Acta Sci. Math., 40 (1978), 389—396

Factorisations régulières et sous-espaces hyperinvariants

RADU I. TEODORESCU

1. Soient $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}_*$ deux espaces de Hilbert complexes séparables, soit $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ une fonction analytique contractive pure[1]) et soit T l'opérateur qui lui est associé par

$$T^*(u \oplus v) = e^{-it}(u(e^{it}) - u(0)) \oplus e^{-it} v(t)$$

sur l'espace $H = K_+ \ominus G$ où $K_+ = H^2(\mathfrak{E}_*) \oplus \overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}$, $G = \{\Theta u \oplus \Delta u : u \in H^2(\mathfrak{E})\}$ et $\Delta(t) = [I - \Theta^*(e^{it})\Theta(e^{it})]^{1/2}$.

Envisageons une factorisation $\Theta = \Theta_2 \Theta_1$ de $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ où les facteurs $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \Theta_1(\lambda)\}$ et $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{E}_*, \Theta_2(\lambda)\}$ sont des fonctions analytiques contractives et soit Z le prolongement à $\overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}$ de l'opérateur isométrique Z_0: $\Delta L^2(\mathfrak{E}) \to \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})}$ défini par $Z_0(\Delta v) = \Delta_2 \Theta_1 v \oplus \Delta_1 v$, $v \in L^2(\mathfrak{E})$.

Rappelons que la factorisation $\Theta = \Theta_2 \Theta_1$ est dite régulière (cf. [H] ch. VII) si Z est un opérateur unitaire. On connait (cf. [H] ch. VII) les suivants résultats:

(a) A chaque sous-espace $H_1 \subset H$ invariant pour l'opérateur T il correspond une factorisation régulière $\Theta = \Theta_2 \Theta_1$ telle que le sous-espace H_1 et son complément orthogonal $H_2 = H \ominus H_1$ ont les répresentations suivantes:

$$H_1 = \{\Theta_2 u \oplus Z^{-1}(\Delta_2 u \oplus v) : u \in H^2(\mathfrak{F}),\ v \in \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})},\ \Theta_1^* u + \Delta_1 v \perp H^2(\mathfrak{E})\} \tag{1}$$

$$H_2 = \{u \oplus Z^{-1}(v \oplus 0) : u \in H^2(\mathfrak{E}_*),\ v \in \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})},\ \Theta_2^* u + \Delta_2 v \perp H^2(\mathfrak{F})\}; \tag{1'}$$

(b) Pour toute factorisation régulière $\Theta = \Theta_2 \Theta_1$ le sous-espace H_1 donné par la formule (1) est un sous-espace invariant pour T.

Le but de cette Note est de caractériser les factorisations régulières telles que le sous-espace correspondant H_1 est même hyperinvariant pour T, c'est-à-dire invariant pour tout opérateur S qui permute à T. Plus précisément nous allons démontrer le suivant

Reçu le 12 août 1977.

[1]) Pour toutes les notions qui ne sont pas explicitement définies ainsi que pour la notation utilisée cf. [H].

Théorème. *Soit* $\Theta=\Theta_2\Theta_1$ *une factorisation régulière de la fonction analytique contractive pure* $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ *et soit* H_1 *le sous-espace invariant correspondant à cette factorisation. Supposons de plus que* $\Theta_1(e^{it})$ *et* $\Theta_1^*(e^{it})$ *sont injectifs pour presque tout* $t\in[0, 2\pi]$. *Pour que le sous-espace* H_1 *soit hyperinvariant pour* T *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:*

(i) $\Delta_1(t)=O$ *où* $\Delta_2(t)=O$ *pour presque tout* $t\in[0, 2\pi]$,

(ii) *pour chaque couple* (A, A_0) *de fonctions analytiques bornées* $\{\mathfrak{E}_*, \mathfrak{E}_*, A(\lambda)\}$, $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, A_0(\lambda)\}$ *telles que* $A\Theta=\Theta A_0$ *il existe une fonction analytique bornée* $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{F}, \Phi(\lambda)\}$ *vérifiant*

$$A(\lambda)\Theta_2(\lambda) = \Theta_2(\lambda)\Phi(\lambda) \quad \textit{et} \quad \Phi(\lambda)\Theta_1(\lambda) = \Theta_1(\lambda)A_0(\lambda).$$

2. Avant de démontrer la nécessité des conditions (i) et (ii) nous rappelons (cf. [1]) que si $S\in\mathscr{B}(H)$ est un élément du commutant $\{T\}'=\{S\in\mathscr{B}(H): ST=TS\}$ alors il existe des fonctions analytiques bornées $\{\mathfrak{E}_*, \mathfrak{E}_*, A(\lambda)\}$, $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, A_0(\lambda)\}$, des fonctions mesurables bornées $B(\cdot): \mathfrak{E}_* \to \overline{\Delta \mathfrak{E}}$, $C(\cdot): \overline{\Delta\mathfrak{E}} \to \overline{\Delta \mathfrak{E}}$, liées par les équations

$$A\Theta = \Theta A_0 \quad \text{et} \quad B\Theta+C\Delta = \Delta A_0, \tag{2}$$

et telles qu'on ait $S=P_+ Y|H$ où P_+ est la projection orthogonale $K_+ \to H$, et où

$$Y = \begin{bmatrix} A & O \\ B & C \end{bmatrix}.$$

Nous allons faire usage dans la suite de la remarque de [1], Lemme 2.1′, selon laquelle les fonctions $B(\cdot)$ et $C(\cdot)$ peuvent être exprimées sous la forme

$$B = D\Delta_* + \Delta A_0\Theta^*, \quad C = [-D\Theta+\Delta A_0\Delta]|\overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})} \tag{3}$$

où $D: \overline{\Delta_* L^2(\mathfrak{E}_*)} \to \overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}$ est une fonction opératorielle mesurable bornée. Notons aussi que la factorisation régulière $\Theta(\lambda)=\Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda)$ étant fixée nous pouvons considérer le modèle fonctionnel unitairement équivalent donné par

$$\mathbf{T}^*(u\oplus v_2\oplus v_1) = e^{-it}(u(e^{it})-u(0))\oplus e^{-it}v_2(t)\oplus e^{-it}v_1(t)$$

sur l'espace $\mathbf{H}=\mathbf{K}_+\ominus\mathbf{G}$ où $\mathbf{K}_+=H^2(\mathfrak{E}_*)\oplus\overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})}\oplus\overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})}$ et $\mathbf{G}= =\{\Theta_2\Theta_1 u\oplus\Delta_2\Theta_1 u\oplus\Delta_1 u: u\in H^2(\mathfrak{E})\}$; le sous-espace $\mathbf{H}_1$ correspondant à H_1 est alors donné par

$$\mathbf{H}_1 = \{\Theta_2 u\oplus\Delta_2 u\oplus v: u\in H^2(\mathfrak{F}),\ v\in \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})},\ \Theta_1^* u+\Delta_1 v\perp H^2(\mathfrak{E})\}.$$

Dans ce cas, si l'on note

$$ZB = \begin{bmatrix} B_2 \\ B_1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad ZCZ^{-1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

l'opérateur $\mathbf{S}\in\{\mathbf{T}\}'$ correspondant à S est donné par $\mathbf{S}=\mathbf{P}_+\mathbf{Y}|\mathbf{H}$ où $\mathbf{P}_+$ est la projection orthogonale $\mathbf{K}_+\to\mathbf{H}$ et $\mathbf{Y}$ a la forme

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} A & O & O \\ B_2 & C_{11} & C_{12} \\ B_1 & C_{21} & C_{22}\end{bmatrix} \tag{4}$$

où

$$\begin{gathered} A\Theta=\Theta A_0, \\ B_2\Theta+C_{11}\Delta_2\Theta_1+C_{12}\Delta_1=\Delta_2\Theta_1A_0, \\ B_1\Theta+C_{21}\Delta_2\Theta_1+C_{22}\Delta_1=\Delta_1A_0, \end{gathered} \tag{2'}$$

En revenant aux propriétés (i) et (ii) nous allons d'abord démontrer le

Lemme 1. *Si le sous-espaces* $\mathbf{H}_1$ *est invariant pour* $\mathbf{S}\in\{\mathbf{T}\}'$ *alors* $C_{12}=O$.

Démonstration. Notons que $\mathbf{H}_1$ étant invariant pour $\mathbf{S}=\mathbf{P}_+\mathbf{Y}$, $\mathbf{L}=\{\Theta_2u\oplus\Delta_2u\oplus v: u\in H^2(\mathfrak{F}),\ v\in\overline{\Delta_1L^2(\mathfrak{E})}\}$ est invariant pour $\mathbf{Y}$. Donc si $0\oplus0\oplus v\in\mathbf{L}$, alors $\mathbf{Y}(0\oplus0\oplus v)\in\mathbf{L}$. Or, comme on a

$$\mathbf{Y}(0\oplus0\oplus v)=0\oplus C_{12}v\oplus v',\quad v'=C_{22}v\in\overline{\Delta_1L^2(\mathfrak{E})}$$

il existe $w\in H^2(\mathfrak{F})$ tel que

$$\Theta_2w=0\quad\text{et}\quad\Delta_2w=C_{12}v.$$

De la première relation il dérive $\Delta_2^2w=w$, donc $\Delta_2w=w$, d'où $C_{12}v=w\in H^2(\mathfrak{F})$. Donc C_{12} applique $\overline{\Delta_1L^2(\mathfrak{E})}$ dans $H^2(\mathfrak{F})$ et permute à la multiplication par e^{it}. Il en résulte $C_{12}=O$. C.q.f.d.

Dans la suite nous calculons la matrice de l'opérateur $\mathbf{S}_0=\mathbf{P}_+\mathbf{Y}_0\in\{\mathbf{T}\}'$ correspondant à un couple (A, A_0) satisfaisant à la première relation (2) et à $D=O$.

En tenant compte de (3) il en résulte que

$$B_0=\Delta A_0\Theta^*\quad\text{et}\quad C_0=\Delta A_0\Delta|\overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}$$

d'où $(ZB_0)(u)=\Delta_2\Theta_1A_0\Theta^*u\oplus\Delta_1A_0\Theta^*u$ pour $u\in L^2(\mathfrak{E}_*)$. Soit maintenant $v_2\oplus v_1\in\overline{\Delta_2L^2(\mathfrak{F})}\oplus\overline{\Delta_1L^2(\mathfrak{E})}$; on a

$$v_2\oplus v_1=\lim_{n\to\infty}(\Delta_2\Theta_1u_n\oplus\Delta_1u_n)\quad\text{où}\quad u_n\in L^2(\mathfrak{E}),$$

$$\begin{aligned} ZC_0Z^{-1}(v_2\oplus v_1) &= ZC_0Z^{-1}(\lim\Delta_2\Theta_1u_n\oplus\Delta_1u_n)=\lim(Z\Delta A_0\Delta^2u_n)= \\ &= \lim(\Delta_2\Theta_1A_0\Delta^2u_n\oplus\Delta_1A_0\Delta^2u_n)= \\ &= \lim[\Delta_2\Theta_1A_0(\Theta_1^*\Delta_2^2+\Delta_1^2)u_n\oplus\Delta_1A_0(\Theta_1^*\Delta_2^2\Theta_1+\Delta_1^2)u_n]= \\ &= [(\Delta_2\Theta_1A_0\Theta_1^*\Delta_2v_2+\Delta_2\Theta_1A_0\Delta_1v_1)\oplus(\Delta_1A_0\Theta_1^*\Delta_2v_2\oplus\Delta_1A_0\Delta_1v_3)]. \end{aligned}$$

Donc la matrice de $\mathbf{Y}_0$ est donnée par

$$(5) \qquad \mathbf{Y}_0 = \begin{bmatrix} A & O & O \\ \Delta_2\Theta_1 A_0\Theta^* & \Delta_2\Theta_1 A_0\Theta_1^*\Delta_2 & \Delta_2\Theta_1 A_0\Delta_1 \\ \Delta_1 A_0\Theta^* & \Delta_2 A_0\Theta_1^*\Delta_2 & \Delta_1 A_0\Delta_1 \end{bmatrix}.$$

Conséquence 1. *Si le sous-espace* $\mathbf{H}_1$ *est invariant pour l'opérateur* $\mathbf{S}_0 = \mathbf{P}_+\mathbf{Y}_0$ *où* $\mathbf{Y}_0$ *est donnée par* (5), *alors* $\Delta_2\Theta_1 A_0\Delta_1 = O$.

En effet si $\mathbf{H}_1$ est invariant pour $\mathbf{S}_0 = \mathbf{P}_+\mathbf{Y}_0$ où $\mathbf{Y}_0$ est donnée par (5); en appliquant le Lemme 1, nous obtenons $\Delta_2\Theta_1 A_0\Delta_1 = O$.

Corollaire 1. *Si le sous-espace* $\mathbf{H}_1$ *est hyperinvariant pour* $\mathbf{T}$, *alors* $\Delta_2\Theta_1\Delta_1 = O$.

En effet si le sous-espace $\mathbf{H}_1$ est hyperinvariant pour $\mathbf{T}$ alors il est invariant pour l'opérateur qui est déterminé par le couple $(I_{\mathfrak{E}_*}, I_{\mathfrak{E}})$ et $D = O$, donc qui s'obtient de (5) en choisissant $A = I_{\mathfrak{E}_*}$ et $A_0 = I_{\mathfrak{E}}$; donc d'après la conséquence précédente on a $\Delta_2\Theta_1\Delta_1 = O$.

Proposition 1. *Si le sous-espace* $\mathbf{H}_1$ *est hyperinvariant pour* $\mathbf{T}$ *et si* $\Theta_1(e^{it})$ *est injectif pour presque tout* $t \in [0, 2\pi]$, *alors*

$$\Delta_1(t) = [I - \Theta_1^*(e^{it})\Theta_1(e^{it})]^{1/2} = O \quad ou \quad \Delta_2(t) = [I - \Theta_2^*(e^{it})\Theta_2(e^{it})]^{1/2} = O$$

pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$.

Démonstration. Soit $X: \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})} \to \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})}$ un opérateur mesurable borné qui permute à la multiplication par e^{it}. Envisageons l'opérateur $\mathbf{S}_1 = \mathbf{P}_+\mathbf{Y}_1 \in \{\mathbf{T}\}'$ où $\mathbf{Y}_1$ est déterminé par le couple $(A(\lambda) \equiv O,\ A_0(\lambda) \equiv O)$ et où

$$D = -Z^{-1}\begin{bmatrix} O & X \\ O & O \end{bmatrix} Z\Theta^* | \overline{\Delta_* L^2(\mathfrak{E}_*)}.$$

Pour calculer la matrice de $\mathbf{Y}_1$ notons d'abord qu'on a

$$Z\Delta^2 Z^{-1}(v_2 \oplus v_1) = [(\Delta_2\Theta_1\Theta_1^*\Delta_2 v_2 + \Delta_2\Theta_1^{\Delta_1} v_1) \oplus (\Delta_1\Theta_1^*\Delta_2 v_2 + \Delta_1^2 v_1)].$$

En effet pour $v \in \overline{\Delta L^2(\mathfrak{E})}$ soit $v = \lim_{n\to\infty} \Delta u_n$ où $u_n \in L^2(\mathfrak{E})$; alors,

$$Zv = Z(\lim \Delta u_n) = \lim(\Delta_2\Theta_1 u_n \oplus \Delta_1 u_n) = v_2 \oplus v_1,$$

$$Z\Delta^2 Z^{-1}(v_2 \oplus v_1) = Z\Delta^2 v = \Delta_2\Theta_1\Delta v \oplus \Delta_1\Delta v =$$

$$= \lim(\Delta_2\Theta_1\Delta^2 u_n \oplus \Delta_1\Delta^2 u_n) = \lim[\Delta_2\Theta_1(\Theta_1^*\Delta_2^2\Theta_1 + \Delta_1^2)u_n \oplus \Delta_1(\Theta_1^*\Delta_2^2\Theta_1 + \Delta_1^2)u_n] =$$

$$= [(\Delta_2\Theta_1\Theta_1^*\Delta_2 v_2 + \Delta_2\Theta_1\Delta_1 v_1) \oplus (\Delta_1\Theta_1^*\Delta_2 v_2 + \Delta_1^2 v_1)];$$

d'où en tenant compte du corollaire 1 on déduit

$$Z\Delta^2 Z^{-1} = \begin{bmatrix} \Delta_2\Theta_1\Theta_1^*\Delta_2 & O \\ O & \Delta_1^2 \end{bmatrix}.$$

Nous montrons que la matrice de $ZD\Theta Z^{-1}$ est donnée par

$$ZD\Theta Z^{-1} = \begin{bmatrix} O & -X\Theta_1^*\Theta_1 \\ O & O \end{bmatrix} \Big| \overline{\Delta_2 L^2(F)} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(E)}.$$

En effet,

$$ZD\Theta Z^{-1} = -ZZ^{-1}\begin{bmatrix} O & X \\ O & O \end{bmatrix} Z\Theta^*\Theta Z^{-1} =$$

$$= -\begin{bmatrix} O & X \\ O & O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O & X \\ O & O \end{bmatrix} Z\Delta^2 Z^{-1} = \begin{bmatrix} O & -X\Theta_1^*\Theta_1 \\ O & O \end{bmatrix} \Big| \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})}.$$

Donc la matrice de $\mathbf{Y}_1$ a la forme

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{bmatrix} O & O & O \\ B_2 & O & X\Theta_1^*\Theta_1 \\ B_1 & O & O \end{bmatrix}.$$

En appliquant le lemme 1 il en dérive que $X\Theta_1^*\Theta_1 | \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})} = O$ mais $\overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})} = \overline{\Theta_1^*\Theta_1\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})} \oplus \ker \Theta_1^*\Theta_1$, et d'après l'hypothèse on a $\ker \Theta_1^*\Theta_1 = \ker \Theta_1 = \{0\}$ donc $X = O$. Donc le seul opérateur $X: \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})} \to \overline{\Delta_2 L^2(\mathfrak{F})}$ mesurable borné qui permute à e^{it} est l'opérateur nul, donc $\Delta_1(t) = O$ ou $\Delta_2(t) = O$ pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$.

Proposition 2. *Si le sous-espace $\mathbf{H}_1$ est hyperinvariant pour $\mathbf{T}$ alors pour tout couple (A, A_0) de fonctions vérifiant $A\Theta = \Theta A_0$ il existe une fonction analytique bornée $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{F}, \Phi(\lambda)\}$ telle que*

$$(6) \qquad A\Theta_2 = \Theta_2 \Phi \quad et \quad \Phi\Theta_1 = \Theta_1 A_0.$$

Démonstration. Soit $\mathbf{S}_0 = \mathbf{P}_+\mathbf{Y}_0 \in \{\mathbf{T}\}'$ où $\mathbf{Y}_0$ est donné par (5). De la condition que $\mathbf{L}$ est invariant pour $\mathbf{Y}_0$ on déduit que pour tout $u \in H^2(\mathfrak{F})$ on a

$$(7) \qquad Y_0(\Theta_2 u \oplus \Delta_2 u \oplus 0) = \Theta_2 w \oplus \Delta_2 w \oplus v'$$

où $w \in H^2(\mathfrak{F})$ et $v' \in \overline{\Delta_1 L^2(\mathfrak{E})}$. Remarquons d'abord que l'application $\Phi: u \to w$ est univoque. En effet si l'on a $\Theta_2 w \oplus \Delta_2 w \oplus v' = \Theta_2 w_1 \oplus \Delta_2 w_1 \oplus v_1'$ alors $0 = \|\Theta_2(w-w_1)\|^2 + \|\Delta_2(w-w_1)\|^2 + \|v'-v_1'\|^2 = \|w-w_1\|^2 + \|v'-v_1'\|^2$ d'où $w = w_1$ et $v' = v_1'$. On obtient ainsi une application $\Phi: H^2(\mathfrak{F}) \to H^2(\mathfrak{F})$ qui permute à la multiplication par e^{it} et dont on peut vérifier facilement qu'elle est fermée donc continue. Donc Φ est l'opérateur de multiplication par une fonction analytique bornée $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{F}, \Phi(\lambda)\}$. Les deux premières composantes de l'égalité (7) nous donnent

$$A\Theta_2 = \Theta_2\Phi \quad \text{et} \quad \Delta_2\Theta_1 A_0 \Theta^* \Theta_2 + \Delta_2\Theta_1 A_0 \Theta_1^* \Delta_2^2 = \Delta_2 \Phi.$$

Après des transformations évidentes la deuxième relation obtenue devient

$$\Delta_2 \Theta_1 A_0 \Theta_1^* = \Delta_2 \Phi. \tag{8}$$

Notons que de la première relation (2) et de la relation $A\Theta_2 = \Theta_2 \Phi$ démontrée auparavant on obtient

$$\Theta_2(\Phi\Theta_1 - \Theta_1 A_0) = O. \tag{9}$$

De la relation (8) on déduit, tenant compte de la conséquence 1,

$$\Delta_2 \Phi \Theta_1 = \Delta_2 \Theta_1 A_0 \Theta_1^* \Theta_1 = -\Delta_2 \Theta_1 A_0 \Delta_1^2 + \Delta_2 \Theta_1 A_0 = \Delta_2 \Theta_1 A_0$$

donc

$$\Delta_2(\Phi\Theta_1 - \Theta_1 A_0) = O \tag{9'}$$

Les relations (9) et (9′) impliquent $\Phi\Theta_1 = \Theta_1 A_0$. C. q. f. d.

3. Nous allons démontrer que les conditions (i) et (ii) sont aussi suffisantes pour que le sous-espace $\mathbf{H}_1$ soit hyperinvariant pour $\mathbf{T}$ sous l'hypothèse que $\Theta_1^*(e^{it})$ est injectif pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$. Soit pour cela $\mathbf{S} = \mathbf{P}_+ \mathbf{Y} \in \{\mathbf{T}\}'$; d'après (i) nous obtenons pour $\mathbf{Y}$ une matrice de la forme

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} A & O & O \\ B_2 & C_{11} & O \\ B_1 & O & C_{22} \end{bmatrix}.$$

Les relations (2′) deviennent

$$\begin{gathered} A\Theta = \Theta A_0, \\ B_2 \Theta + C_{11} \Delta_2 \Theta_1 = \Delta_2 \Theta_1 A_0, \quad B_1 \Theta + C_{22} \Delta_1 = \Delta_1 A_0. \end{gathered} \tag{2''}$$

Mais d'après (ii) il existe une fonction analytique bornée $\{\mathfrak{F}, \mathfrak{F}, \Phi(\lambda)\}$ telle que $A\Theta_2 = \Theta_2 \Phi$ et $\Phi\Theta_1 = \Theta_1 A_0$. Eu égard aussi à la deuxième des relations (2″) on obteint $(B_2 \Theta_2 + C_{11} \Delta_2)\Theta_1 = \Delta_2 \Phi \Theta_1$; comme $\Theta_1^*(e^{it})$ est injectif il en résulte

$$B_2 \Theta_2 + C_{11} \Delta_2 = \Delta_2 \Phi.$$

Les relations $A\Theta_2 = \Theta_2 \Phi$ et $B_2 \Theta_2 + C_{11} \Delta_2 = \Delta_2 \Phi$ démontrées auparavant montrent que le sous-espace $\mathbf{L}$ est invariant pour $\mathbf{Y}$ donc $\mathbf{H}_1$ est invariant pour $\mathbf{S}$. Le théorème annoncé au début de cette Note est ainsi complètement démontré.

Remarque. La démonstration de la nécessité du théorème utilise l'hypothèse que $\Theta_1(e^{it})$ est injectif pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$, tandis que la condition que $\Theta_2^*(e^{it})$ est injectif pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$ est utilisée dans la démonstration de la suffisance. De plus la démonstration de la nécessité de la condition (ii) reste valable sans l'hypothèse supplémentaire que $\Theta_1(e^{it})$ soit injectif.

4. Dans ce dernier alinéa nous envisageons le cas particulier où la factorisation $\Theta = \Theta_2 \Theta_1$ est celle canonique, en produit d'un facteur extérieur Θ_1 et d'un facteur

intérieur Θ_2, et en outre nous donnons une application concernant les factorisations des fonctions analytiques contractives $*$-extérieures. On a le suivant

Corollaire 2. *Soit* $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ *une fonction analytique contractive pure et soit* $\Theta = \Theta_i \Theta_e$ *sa factorisation canonique. Pour tout couple de fonctions analytiques bornées* (A, A_0) *telles que* $A\Theta = \Theta A_0$, *il existe une fonction analytique bornée* $(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}, \Phi(\lambda))$ *qui jouit des propriétés*

$$A\Theta_i = \Theta_i \Phi \quad \text{et} \quad \Phi\Theta_e = \Theta_e A_0.$$

En effet nous n'avons qu'à remarquer que le sous-espace invariant correspondant à la factorisation canonique est hyperinvariant et que la démonstration de la proposition 2 n'utilise pas l'hypothèse que $\Theta_e(e^{it})$ est injectif.

En tenant compte de la remarque précédente on peut énoncer une propriété analogue pour la factorisation $*$-canonique.

Pour les fonctions analytiques contractives $*$-extérieures $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ on a associé, dans la monographie $[H]$, à chaque ensemble borelien $\alpha \subset \mathbf{C} = \{\lambda: |\lambda| = 1\}$ une factorisation régulière $\Theta = \Theta_{2\alpha}\Theta_{1\alpha}$ telle que:

(1) $\Theta_{1\alpha}^*(e^{it})\Theta_{1\alpha}(e^{it}) = I$ pour presque tout $t \in \alpha$;

(2) $\Theta_{2\alpha}^*(e^{it})\Theta_{2\alpha}(e^{it}) = I$ pour presque tout $t \in \alpha' = \mathbf{C} \setminus \alpha$;

(3) le sous-espace H_1 correspondant à cette factorisation est hyperinvariant pour T et de plus $T|H_1 \in C_{11}$.

Dans la suite nous allons démontrer que de cette manière on obtient tous les sous-espaces H' hyperinvariants pour T tels que $T|H' \in C_{11}$. Plus exactement on démontrera:

Proposition 3. *Soit* $\Theta = \Theta_2\Theta_1$ *une factorisation régulière de la fonction analytique contractive pure* $*$*-extérieure* $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ *et soit* H_1 *le sous-espace invariant correspondant à cette factorisation. Pour que* H_1 *soit hyperinvariant pour* T *et tel que* $T|H_1 \in C_{11}$, *il faut et il suffit qu'il existe un ensemble borelien* $\alpha \subset \mathbf{C} = \{\lambda: |\lambda| = 1\}$ *tel que*

$$\Theta_1^*(e^{it}) \cdot \Theta_1(e^{it}) = I \quad \textit{pour presque tout} \quad t \in \alpha,$$

$$\Theta_2^*(e^{it}) \cdot \Theta_2(e^{it}) = I \quad \textit{pour presque tout} \quad t \in \alpha' = \mathbf{C} \setminus \alpha.$$

Démonstration. Vu que la suffisance est démontrée dans la monographie [H] ch. VII, th. 5.2, il nous reste seulement à vérifier la nécessité. Pour cela nous remarquons qu'on désignant $\alpha = \{t \in \mathbf{C}: \Delta_1(t) = O\}$ on a d'après (i) $\Delta_2(t) = O$ pour presque tout $t \in \mathbf{C} \setminus \alpha$. Donc pour presque tout $t \in \alpha$ on a $\Theta_1^*(e^{it})\Theta_1(e^{it}) = I$ et de même, pour presque tout $t \in \alpha' = \mathbf{C} \setminus \alpha$ on a $\Theta_2^*(e^{it})\Theta_2(e^{it}) = I$. C. q. f. d.

Bibliographie

[H] BÉLA SZ.-NAGY—CIPRIAN FOIAȘ, *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space*, North Holland/Akadémiai Kiadó (Amsterdam/Budapest, 1970).

[1] BÉLA SZ.-NAGY—CIPRIAN FOIAȘ, On the structure of intertwining operators, *Acta Sci. Math.*, 35 (1973), 224—245.

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE BRAȘOV
2200 BRAȘOV, ROUMANIE