Acta Sci. Math., 40 (1978), 229—235

Sur certaines suites pseudo-aléatoires

JEAN COQUET

I. Introduction

I. 1. Notations et définitions. Comme d'habitude, on désigne par $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{N}^*$ l'ensemble $\mathbf{N}-\{0\}$, $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbf{Q}$ celui des nombres rationnels, $\mathbf{R}$ celui des nombres réels et $\mathbf{C}$ celui des nombres complexes.

Pour tout $x\in\mathbf{R}$, on pose $e(x)=e^{2i\pi x}$,

$$\|x\| = \operatorname{Min}\{|x-n| : n\in\mathbf{Z}\},\quad [x] = \operatorname{Max}\{n\in\mathbf{Z} : n \leqq x\},\quad \{x\} = x-[x].$$

Soit $g:\mathbf{N}\to\mathbf{C}$ une suite infinie. On dit que g est pseudo-aléatoire au sens de BERTRANDIAS [2] si les deux conditions suivantes (a) et (b) sont réalisées:

(a) $\gamma(t) = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{N} \sum\limits_{n=0}^{N-1} g(n+t)\overline{g(n)}$ existe pour tout $t\in\mathbf{N}$

(γ s'appelle corrélation de g),

(b) $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{N} \sum\limits_{t=0}^{N-1} |\gamma(t)|^2 = 0.$

Si, au lieu de (b), la condition suivante (b′), plus forte, est réalisée:

(b′) $\lim\limits_{t\to\infty} \gamma(t) = 0,$

g est dite pseudo-aléatoire au sens de BASS [1].

Dans cet article, $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite de réels, $(s_k)_{k\in\mathbf{N}}$ désigne une suite strictement croissante de réels positifs tendant vers l'infini. On pose $g(n)=e\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \left[\dfrac{n}{s_k}\right]\right)$.

I. 2. Résultats. Dans un article écrit en collaboration avec M. MENDÈS-FRANCE [3], nous avions établi le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Soit q un entier $\geqq 2$. Posons $s_k=q^k$ pour tout $k\in\mathbf{N}$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes:*

1) *g est pseudo-aléatorie au sens de Bertrandias,*

2) $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|^2 = \infty$,

3) *g est à spectre vide.*

Dans l'exposé [4] nous avons démontré que le théorème 1 se généralisait au cas où la suite (s_k) est une suite d'entiers naturels, telle que pour tout $k \in \mathbf{N}$, s_k divise s_{k+1}.

Nous nous proposons ici d'examiner le cas "diamétralement opposé" où les nombres s_k sont deux à deux premiers entre eux:

Théorème 2. *Soit $(s_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite croissante de nombres entiers naturels, deux à deux premiers entre eux et telle que:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s_k} < \infty.$$

g est pseudo-aléatoire au sens de Bertrandias si et seulement si $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|^2 = \infty$.

Nous démontrons également le

Théorème 3. *Soit $(s_k)_{k\in N}$ une suite de nombres irrationnels positifs telle que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s_k} < \infty$ et que les nombres $\frac{1}{s_k}$, $k \in \mathbf{N}$, soient* **Q**-*linéairement indépendants. g est pseudo-aléatoire au sens de Bertrandias si et seulement si $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|^2 = \infty$.*

Le théorème 3 admet évidemment comme corollaire le théorème suivant, à comparer au théorème 1:

Théorème 4. *Soit τ un nombre réel transcendant >1. On pose $s_k = \tau^k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. g est pseudo-aléatoire au sens de Bertrandias si et seulement si*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|^2 = \infty.$$

I. 3. Remarques. 1) Nous pouvons démontrer facilement à l'aide des relations de corrélation établies dans [3] que les suites envisagées dans le théorème 1 et, plus généralement, les suites q-multiplicatives de module 1, ne sont pas pseudo-aléatoires au sens de Bass. Par contre, lorsque $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|^2 = \infty$, les suites envisagées au théorème 2 peuvent être ou ne pas être pseudo-aléatoires au sens de Bass, comme nous le verrons dans le paragraphe III.

2) La méthode utilisée pour démontrer les théorèmes 2 et 3 diffère sensiblement de celle utilisée dans [3] pour prouver le théorème 1. Ici, nous déterminons effectivement la corrélation γ de g.

La démonstration de l'existence de γ est faite sous la seule hypothèse que $(s_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite de réels positifs telle que $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{s_k}<\infty$. Est-ce que, dans ce cas général, la condition $\sum_{k=0}^{\infty}\|a_k\|^2=\infty$ est encore nécessaire et suffisante pour que g soit pseudo-aléatoire au sens de Bertrandias?

II. Démonstration des théorèmes 2 et 3

II. 1. Existence de la corrélation de g. Considérons la fonction tronquée g_r définie par

$$g_r(n)=e\left(\sum_{k=0}^{r}a_k\left[\frac{n}{s_k}\right]\right).$$

Montrons d'abord que g_r a une corrélation γ_r. Soit $t\in\mathbf{N}^*$. On a

$$g_r(n+t)\overline{g_r(n)}=e\left(\sum_{k=0}^{r}a_k\left(\left[\frac{n+t}{s_k}\right]-\left[\frac{n}{s_k}\right]\right)\right)=$$

$$=e\left(\sum_{k=0}^{r}\frac{a_k t}{s_k}\right)\cdot\prod_{k=0}^{r}e\left(a_k\left\{\frac{n}{s_k}\right\}\right)\cdot e\left(-a_k\left\{\frac{n+t}{s_k}\right\}\right).$$

La suite $\left(g_r(n+t)\overline{g_r(n)}\right)$ est presque-périodique-B_1. Elle a donc une valeur moyenne $\gamma_r(t)$.

Montrons maintenant que g a une corrélation γ donnée par: $\gamma(t)=\lim_{r\to\infty}\gamma_r(t)$. On a

Card $\{n:0\leqq n\leqq N-1$ et $g(n+t)\overline{g(n)}\neq g_r(n+t)\overline{g_r(n)}\}$

$$\leqq\sum_{k\geqq r+1}\mathrm{Card}\left\{n:0\leqq n\leqq N-1\ \text{et}\ \left[\frac{n+t}{s_k}\right]\neq\left[\frac{n}{s_k}\right]\right\}\leqq\sum_{k\geqq r+1}\frac{tN}{s_k}.$$

L'hypothèse $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{s_k}<\infty$ implique

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|g(n+t)\overline{g(n)}-g_r(n+t)\overline{g_r(n)}\right|\leqq 2t\sum_{k\geqq r+1}\frac{1}{s_k}\to 0\,(r\to\infty).$$

Un résultat classique sur l'interversion de deux passages à la limite montre que la suite $\left(g(n+t)\overline{g(n)}\right)$ a une valeur moyenne $\gamma(t)$.

De plus, pour tout $t\in\mathbf{N}^*$, $\gamma(t)=\lim_{r\to\infty}\gamma_r(t)$.

II. 2. Calcul de la corrélation de g. Nous allons montrer que, sous les hypothèses du théorème 2 ou celles du théorème 3, $\gamma_r(t)=\prod_{k=0}^{r}\psi_k(t)$ où

$$\psi_k(t)=e\left(a_k\left[\frac{t}{s_k}\right]\right)\cdot\left(1-\left\{\frac{t}{s_k}\right\}+\left\{\frac{t}{s_k}\right\}e(a_k)\right).$$

Il est évident que:

$$\left[\frac{n+t}{s_k}\right]-\left[\frac{n}{s_k}\right]=\begin{cases}\left[\dfrac{t}{s_k}\right] & \text{si } 0\leqq\left\{\dfrac{n}{s_k}\right\}<1-\left\{\dfrac{t}{s_k}\right\}\\[2ex] \left[\dfrac{t}{s_k}\right]+1 & \text{si } 1-\left\{\dfrac{t}{s_k}\right\}\leqq\left\{\dfrac{n}{s_k}\right\}<1.\end{cases}$$

La suite $\left(e\left(a_k\left[\dfrac{n+t}{s_k}\right]-a_k\left[\dfrac{n}{s_k}\right]\right)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ a donc une valeur moyenne égale à $\psi_k(t)$.

Les hypothèses du théorème 2 ou du théorème 3 assurent l'indépendance statistique des ensembles $E_k=\left\{n\in\mathbf{N}:\left\{\dfrac{n}{s_k}\right\}\in A_k\right\}$, $0\leqq k\leqq r$, où les A_k sont des sous-intervalles arbitraires de $[0, 1[$.

Autrement dit, si $\delta(E)$ est la densité asymptotique de $E\subset\mathbf{N}$,

$$\delta(E_0\cap\ldots\cap E_r)=\prod_{k=0}^{r}\delta(E_k).$$

Cette indépendance statistique entraîne que $\gamma_r(t)=\prod_{k=0}^{r}\psi_k(t)$. Il en résulte que:

$$|\gamma_r(t)|^2=\prod_{k=0}^{r}|\psi_k(t)|^2=\prod_{k=0}^{r}\left(1-4\left\{\frac{t}{s_k}\right\}\left(1-\left\{\frac{t}{s_k}\right\}\right)\sin^2(\pi a_k)\right).$$

Comme $\gamma(t)=\lim_{r\to\infty}\gamma_r(t)$,

$$|\gamma(t)|^2=\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-4\left\{\frac{t}{s_k}\right\}\left(1-\left\{\frac{t}{s_k}\right\}\right)\sin^2(\pi a_k)\right).$$

II. 3. Fin de la démonstration du théorème 3. s_k étant irrationnel, la valeur moyenne de $|\psi_k(t)|^2$ est égale à

$$1-4\sin^2(\pi a_k)\int_0^1 x(1-x)\,dx=1-\frac{2}{3}\sin^2(\pi a_k).$$

L'indépendance linéaire sur $\mathbf{Q}$ des nombres $\dfrac{1}{s_0},\ldots,\dfrac{1}{s_r}$ permet d'affirmer que $|\gamma_r(t)|^2$ a une valeur moyenne égale à

$$\mu_r=\prod_{k=0}^{r}\left(1-\frac{2}{3}\sin^2(\pi a_k)\right).$$

Cas $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|^2 = \infty$. Comme $|\gamma(t)| \leqq |\gamma_r(t)|$ pour tout $r \in \mathbf{N}$ et tout $t \in \mathbf{N}^*$, on a:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \sum_{t=0}^{N-1} |\gamma(t)|^2 \leqq \mu_r \quad \text{pour tout} \quad r \in \mathbf{N}.$$

Puisque $\mu_r \to 0$ lorsque $r \to \infty$, g est pseudo-aléatoire au sens de Bertrandias.

Cas $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|^2 < \infty$. La suite $(|\gamma_r(t)|^2)_{r\in\mathbf{N}}$ converge, uniformément par rapport à t, vers $|\gamma(t)|^2$. En effet,

$$|\gamma_r(t)|^2 - |\gamma(t)|^2 \leqq 1 - \prod_{k \geqq r+1} \left(1 - 4\left\{\frac{t}{s_k}\right\}\left(1 - \left\{\frac{t}{s_k}\right\}\right) \sin^2(\pi a_k)\right) \leqq \pi^2 \sum_{k \geqq r+1} \|a_k\|^2.$$

On en déduit que $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\gamma(t)|^2$ existe et est égale à $\lim_{r\to\infty} \mu_r > 0$. g n'est pas pseudo-aléatoire.

II. 4. Fin de la démonstration du théorème 2. Elle est semblable à celle du théorème 3. Dans ce cas, r étant fixé, la suite $(|\gamma_r(t)|^2)_{t\in\mathbf{N}}$ est périodique de période $s_0 \dots s_r$. Elle a une valeur moyenne

$$\mu_r = \prod_{k=0}^{r} \left(1 - \frac{2(s_k^2 - 1)}{3s_k^2} \sin^2(\pi a_k)\right).$$

On conclut de la même façon.

III. Suites pseudo-aléatoires au sens de Bass

III. 1. Soit $\alpha \notin \mathbf{Q}$. Posons $a_k = \alpha$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Supposons que la suite $(s_k)_{k\in\mathbf{N}}$ satisfasse aux conditions du théorème 2 et à la condition supplémentaire suivante

$$\operatorname{Card}\{k \colon T \leqq s_k < 2T\} \to +\infty \quad (T \to \infty).$$

On a alors

$$|\gamma(t)|^2 \leqq \prod_{\frac{3t}{2} \leqq s_k < 3t} \left(1 - \frac{4t}{s_k}\left(1 - \frac{t}{s_k}\right) \sin^2 \pi\alpha\right) \leqq \prod_{\frac{3t}{2} \leqq s_k < 3t} \left(1 - \frac{8}{9} \sin^2 \pi\alpha\right) \to 0 \quad (t \to \infty).$$

La suite $\left(e\left(\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{n}{s_k}\right]\right)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc pseudo-aléatoire au sens de Bass.

III. 2. Au contraire, sous les hypothèses du théorème 2, la condition $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|^2 = \infty$ peut être réalisée sans que g soit pseudo-aléatoire au sens de Bass.

Supposons cette fois que la suite (s_k) ait une croissance rapide dans le sens suivant:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{s_0 \dots s_r}{s_{r+1}} = 0.$$

On a alors:

$$|\gamma_r(t)|^2 - |\gamma(t)|^2 \leqq \sum_{k \geqq r+1} 4\left(1-\left\{\frac{t}{s_k}\right\}\right)\left\{\frac{t}{s_k}\right\} \sin^2(\pi a_k) \leqq 4 \sum_{k \geqq r+1} \frac{t}{s_k}.$$

Donc $|\gamma_r(s_0 \dots s_r)|^2 - |\gamma(s_0 \dots s_r)|^2 \leqq 4 \sum_{k \geqq r+1} \frac{s_0 \dots s_r}{s_k}$. Comme $|\gamma_r(s_0 \dots s_r)| = 1$, on a $|\gamma(s_0 \dots s_r)| \to 1$ lorsque $r \to \infty$ la et suite g n'est pas pseudo-aléatoire au sens de Bass.

On peut montrer que g est pseudo-aléatoire au sens de Bertrandias si et seulement si son spectre est vide.

IV. Généralisation. Application

IV. 1. Généralisation. On peut généraliser les théorèmes 2 et 3 en considérant des suites du type:

$$g^*(n) = e\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{k,i} \left[\frac{n+q_i}{s_k}\right]\right)\right)$$

où les nombres q_i sont entiers naturels.

La suite g^* est pseudo-aléatoire si et seulement si la suite g de terme général $g(n) = e\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{k,i}\right) \left[\frac{n}{s_k}\right]\right)$ est pseudo-aléatoire.

IV. 2. Application. Les théorèmes 2 et 3 admettent des applications en théorie de l'équirépartition modulo 1. Nous donnerons sans démonstration une nouvelle caractérisation des nombres de Pisot ([3], [4], [5], [6]).

Théorème 5. *Soit $\theta > 1$ un nombre réel, soit $(s_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels satisfaisant aux conditions du théorème 2 ou à celles du théorème 3. On pose*

$$g(n) = e\left(\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \left[\frac{n}{s_k}\right]\right) \quad \textit{et} \quad h(n) = e\left(\sum_{k=0}^{\infty} \|\theta^k\| \left\{\frac{n}{s_k}\right\}\right).$$

Les assertions suivantes sont équivalentes.

1) *θ est un nombre de Pisot,*
2) *g n'est pas pseudo-aléatoire,*
3) *g est presque-périodique-B_1 à spectre non vide,*
4) *h n'est pas pseudo-aléatoire,*
5) *h est presque-périodique-B_1 à spectre non vide.*

Bibliographie

[1] J. BASS, Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires, *Bull. Soc. Math. France*, **87** (1959), 1—64.

[2] J. P. BERTRANDIAS, Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre *p*, *Bull. Soc. Math. France*, mémoire 5 (1966), 1—106.

[3] J. COQUET—M. MENDÈS-FRANCE, Suites à spectre vide et suites pseudo-aléatoires, *Acta Arithmetica*, **32** (1977), 99—106.

[4] J. COQUET, Fonctions Q-multiplicatives. Application aux nombres de Pisot—Vijayaragharan, *Séminaire de théorie des nombres, Bordeaux* (1976—1977).

[5] M. MENDÈS-FRANCE, Indépendance statistique et nombres de Pisot, *ibidem* (1975—1976).

[6] M. MENDÈS-FRANCE, Deux remarques concernant l'équirépartition des suites, *Acta Arithmetica*, **14** (1968), 163—167.

DÉPARTMENT DE MATHÉMATIQUE
CENTRE UNIVERSITAIRE
59326 AULNOY-LEZ-VALENCIENNES,
FRANCE