}_k \overset{\text{def}}{=} P^i_m {}'\Gamma_j{}^m{}_k, \tag{1.6a}$$ $$A_j{}^i{}_k \overset{\text{def}}{=} P^m_j {}''\Gamma_m{}^i{}_k \tag{1.6b}$$

kann leicht verifiziert werden, daß unsere Formeln (1.4) und (1.5) — auf Grund von (1.2) und (1.3a), (1.3b) — eben in die Otsukischen Formeln (2.15) und (2.14) von [3] übergehen, wo ${}'\Gamma_j{}^i{}_k$ und ${}''\Gamma_j{}^i{}_k$ der Bedingung

$${}''\Gamma_j{}^i{}_k = P^i_m {}'\Gamma_l{}^m{}_k Q^l_j - Q^m_j \frac{\partial P^i_m}{\partial x^k}$$

unterworfen sind.

Im folgenden wollen wir eine solche Otsukische Übertragung bestimmen, in der die Übertragungsparameter durch einen, in seinen Indizes symmetrischen, Fundamentaltensor $g_{ij}(x)$ bestimmt sind, der den Relationen

$$\nabla_k g_{ij} = \gamma_k(x) g_{ij} \tag{1.7}$$

genügt, wo $\gamma_k(x)$ einen kovarianten Vektor bedeutet. Die Formel (1.7) drückt aus, daß diese Übertragungstheorie, die wir im folgenden entwickeln werden, die Weylsche [5] und Otsukische [4] Übertragungstehorien in sich vereinigen wird, wobei sie als ein Spezialfall von [3] betrachtet werden kann. Vom metrischen Fundamentaltensor g_{ij} soll noch angenommen werden, daß $det(g_{ij})\neq 0$ ist, d. h. der inverse Tensor g^{ij} eindeutig bestimmt ist.

Die Grundgrößen des Raumes sind also der metrische, symmetrische Grundtensor g_{ij}, der Rekurrenzvektor γ_k und der gemischte Tensor P^i_j, der im folgenden der Symmetriebedingung

$$P_{ij} \overset{\text{def}}{=} g_{jr}P^r_i = g_{ir}P^r_j = P_{ji} \tag{1.8}$$

genügen soll.

Mit Hilfe von g_{ij} bzw. mit Hilfe des inversen Tensors g^{rk} können die Indizes in der gewöhnlichen Weise herauf- bzw. heruntergezogen werden.

Das Ziel unserer Arbeit ist die Bestimmung der Form der Übertragungsparameter und die Untersuchung des invarianten Differentials der Eigenvektoren bei einer Kontraktion mit g_{ij}; ferner wollen wir im Satz 5 von § 4 die notwendigen und hinreichenden Bedingungen bestimmen dafür, daß Dg_{ij} ein Eigentensor längs einer Kurve des Raumes sei. Diesen Satz mit dem Satz 7 zusammen betrachten wir als Hauptsätze dieser Arbeit.

§ 2. Bestimmung der Übertragungsparameter

In diesem Paragraphen wollen wir die der Relation (1.7) genügenden Übertragungsparameter bestimmen. Aus (1.7) folgt auf Grund von (1.4):

$$\text{(2.1a)} \qquad P_i^r P_j^s g_{rs|k} = \gamma_k g_{ij}.$$

Wir wollen hier bemerken, daß für den kontravarianten metrischen Fundamentaltensor g_{ij} die analoge Forderung:

$$\text{(2.1b)} \qquad P_r^i P_s^j g^{rs}{}_{|k} = -\gamma_k g^{ij}$$

wäre (vgl. etwa [1], Formel (7.1)a)). Doch wäre die Formel (2.1b) im allgemeinen in der Otsukischen Übertragungstheorie nicht eine Folgerung von (2.1a), sondern eine neue Forderung, die — abgesehen von gewissen Spezialfällen — nicht mit (2.1a) gleichzeitig gelten konnte, da nach (1.2) $\delta^r_{i|k} \neq 0$ ist. Gelten aber die Identitäten: $P^i_j = \delta^i_j$ ($\doteq$Kronecker-δ), ferner $'\Gamma_a{}^b{}_c = ''\Gamma_a{}^b{}_c$, so wäre (2.1b) eine Folgerung von (2.1a). In diesem Fall wäre aber die Otsukische Übertragungstheorie mit der gewöhnlichen affinen Übertragungstheorie identisch.

Auf Grund des durch (1.3a) und (1.3b) definierten inversen Tensors Q^i_j von P^i_j, kann (2.1a) bzw. (2.1b) in Hinsicht auf (1.2) in der Form:

$$\text{(2.2a)} \qquad \partial_k g_{rs} - ''\Gamma_r{}^t{}_k g_{ts} - ''\Gamma_s{}^t{}_k g_{rt} = \gamma_k g_{bt} Q^b_r Q^t_s$$

$$\text{(2.2b)} \qquad \partial_k g^{rs} + '\Gamma_t{}^r{}_k g^{ts} + '\Gamma_t{}^s{}_k g^{rt} = -\gamma_k g^{ab} Q^r_a Q^s_b$$

geschrieben werden.

Sind die Übertragungsparameter $''\Gamma_r{}^t{}_k$ in den unteren Indizes symmetrisch — was wir im folgenden immer annehmen wollen —, so erhält man diese Übertragungsparameter in der gewöhnlichen Weise, durch zyklische Permutation der Indizes r, s, k in (2.2a), bei der letzten Permutation mit einer Vorzeichenveränderung und dann nach einer Addition, in der Form:

$$\text{(2.3)} \qquad ''\Gamma_r{}^t{}_k = \tfrac{1}{2} g^{ts}\{\partial_k g_{rs} + \partial_r g_{sk} - \partial_s g_{rk} - (\gamma_k m_{rs} + \gamma_r m_{sk} - \gamma_s m_{rk})\}$$

mit

$$m_{rs} \overset{\text{def}}{=} g_{ij} Q^i_r Q^j_s.$$

Bemerkung. Nach den Bezeichnungen von H. Weyl: [5] ist $\gamma_k = -\varphi_k$ und $''\Gamma_{rsk} = \Gamma_{s,rk}$. —

Etwas komplizierter wäre die Bestimmung von $'\Gamma_t{}^r{}_k$ aus (2.2b), die wir nur skizzieren wollen. Eine Überschiebung von (2.2b) mit $g_{ri} g_{sj}$ gibt eine Identität für $'\Gamma_{jik}$. Angenommen, daß $'\Gamma_{jik}$ in (j, k) symmetrisch ist, erhält man $'\Gamma_{jik}$ in analoger Weise — abgesehen von Vorzeichenveränderungen — wie $''\Gamma_{jik}$. Eine Überschiebung mit g^{it} ergibt die gewünschte Größe: $'\Gamma_j{}^t{}_k$.

Wir beweisen den folgenden:

Satz 1. *Ist $''\Gamma$ die durch $'\Gamma$ induzierte Übertragung (vgl.* [2], *S. 161, oder* [3] *S. 109), so ist*

$$(2.4)\qquad (\partial_k P^m_t)(Q^r_m g^{ts}+Q^s_m g^{tr})+\gamma_k Q^r_a Q^s_b g^{ab}+\partial_k g^{rs}+Q^r_m{}''\Gamma_t{}^m{}_k P^{ts}+ +Q^s_m{}''\Gamma_t{}^m{}_k P^{tr}=0,\quad P^{tr}\overset{\text{def}}{=}P^t_j g^{jr}.$$

Gilt die Relation:

$$(2.5)\qquad P^i_j=\varrho\delta^i_j\quad (\varrho=Konst.\neq 0),$$

so ist $'\Gamma={}''\Gamma$, und (2.2a) und (2.2b) sind gleichzeitig erfüllt.

Beweis. Bezüglich der erste Behauptung des Satzes beachte man, daß wenn $''\Gamma$ die induzierte Übertragung von $'\Gamma$ ist, so gilt nach der Formel (3.13) von [3]:

$$(2.6)\qquad \partial_k P^i_j+{}''\Gamma_r{}^i{}_k P^r_j-{}'\Gamma_j{}^r{}_k P^i_r=0.$$

Aus dieser Formel folgt nun nach einer Überschiebung mit Q^l_i nach (1.3b), daß

$$'\Gamma_j{}^l{}_k=Q^l_m\partial_k P^m_j+Q^l_t{}''\Gamma_m{}^t{}_k P^m_j.$$

Substituieren wir das in (2.2b), so erhält man unmittelbar (2.4); die Identität (2.4) entspricht der Identität (2.6) im metrischen Fall.

Bezüglich der zweite Behauptung des Satzes beachte man, daß aus (1.3a) folgt, daß neben (2.5) auch

$$(2.7)\qquad Q^i_j=\varrho^{-1}\delta^i_j\quad (\varrho=Konst.\neq 0)$$

besteht. Auf Grund der Form (2.5) von P^i_j folgt noch nach (2.6), daß die affinen Übertragungen $'\Gamma$ und $''\Gamma$ übereinstimmen, d. h. es ist $'\Gamma_i{}^j{}_k={}''\Gamma_i{}^j{}_k$. (2.2a) geht somit im Hinblick auf $'\Gamma={}''\Gamma$ in

$$(2.8)\qquad \partial_k g_{rs}-{}'\Gamma_r{}^t{}_k g_{ts}-{}'\Gamma_s{}^t{}_k g_{rt}=\varrho^{-2}\gamma_k g_{rs}$$

über. Es ist nun $g_{jm}g^{ms}=\delta^s_j$, woraus nach einer partiellen Ableitung nach x^k, auf Grund von (2.8), die Formel

$$(\partial_k g^{ms})g_{jm}\equiv -g^{ms}\partial_k g_{jm}=-g^{ms}(\varrho^{-2}\gamma_k g_{jm}+{}'\Gamma_j{}^t{}_k g_{tm}+{}'\Gamma_m{}^t{}_k g_{jt})$$

folgt. Eine Überschiebung mit g^{jr} gibt nun — unter einer nochmaligen Beachtung von (2.7) — unmittelbar (2.2b). Die Formeln (2.2a) und (2.2b) sind also gleichzeitig gültig, wie behauptet wurde.

§ 3. Eigenvektoren und ihre Kontraktionen

Ein kontravarianter Eigenvektor $V^i(x)$ ist durch die Definitionsformel

$$(3.1)\qquad P^i_j(x)V^j(x)=\tau(x)V^i(x)\quad (\tau\neq 0)$$

festgelegt (vgl. [3], Formel (5.2)); für einen kovarianten Eigenvektor $V_k(x)$ lautet die analoge Formel:

$$(3.2)\qquad P^k_i(x)V_k(x)=\tau(x)V_i(x),$$

wo $\tau(x)$ eine im Raum definierte Eigenfunktion bedeutet. Für die folgenden wird es hinreichend sein, wenn V^i bzw. V_k und τ nur längs einer Kurve $C: x^i = x^i(t)$ definiert sind. Es kann sehr einfach der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 2. *Ist P_{ij} in (i, j) symmetrisch, so folgt aus (3.1) die Relation (3.2) mit $V_i = g_{ir} V^r$.*

Ist P_{ij} in (i, j) nicht symmetrisch, so folgt aus (3.1):

$$P_i^{*k} V_k = \tau V_i, \quad P_i^{*k} \overset{\text{def}}{=} g_{it} P^t_j g^{jk}. \tag{3.3}$$

Beweis. Eine Kontraktion von (3.1) mit g_{im} führt im Hinblick auf

$$V^j = g^{jk} V_k, \quad V_k \overset{\text{def}}{=} g_{kr} V^r$$

nach gewissen Indexveränderungen auf die Relation:

$$P_i^{*k} V_k \equiv g_{it} P^t_j g^{jk} V_k = \tau V_i,$$

womit wir schon gezeigt haben, daß aus (3.1) die Relation (3.3) folgt. Ist nun P_{ij} symmetrisch, so folgt aus (1.8), daß $P_i^{*k} = P_i^k$ ist, wodurch aus (3.3) die Formel (3.2) entsteht, w. z. b. w.

Im folgenden wollen wir eine wichtige Formel von Otsuki, die wir auch verwenden wollen, durch eine einfachere Methode ableiten (vgl. [3], Formel (5.8)).

Nehmen wir an, daß für den kontravarianten Vektor V^j, (3.1) besteht. Da auf beiden Seiten von (3.1) je ein kontravarianter Vektor steht, bekommt man nach invarianter Ableitung von beiden Seiten auf Grund von (1.1) und (1.2):

$$\begin{aligned} P^i_k \left(\frac{dP^k_j}{dt} V^j + P^k_j \frac{dV^j}{dt} + {}'\Gamma_r{}^k{}_s P^r_j V^j \frac{dx^s}{dt} \right) &= \\ = P^i_k \left(\frac{d\tau}{dt} V^k + \tau \left(\frac{dV^k}{dt} + {}'\Gamma_r{}^k{}_s V^r \frac{dx^s}{dt} \right) \right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Beachten wir nun die Formel (3.13) von [3], die offenbar mit unserer Formel (2.6) äquivalent ist, so wird:

$$\frac{dP^k_j}{dt} \equiv \frac{\partial P^k_j}{\partial x^s} \frac{dx^s}{dt} = (P^k_r {}'\Gamma_j{}^r{}_s - P^r_j {}''\Gamma_r{}^k{}_s) \frac{dx^s}{dt}. \tag{3.5}$$

Substituiert man das in (3.4), beachten wir ferner auf der rechten Seite die Formel des invarianten Differentials (1.1) für den kontravarianten Vektor V^i, so wird nach entsprechenden Vertauschungen der Indizes:

$$P^i_k \left(\frac{DV^k}{dt} + P^r_j ({}'\Gamma_r{}^k{}_s - {}''\Gamma_r{}^k{}_s) V^j \frac{dx^s}{dt} \right) = \tau \frac{DV^i}{dt} + \frac{d\tau}{dt} P^i_k V^k. \tag{3.6}$$

Auf Grund von (1.1) und (1.2) hat man

$$\frac{D}{dt}\delta^i_j \equiv P^i_k P^r_j ({}'\Gamma_r{}^k{}_s - {}''\Gamma_r{}^k{}_s)\frac{dx^s}{dt}. \tag{3.7}$$

Beachten wir in (3.6) diese Identität, ferner (3.1), so wird:

$$P^i_k \frac{DV^k}{dt} + \frac{D\delta^i_j}{dt}V^j = \tau\left(\frac{DV^i}{dt} + \frac{d\tau}{dt}V^i\right), \tag{3.8}$$

was mit der Formel (5.8) von [3] übereinstimmt.

Wir gehen nun zur Untersuchung des invarianten Differentials von $V_k \equiv g_{ik}V^i$ über, falls für den kontravarianten Vektor V^i die Bedingung (3.1) besteht, der metrische Fundamentaltensor g_{ij} der Relation (1.7) bzw. (2.1a) genügt, und endlich für den Tensor P^i_j die Symmetriebedingung (1.8) gültig ist.

Aus den Formeln (1.4) und (1.2) folgt, daß

$$\nabla_k(g_{is}V^s) = P^r_i(V^s\partial_k g_{rs} + g_{rs}\partial_k V^s - {}''\Gamma_r{}^t{}_k g_{ts}V^s) \tag{3.9}$$

besteht, da $g_{is}V^s$ ein kovarianter Vektor ist. Beachten wir nun (2.2a), die eine Folgerung von (1.7) ist, so wird durch die Elimination von $\partial_k g_{rs}$:

$$\nabla_k(g_{is}V^s) = P^r_i(\gamma_k g_{jm}Q^j_r Q^m_s V^s + g_{rs}\partial_k V^s + g_{rs}{}''\Gamma_t{}^s{}_k V^t).$$

Auf Grund der Symmetriebedingung (1.8) ist nun nach gewissen geeigneten Veränderungen der Indizes, und im Hinblick auf (1.3b):

$$\nabla_k(g_{is}V^s) = \gamma_k g_{ir}Q^r_s V^s + g_{ir}P^r_s(\partial_k V^s + {}''\Gamma_t{}^s{}_k V^t).$$

Eine weitere Umformung — d. h. die Eliminierung von ${}''\Gamma_t{}^s{}_k$ — mittels der Identität (vgl. [3], Formel (3.10)):

$$\delta^s_{t|k} = {}'\Gamma_t{}^s{}_k - {}''\Gamma_t{}^s{}_k, \tag{3.10}$$

gibt nach den Grundformeln (1.1) und (1.2)

$$\nabla_k(g_{is}V^s) = \gamma_k g_{ir}Q^r_s V^s + g_{ir}\nabla_k V^r - g_{ir}P^r_s\delta^s_{t|k}V^t. \tag{3.11}$$

Nun ist nach (1.4):

$$\nabla_k\delta^r_m = P^r_s P^j_m \delta^s_{j|k},$$

woraus nach einer Überschiebung mit Q^m_t die Relation

$$P^r_s\delta^s_{t|k} = Q^m_t\nabla_k\delta^r_m \tag{3.12}$$

folgt, und das führt die Formel (3.11) in

$$\nabla_k(g_{is}V^s) = g_{ir}\nabla_k V^r + g_{ir}(\gamma_k Q^r_t - Q^m_t\nabla_k\delta^r_m)V^t$$

über, woraus nach einer Überschiebung mit dx^k/dt die Formel

$$\text{(3.13)} \qquad \frac{D}{dt}(g_{is}V^s) = g_{ir}\left(\frac{DV^r}{dt}+Q^r_t V^t \gamma_k \frac{dx^k}{dt} - Q^m_t V^t \frac{D\delta^r_m}{dt}\right)$$

folgt.

Nehmen wir nun an, daß V^i ein Eigenvektor ist, d. h. (3.1) ist gültig. Zieht man mit g_{ir} den Index „i" ab, so folgt wieder nach gewissen Veränderungen der Summationsindizes und im Hinblick auf die Symmetriebedingung (1.8):

$$\text{(3.14)} \qquad P^r_i g_{rj} V^j = \tau g_{ir} V^r.$$

Bilden wir jetzt die Operation $\dfrac{D}{dt} \equiv \dfrac{dx^k}{dt} \nabla_k$ auf beide Seiten von (3.14), so erhalten wir nach den Definitionsformeln (1.4) und (1.2)

$$\text{(3.15)} \qquad P^s_i\left\{g_{rj}V^j \frac{dP^r_s}{dt} + (P^r_s V^j \partial_k g_{rj} + P^r_s g_{rj} \partial_k V^j - {}''\Gamma^{\,t}_{s\,k} P^r_t g_{rj} V^j)\frac{dx^k}{dt}\right\} =$$

$$= P^s_i\left(\frac{d\tau}{dt} g_{sr} V^r + \tau(\partial_k g_{sr}) V^r \frac{dx^k}{dt} + \tau g_{sr}(\partial_k V^r)\frac{dx^k}{dt} - \tau\, {}''\Gamma^{\,t}_{s\,k} g_{tr} V^r \frac{dx^k}{dt}\right).$$

Eliminieren wir von der linken Seite $\dfrac{dP^r_s}{dt}$ mittels der Formel (3.5), beachten wir dann (3.9) und (3.10), so entsteht auf der linken Seite der Ausdruck:

$$P^s_i\{\nabla_k(g_{sj}V^j) + P^r_t \delta^t_{s|k} g_{rj} V^j\}\frac{dx^k}{dt}.$$

Auf der rechten Seite von (3.15) erhält man wieder unter Beachtung von (3.9)

$$\frac{d\tau}{dt} P^s_i g_{sr} V^r + \tau(\nabla_k g_{is} V^s)\frac{dx^k}{dt},$$

und somit wird aus (3.15) im Hinblick auf (3.12) und (3.14)

$$\text{(3.16)} \qquad P^s_i \frac{D}{dt}(g_{sj}V^j) + \frac{D\delta^r_i}{dt} g_{rj} V^j = \tau\left(\frac{d\tau}{dt} g_{ir} V^r + \frac{D}{dt}(g_{is}V^s)\right).$$

Vergleicht man (3.8) und (3.16), so folgt der

Satz 3. *Ist V^i ein Eigenvektor, die der Formel (3.1) genügt, ist ferner P_{ij} in (i, j) symmetrisch, so verhält sich der Vektor $V_i \equiv g_{ir} V^r$ bezüglich der invarianten Differentiation (1.1) ebenso, wie der Vektor V^i.*

In ähnlicher Weise folgt unmittelbar aus den Gleichungen (3.1), (3.8) und (3.16), unter Beachtung von Satz 2 der folgende

Satz 4. *Gilt für einen Vektor V^i die Relation (3.1) längs einer Kurve $C: x^i = x^i(t)$, ist P_{ij} in (i, j) symmetrisch, ist endlich $\frac{D\delta^i_j}{dt} = 0$, so gehören V^i, $\frac{DV^i}{dt}$, $V_i \equiv g_{ir} V^r$, $\frac{DV^i}{dt}$ zu demselben Eigenraum von τ.*

Für den Fall, daß $\frac{D\delta^i_j}{dt} \neq 0$ besteht, kann noch eine Formel für die Eigenvektoren mittels (3.16) und (3.13) abgeleitet werden. Eliminiert man aus (3.16) $\frac{D}{dt} g_{sj} V^j$ mittels der Formel (3.13), so wird unter Beachtung von (1.8):

$$g_{is} P^s_r \left(\frac{DV^r}{dt} + Q^r_h V^h \gamma_k \frac{dx^k}{dt} - Q^m_h V^h \frac{D\delta^r_m}{dt} \right) + g_{rj} V^j \frac{D\delta^r_i}{dt} =$$

$$= \tau g_{ir} \left(\frac{d\tau}{dt} V^r + \frac{DV^r}{dt} + Q^r_h V^h \gamma_k \frac{dx^k}{dt} - Q^m_h V^h \frac{D\delta^r_m}{dt} \right).$$

Beachten wir jetzt die aus (3.1) folgende Rleation

$$V^r = \tau Q^r_h V^h$$

und (1.3a), so wird:

$$g_{is} \left(P^s_r \frac{DV^r}{dt} + V^m \frac{D\delta^s_m}{dt} \right) + g_{rj} V^j \frac{D\delta^r_i}{dt} - \tau^{-1} g_{is} P^s_r V^m \frac{D\delta^r_m}{dt} = \tag{3.17}$$

$$= g_{ir} \tau \left(\frac{d\tau}{dt} V^r + \frac{DV^r}{dt} \right).$$

Auf Grund der Formel (3.8) wird aus dieser Identität:

$$g_{is} P^s_r V^m \frac{D\delta^r_m}{dt} = \tau g_{rj} V^j \frac{D\delta^r_i}{dt}. \tag{3.18}$$

Offenbar muß (3.18) längs der Kurve $x^i = x^i(t)$, längs der unsere Tensoren genommen wurden, eine Identität sein. (3.17) wird somit auch eine Identität, nämlich eben die mit g_{ir} kontrahierte Formel (3.8) (abgesehen von gewissen Indizes-Veränderungen).

§ 4. Der metrische Fundamentaltensor als Eigentensor

In diesem Paragraphen werden wir die Eigenschaften von g_{ij} und $\frac{Dg_{ij}}{dt}$ untersuchen, falls der metrische Grundtensor ein Eigentensor ist, d. h. längs einer Kurve $C: x^i = x^i(t)$ der Identität

$$P^r_i P^s_j g_{rs} = \tau g_{ij} \quad (\tau \neq 0), \tag{4.1}$$

genügt. In unseren Untersuchungen werden wir aber meist nur die Symmetrie von g_{ij} in seinen Indizes benützen und die kennzeichnende Identität (1.7) bzw. (2.2a) außer Acht lassen. Wenn also nicht nachdrücklich betont wird, sind unsere Resultate auch für allgemeine symmetrische rein kovariante Tensoren zweiter Stufe gültig.

Bilden wir den invarianten Differentialquotient auf beiden Seiten von (4.1), so wird:

$$\frac{D}{dt}(P_i^r P_j^s g_{rs}) = P_i^r P_s^j g_{rs} \frac{d\tau}{dt} + \tau \frac{Dg_{ij}}{dt}.$$

Bemerkung. Die Leibnizsche Regel besteht für die Operation (1.1) im allgemeinen nicht.

Auf Grund von (1.1) und (1.2) wird unter Beachtung (auf der rechten Seite) der Formel (4.1):

$$P_i^a P_j^b \left\{ \frac{dP_a^r}{dt} P_b^s g_{rs} + P_a^r \frac{dP_b^s}{dt} g_{rs} + P_a^r P_b^s \frac{dg_{rs}}{dt} - ({}''\Gamma_a{}^p{}_k P_p^r P_b^s + {}''\Gamma_b{}^p{}_k P_a^r P_p^s) g_{rs} \frac{dx^k}{dt} \right\} =$$

$$= \tau \left(g_{ij} \frac{d\tau}{dt} + \frac{Dg_{ij}}{dt} \right).$$

Wir eliminieren nun die Glieder $\dfrac{DP_m^j}{dt}$ mittels (3.5) und beachten dann noch die Formel (3.10); im Hinblick auf (1.2) und (1.4) wird somit:

$$P_i^a P_j^b (\delta_{a|k}^p P_p^r P_b^s g_{rs} + \delta_{b|k}^p P_a^r P_p^s g_{rs} + \nabla_k g_{ab}) \frac{dx^k}{dt} = \tau \left(\frac{Dg_{ij}}{dt} + g_{ij} \frac{d\tau}{dt} \right).$$

Auf Grund der Formeln (1.1) und (1.5) wird nun das folgende Lemma bestehen:

Lemma 1. *Ist für den in (i, j) symmetrischen Tensor g_{ij} die Relation (4.1) gültig, so besteht:*

$$P_i^a P_j^b \frac{Dg_{ab}}{dt} + \left(P_j^b P_b^s \frac{D\delta_i^r}{dt} + P_i^b P_b^r \frac{D\delta_j^s}{dt} \right) g_{rs} = \tau \left(\frac{Dg_{ij}}{dt} + \frac{d\tau}{dt} g_{ij} \right). \tag{4.2}$$

Wir wollen betonen, daß in der Formel (4.2) der Tensor g_{ij} nicht unbedingt der rekurrente metrische Fundamentaltensor sein muß, da bei der Herleitung von (4.2) nur (4.1), d. h. die Annahme, daß g_{ij} ein Eigentensor der Eigenfunktion τ ist, benützt wurde. Es gilt aber das

Lemma 2. *Ist g_{ij} der rekurrente metrische Fundamentaltensor, der ein Eigentensor der Eigenfunktion τ ist, so ist auch $\dfrac{Dg_{ij}}{dt}$ ein Eigentensor von τ, d. h. es gilt*

$$P_i^a P_j^b \frac{Dg_{ab}}{dt} = \tau \frac{Dg_{ij}}{dt}. \tag{4.3}$$

Beweis. Da für g_{ij} die Annahme (1.7) gilt, d. h. g_{ij} rekurrente kovariante Ableitung hat, bekommt man nach der Formel (1.5):

$$\frac{Dg_{ij}}{dt} \equiv \nabla_k g_{ij} \frac{dx^k}{dt} = g_{ij}\gamma_k \frac{dx^k}{dt}.$$

Beachten wir nun außer dieser Relation noch (4.1), so wird:

$$P^a_i P^b_j \frac{Dg_{ab}}{dt} = P^a_i P^b_j g_{ab}\gamma_k \frac{dx^k}{dt} = \tau g_{ij}\gamma_k \frac{dx^k}{dt} = \tau \frac{Dg_{ij}}{dt},$$

und das beweist das Lemma.

Mit Hilfe des Lemmas 1 kann der folgende Satz, die wir, mit dem späteren Satz 7 zusammen, als Hauptsätze unserer Arbeit betrachten wollen, bewiesen werden:

Satz 5. *Ist der Tensor g_{ij} ein symmetrischer Eigentensor der Eigenfunktion $\tau \not\equiv 0$, die längs einer Kurve $C: x^i = x^i(t)$ definiert ist, und gilt für P^i_j die Symmetriebedingung (1.8), so ist die Relation*

$$g_{rj}\frac{D\delta^r_i}{dt} + g_{ri}\frac{D\delta^r_j}{dt} = g_{ij}\frac{d\tau}{dt} \tag{4.4}$$

notwendig und hinreichend dafür, daß $\frac{Dg_{ij}}{dt}$ längs C auch ein Eigentensor der Eigenfunktion τ sei.

Die Eigenfunktion τ ist eine Konstante dann und nur dann, falls längs C

$$g_{rj}\frac{D\delta^r_i}{dt} + g_{ri}\frac{D\delta^r_j}{dt} = 0. \tag{4.5}$$

Beweis. Nehmen wir erstens an, daß g_{ij} ein Eigentensor ist, d. h. längs C besteht (4.1), und nach Lemma 1 gilt auch (4.2). Ist nun neben g_{ij} auch $\frac{Dg_{ij}}{dt}$ ein Eigentensor, d. h. ist auch (4.3) gültig, so reduziert sich (4.2) auf Grund von (4.3) auf

$$\left(P^b_j P^s_b \frac{D\delta^r_i}{dt} + P^b_i P^r_b \frac{D\delta^s_j}{dt}\right) g_{rs} = \tau \frac{d\tau}{dt} g_{ij}. \tag{4.6}$$

Eine Kontraktion von (4.1) mit Q^i_m gibt:

$$P^s_j g_{ms} = \tau Q^s_m g_{js}.$$

Beachten wir diese Relation zweimal auf der linken Seite von (4.6), so wird:

$$P^b_j g_{bs} Q^s_r \frac{D\delta^r_i}{dt} + P^b_i g_{br} Q^r_s \frac{D\delta^s_j}{dt} = \frac{d\tau}{dt} g_{ij}.$$

Diese Identität geht nun nach der Beachtung der Symmetrieforderung (1.8) im Hinblick auf (1.3a) unmittelbar in (4.4) über, womit die Notwendigkeit von (4.4) bewiesen ist.

Zweitens beweisen wir, daß (4.4) hinreichend ist. Eine Multiplikation von (4.4) mit τ gibt im Hinblick auf (4.1)

$$\left(P^s_r P^b_j \frac{D\delta^r_i}{dt} + P^s_r P^b_i \frac{D\delta^r_j}{dt}\right) g_{sb} = \tau g_{ij} \frac{d\tau}{dt},$$

woraus auf Grund von (1.8) unmittelbar die Relation

$$\left(P^b_j P^s_b \frac{D\delta^r_i}{dt} + P^b_i P^r_b \frac{D\delta^s_j}{dt}\right) g_{rs} = \tau \frac{d\tau}{dt} g_{ij} \tag{4.6*}$$

folgt. Das reduziert aber die aus (4.1) entstandene Identität (4.2) eben auf (4.3), d. h. $\frac{Dg_{ij}}{dt}$ ist ein Eigentensor. Damit ist bewiesen, daß die Bedingungsgleichung (4.4) hireichend ist.

Die letzte Behauptung des Satzes ist eine triviale Folgerung von (4.4).

Aus dem Lemma 2 folgt nach dem Satz 5 das

Korollar. *Ist der rekurrente metrische Fundamentaltensor g_{ij} ein Eigentensor längs einer Kurve C und genügt P^i_j (1.8), so ist längs C die Rleation (4.4) immer gültig.*

Aus den Formeln (4.2) und (4.5) folgt noch der

Satz 6. *Ist g_{ij} ein symmetrischer Tensor, der, längs einer Kurve C, ein Eigentensor der längs C definierten Funktion τ ist, und gilt längs C (4.5), besteht ferner für P^i_j die Symmetriebedingung (1.8), so gehören g_{ij} und $\frac{Dg_{ij}}{dt}$ zu demselben Eigenraum von τ.*

Beweis. Ebenso, wie vorher, im Beweis des Satzes 5, von (4.4) die Formel (4.6*) abgeleitet werden konnte, bekommen wir aus (4.5) nach einer Multiplikation mit τ, und dann unter Beachtung von (4.1) und (1.8) die Relation:

$$\left(P^b_j P^s_b \frac{D\delta^r_i}{dt} + P^b_i P^r_b \frac{D\delta^s_j}{dt}\right) g_{rs} = 0,$$

wodurch (4.2) sich auf

$$P^a_i P^b_j \frac{Dg_{ab}}{dt} = \tau \left(\frac{Dg_{ij}}{dt} + \frac{d\tau}{dt} g_{ij}\right) \tag{4.7}$$

reduziert; das beweist schon die Behauptung des Satzes.

Wir beweisen jetzt den

Satz 7. *Ist längs einer Kurve: C*

$$\frac{D\delta_i^r}{dt} = 0, \tag{4.8}$$

und ist ferner längs der Kurve: C der symmetrische Tensor g_{ij} Eigentensor der Eigenfunktion τ, so gehören längs C

$$g_{ij}, \quad \frac{Dg_{ij}}{dt}, \quad \frac{D^2 g_{ij}}{dt^2}, \ldots$$

zu demselben Eigenraum von τ.

Bemerkung. Der Satz 7 ist im wesentlichen ein Analogon eines Otsukischen Satzes (vgl. [3], Satz 5.7 auf S. 120) auf die symmetrischen kovarianten Tensoren zweiter Stufe. —

Beweis des Satzes 7. Die Behauptung des Satzes können wir in der folgenden Form ausdrücken:

$$P_i^r P_j^s \frac{D^m g_{rs}}{dt^m} = \tau \frac{D^m g_{ij}}{dt^m} + \sum_{k=1}^{m} \psi_k \frac{D^{m-k} g_{ij}}{dt^{m-k}}, \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{4.9}$$

wo die Funktionen ψ_k Polynome von

$$\tau, \quad \frac{d\tau}{dt}, \quad \frac{d^2\tau}{dt^2}, \ldots, \frac{d^m\tau}{dt^m}$$

sind.

Die über g_{ij} gestellte Bedingung ist die Gültigkeit von (4.1). Auf Grund des Lemmas 1 ist aber auch (4.2) gültig; diese Identität geht aber nach der Annahme (4.8) in (4.7) über. Die Identität (4.7) drückt schon aus, daß (4.9) für $m=1$ besteht.

Der Beweis werden wir nun durch vollständige Induktion durchführen. Nehmen wir also an, daß (4.9) bis irgendein $m \geqq 1$ gilt.

Nach der Bildung des invarianten Differentialquotienten beider Seiten und unter Beachtung, daß die ψ_k $(k=1, 2, \ldots, m)$ Skalare sind, bekommt man auf Grund von (1.5):

$$\frac{D}{dt}\left(P_i^r P_j^s \frac{D^m g_{rs}}{dt^m}\right) = \frac{d\tau}{dt} P_i^r P_j^s \frac{D^m g_{rs}}{dt^m} + \tau \frac{D^{m+1} g_{ij}}{dt^{m+1}} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{d\psi_k}{dt} P_i^r P_j^s \frac{D^{m-k} g_{rs}}{dt^{m-k}} + \psi_k \frac{D^{m+1-k} g_{ij}}{dt^{m+1-k}}\right).$$

Man sieht sofort, daß auf der rechten Seite die Glieder, die $P_i^r P_j^s$ enthalten mittels (4.9) eliminiert werden können, somit erhält man auf der rechten Seite solche Glieder von $\dfrac{D^h g_{ij}}{dt^h}$ $(h=0, 1, 2, \ldots, m+1)$, wie in (4.9). Es gilt also:

$$\frac{D}{dt}\left(P_i^r P_j^s \frac{D^m g_{rs}}{dt^m}\right) = \tau \frac{D^{m+1} g_{ij}}{dt^{m+1}} + \sum_{k=1}^{m+1} \psi_k^* \frac{D^{m+1-k} g_{ij}}{dt^{m+1-k}}, \tag{4.10}$$

wo die ψ_k^* $(k=1, \ldots, m+1)$ Polynome von

$$\tau, \frac{d\tau}{dt}, \frac{d^2\tau}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{m+1}\tau}{dt^{m+1}}$$

sind.

Wir berechnen nun die linke Seite von (4.10). Es ist:

$$\frac{D}{dt}\left(P_i^r P_j^s \frac{D^m g_{rs}}{dt^m}\right) = P_i^a P_j^b \left\{\left(\frac{dP_a^r}{dt} P_b^s + P_a^r \frac{dP_b^s}{dt}\right) \frac{D^m g_{rs}}{dt^m} + \right.$$

$$\left. + P_a^r P_b^s \frac{d}{dt} \frac{D^m g_{rs}}{dt^m} - (''\Gamma_a{}^p{}_k P_p^r P_b^s + ''\Gamma_b{}^p{}_k P_a^r P_p^s) \frac{dx^k}{dt} \frac{D^m g_{rs}}{dt^m}\right\}.$$

Wir eliminieren aus dieser Formel die Gleider $\frac{dP_e^h}{dt}$ mittels der Identität (3.5). Beachten wir noch die Bedingung (4.8), d. h.

$$P_p^r P_i^h ('\Gamma_h{}^p{}_k - ''\Gamma_h{}^p{}_k) \frac{dx^k}{dt} = 0,$$

so wird:

$$\frac{D}{dt}\left(P_i^r P_j^s \frac{D^m g_{rs}}{dt^m}\right) =$$

$$= P_i^a P_j^b \left\{P_a^r P_b^s \left[\frac{d}{dt} \frac{D^m g_{rs}}{dt^m} - \left(''\Gamma_r{}^p{}_k \frac{D^m g_{ps}}{dt^m} + ''\Gamma_s{}^p{}_k \frac{D^m g_{rp}}{dt^m}\right) \frac{dx^k}{dt}\right]\right\} \equiv P_i^a P_j^b \frac{D^{m+1} g_{ab}}{dt^{m+1}}.$$

Die Formel (4.10) geht demnach eben in die gewünschte Formel

$$P_i^a P_j^b \frac{D^{m+1} g_{ab}}{dt^{m+1}} = \tau \frac{D^{m+1} g_{ij}}{dt^{m+1}} + \sum_{k=1}^{m+1} \psi_k^* \frac{D^{m+1-k} g_{ij}}{dt^{m+1-k}} \tag{4.11}$$

über, wo die ψ_k^* Polynome von $\tau, \frac{d\tau}{dt}, \ldots, \frac{d^{m+1}\tau}{dt^{m+1}}$ sind. (4.11) beweist aber, daß die Relation (4.9) auch für $(m+1)$ besteht, womit die vollständige Induktion beendet ist.

Endlich wollen wir den Eigentensor g_{ij} untersuchen, falls g_{ij} rekurrent ist, d. h. es besteht (1.7) bzw. die mit (1.7) äquivalente Relation:

$$\frac{Dg_{ij}}{dt} = \left(\gamma_k \frac{dx^k}{dt}\right) g_{ij}. \tag{4.12}$$

Wir beweisen nun den

Satz 8. *Gelten für den in* (i, j) *symmetrischen Tensor* g_{ij} *(4.1) und (4.12), so ist*

$$\frac{D^m g_{ij}}{dt^m} = \omega g_{ij}, \quad (m = 1, 2, \ldots), \tag{4.13}$$

wo ω *eine skalare Funktion von* τ, $\dfrac{dx^k}{dt}$, γ_k *und deren Ableitungen bis höchstens m-ter Ordnung nach dem Parameter t ist.*

Beweis. Für $m=1$ ist der Satz nach (4.12) gültig. Nehmen wir an, daß der Satz für irgendein $m \geqq 1$ gültig ist. Nach der Formel (4.13) hat man:

$$\frac{D^{m+1} g_{ij}}{dt^{m+1}} = P_i^a P_j^b \left\{ \frac{d}{dt} \frac{D^m g_{ab}}{dt^m} - {}''\Gamma_a{}^r{}_h \frac{D^m g_{rb}}{dt^m} \frac{dx^h}{dt} - {}''\Gamma_b{}^r{}_h \frac{D^m g_{ar}}{dt^m} \frac{dx^h}{dt} \right\} =$$

$$= \frac{d\omega}{dt} P_i^a P_j^b g_{ab} + \omega \frac{D g_{ij}}{dt}.$$

Beachten wir jetzt (4.1) und (4.12), so folgt unmittelbar

$$\frac{D^{m+1} g_{ij}}{dt^{m+1}} = \omega^* g_{ij}, \quad \omega^* \overset{\text{def}}{=} \frac{d\omega}{dt} \tau + \omega \gamma_k \frac{dx^k}{dt}.$$

Die Formel (4.13) gilt also auch für $(m+1)$, nur die skalare Funktion ω geht in ω^* über. Nach der vollständigen Induktion ist der Satz bewiesen.

Aus (4.1) und (4.13) folgt noch, daß wenn die Bedingungen von Satz 8 bestehen, dann auch

$\dfrac{D^m g_{ij}}{dt^m}$ *ein Eigentensor mit dem Eigenfunktion* τ *ist.*

Zum Schluß bemerken wir noch, daß unsere Untersuchungen — *nach unserer Vermutung* — in ähnlicher Weise auf Grund von (2.2b) auch für den kontravarianten Tensor g^{ij} durchgeführt werden könnten.

Schriftenverzeichnis

[1] Arthur Moór, Über eine Übertragungstheorie der metrischen Linienelementräume mit rekurrentem Grundtensor, *Tensor*, N. S. **29** (1975), 47—63.
[2] T. Otsuki, Tangent bundles of order 2 and general connections. *Math. J. Okayama Univ.*, **8** (1958), 143—179.
[3] T. Otsuki, On general connections. I, *Math. J. Okayama Univ.*, **9** (1959—60), 99—164.
[4] T. Otsuki, On metric general connections. *Proc. Japan Academy*, **37** (1961), 183—188.
[5] H. Weyl, Reine Infinitesimalgeometrie, *Math. Zeitschrift*, **2** (1918), 384—411.

LEHRSTUHL FÜR MATHEMATIK
UNIV. FÜR FORST UND HOLZINDUSTRIE
H—9401 SOPRON, PF. 132