Acta Sci. Math., 42 (1980), 99—107

Kanonische Zahlensysteme in der Theorie der quadratischen algebraischen Zahlen

I. KÁTAI und B. KOVÁCS

1. Bekanntlich kann jede nichtnegative ganze Zahl in jeder der beiden Formen

$$N = a_0 + a_1 A + \ldots + a_n A^n \quad \text{und} \quad N = a_0 + a_1(-A) + \ldots + a_n(-A^n)$$

eindeutig aufgeschrieben werden, wobei $a_j \in \{0, 1, \ldots, A-1\}$ $(j=0, 1, \ldots, n)$ und $A \geqq 2$ ganze Zahlen sind.

I. KÁTAI und J. SZABÓ [1] untersuchten das folgende Problem: Es seien α eine ganze Gaußsche Zahl, $N(\alpha)$ ihre Norm und $\mathcal{N}_0 = \{0, 1, \ldots, |N(\alpha)|-1\}$. Unter welchen Bedingungen kann man die Gaußsche Zahl γ eindeutig in der Form

$$\gamma = a_0 + a_1 \alpha + \ldots + a_n \alpha^n \quad \text{mit} \quad a_j \in \mathcal{N}_0 \quad (j = 0, \ldots, n) \tag{1.1}$$

aufschreiben? Sie haben bewiesen, daß dies für α dann und nur dann gilt, wenn $\alpha = -A \pm i$ ist, wobei A eine positive ganze Zahl bedeutet. Sie haben noch gezeigt, daß in diesem Falle jede komplexe Zahl z in der Form

$$z = \sum_{j=k}^{-\infty} a_j \alpha^j \quad \text{mit} \quad a_j \in \mathcal{N}_0 \tag{1.2}$$

aufgeschrieben werden kann.

Es sei jetzt $N > 0$ eine quadratfreie rationale ganze Zahl. Es ist bekannt, daß jeder reelle quadratische algebraische Zahlenkörper die Form $R(\sqrt{N})$ hat. Im Weiteren bezeichnen wir die ganzen Zahlen von $R(\sqrt{N})$ mit $\alpha, \beta, \ldots$, die rationalen ganzen Zahlen mit $A, B, C, \ldots$. Das Paar $\{\alpha, \mathcal{N}_0\}$ wird ein *Zahlensystem* in $R(\sqrt{N})$ genannt, wenn jede algebraische ganze Zahl $\gamma \in R(\sqrt{N})$ eindeutig in der Form (1.1) aufgeschrieben werden kann.

Wir bewiesen die folgenden Sätze.

Eingegangen am 5. Mai 1978.

Satz 1. *$\{\alpha, \mathcal{N}_0\}$ ist dann und nur dann ein Zahlensystem in $R(\sqrt{N})$, wenn*

1) $\alpha = A \pm \sqrt{N}$ *und* $0 < -2A \leqq A^2 - N \geqq 2$, *für* $N \not\equiv 1 \pmod 4$,

2) $\alpha = \frac{1}{2}(B \pm \sqrt{N})$ *und* $0 < -B \leqq \frac{1}{4}(B^2 - N) \geqq 2$, *für* $N \equiv 1 \pmod 4$,

wobei B eine ungerade ganze Zahl ist.

Satz 2. *Es sei $\{\alpha_0, \mathcal{N}_0\}$ ein Zahlensystem in irgendeinem reellen quadratischen Zahlenkörper. Dann kann jede reelle Zahl x auf mindestens eine Weise in der Form (1.2) aufgeschrieben werden.*

2. Einige Bemerkungen und Hilfssätze. Es ist bekannt, daß für den Diskriminanten D von $R(\sqrt{N})$ gilt:

1) $D = 4N$ falls $N \not\equiv 1 \pmod 4$,

2) $D = N$ falls $N \equiv 1 \pmod 4$.

Ist $\alpha = A + B\sqrt{N} \in R(\sqrt{N})$ eine quadratische algebraische ganze Zahl, dann folgt aus der Berechnung des Diskriminanten der Basis $\{1, \alpha\}$, daß $\{1, \alpha\}$ genau dann eine ganze Basis von $R(\sqrt{N})$ ist, wenn, im Falle $N \not\equiv 1 \pmod 4$ $\alpha = A \pm \sqrt{N}$ mit einer beliebigen rationalen ganzen Zahl A, und im Falle $N \equiv 1 \pmod 4$, $\alpha = 1/2(B \pm \sqrt{N})$ mit einer ungerader ganzer Zahl B ist. Diese Zahlen α sind die Wurzel den folgenden quadratischen Gleichungen mit rationalen ganzen Koeffizienten:

$$x^2 - 2Ax + (A^2 - N), \quad \text{bzw.} \quad x^2 - Bx + \frac{1}{4}(B^2 - N).$$

Ist $\{\alpha, \mathcal{N}_0\}$ ein Zahlensystem in $R(\sqrt{N})$, dann ist $|N(\alpha)| > 1$, und α eine quadratische ganze Zahl, weiterhin ist $\{1, \alpha\}$ eine Basis in $R(\sqrt{N})$.

Lemma 1. *Es sei $\{\alpha, \mathcal{N}_0\}$ ein Zahlensystem in $R(\sqrt{N})$. Dann ist $\{1, \alpha\}$ eine ganze Basis von $R(\sqrt{N})$.*

Beweis. Es genügt zu beweisen: Ist $\gamma \in R(\sqrt{N})$ eine ganze Zahl, dann gilt $\gamma = X_\gamma + Y_\gamma \alpha$, wobei X_γ, Y_γ rationale ganze Zahlen sind. Es sei α eine Wurzel der Gleichung mit rationalen ganzen Koeffizienten $x^2 + Cx + D = 0$. Dann gilt für jede natürliche Zahl $s \geqq 2$:

(2.1) $$\alpha^s = X_s + Y_s \alpha$$

mit einem rationalen ganzen Zahlenpaar X_s, Y_s. Da $\{\alpha, \mathcal{N}_0\}$ ein Zahlensystem in $R(\sqrt{N})$ ist, hat jede ganze Zahl $\gamma \in R(\sqrt{N})$ die form (1.1). Durch Einsetzen von (2.1) ergibt sich, daß $\gamma = X_\gamma + Y_\gamma \alpha$ ist, wobei X_γ, Y_γ rationale ganze Zahlen sind.

Lemma 2. *Ist α eine nichtnegative ganze Zahl in $R(\sqrt{N})$, dann ist $\{\alpha, \mathcal{N}_0\}$ kein Zahlensystem in $R(\sqrt{N})$.*

Beweis. Es sei γ eine negative ganze Zahl in $R(\sqrt{N})$. Wir nehmen an, daß $\{\alpha, \mathcal{N}_0\}$ ein Zahlensystem in $R(\sqrt{N})$ ist. Dann kommen wir wegen $a_i \in \mathcal{N}_0$ $(i=0, 1, \dots, n)$ und $\alpha \geqq 0$ zu einem Widerspruch:

$$0 > \gamma = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha^i \leqq 0.$$

Lemma 3. *Ist $\alpha \in R(\sqrt{N})$ eine algebraische ganze Zahl mit $|\alpha| < 1$, dann ist $\{\alpha, \mathcal{N}_0\}$ kein Zahlensystem in $R(\sqrt{N})$.*

Beweis. Wir nehmen an, daß $\{\alpha, \mathcal{N}_0\}$ ein Zahlensystem in $R(\sqrt{N})$ ist. Wegen Lemma 2 genügt es die Behauptung nur im Falle $-1 < \alpha < 0$ zu beweisen. Es sei $\gamma \in R(\sqrt{N})$ eine algebraische ganze Zahl mit

$$\gamma \geqq \frac{|N(\alpha)| - 1}{1 - \alpha^2}. \tag{2.2}$$

Auf Grund von $\gamma = \sum_{i=0}^{2n} a_i \alpha^i$; $a_i \in \mathcal{N}_0$ ist aber

$$\begin{aligned} \gamma &= (a_0 + a_2\alpha^2 + \dots + a_{2n}\alpha^{2n}) + (a_1\alpha + a_3\alpha^3 + \dots + a_{2n-1}\alpha^{2n-1}) \leqq \\ &\leqq a_0 + a_2\alpha^2 + \dots + a_{2n}\alpha^{2n} \leqq (|N(\alpha)| - 1)(1 + \alpha^2 + \dots + \alpha^{2n}) \leqq \\ &\leqq (|N(\alpha)| - 1)/(1 - \alpha^2), \end{aligned}$$

im Widerspruch mit (2.2).

Lemma 4. *Es sei $\alpha \in R(\sqrt{N})$ eine Wurzel der Gleichung $X^2 + Ux + V = 0$, wobei $U \geqq 0$ und $V \geqq 1$ rationale ganze Zahlen sind. Ist $\gamma = X + Y\alpha$ mit rationalen ganzen Zahlen X, Y, dann existieren solche nichtnegativen rationalen ganzen Zahlen C, D, E, F, mit welchen $\gamma = C + D\alpha + E\alpha^2 + F\alpha^3$ gilt.*

Beweis. Da $\alpha^2 + U\alpha + V = 0$ und $V \geqq 1$ ist, existieren rationale ganze Zahlen $L_0 \geqq 0$ und $L_1 \geqq 1$, für welche $L_0 V + X \geqq 0$ und $L_1 V + Y \geqq 0$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \gamma = X + Y\alpha &= L_0(\alpha^2 + U\alpha + V) + L_1(\alpha^3 + U\alpha^2 + V\alpha) + X + Y\alpha = \\ &= (X_0 + L_0 V) + (Y + L_1 V + L_0 U)\alpha + (L_1 U + L_0)\alpha^2 + L_1\alpha^3, \end{aligned}$$

wobei jeder Koeffizient eine nichtnegative rationale ganze Zahl ist.

Lemma 5. *Es sei $\alpha \in R(\sqrt{N})$ eine Wurzel der Gleichung $x^2 + Ux + V = 0$, wobei $0 < U \leqq V \geqq 2$, und U, V rationale ganze Zahlen sind, ferner sei $\{1, \alpha\}$ eine ganze Basis in $R(\sqrt{N})$. Dann ist $\{\alpha, \mathcal{N}_0\}$ ein Zahlensystem in $R(\sqrt{N})$.*

Beweis. Da $\{1, \alpha\}$ eine ganze Basis in $R(\sqrt{N})$ ist, kann jede algebraische ganze Zahl $\gamma \in R(\sqrt{N})$ mit rationalen ganzen Zahlen X, Y eindeutig in der Form $\gamma = X + Y\alpha$ aufgeschrieben werden. Wegen Lemma 4 gilt

$$\gamma = d_0 + d_1\alpha + \ldots + d_k\alpha^k, \quad k \geqq 3, \quad d_j \geqq 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, k), \tag{2.3}$$

wobei d_j rationale ganze Zahlen sind. Es sei $L(\gamma, d) = d_0 + d_1 + \ldots + d_k$, $L(\gamma, d)$ ist eine nichtnegative ganze Zahl. Wegen $V \geqq 2$ kann $d_0 = r_0 + tV$ geschrieben werden, wobei $t \geqq 0$ eine rationale ganze Zahl ist, $r_0 \in \mathcal{N}_0$, d. h., wegen $\alpha^2 + U\alpha + V = 0$,

$$d_0 = r_0 + tV = r_0 + t(-\alpha^2 U\alpha) = r_0 + t\{(V-U)\alpha + (U-1)\alpha^2 + \alpha^3\}.$$

Setzen wir das in (2.3) ein, so ergibt sich

$$\gamma = r_0 + \{d_1 + t(V-U)\}\alpha + \{d_2 + t(U-1)\}\alpha^2 + (d_3 + t)\alpha^3 + d_4\alpha^4 + \ldots + d_k\alpha^k =$$
$$= d_0^* + d_1^*\alpha + \ldots + d_k^*\alpha^k,$$

wobei $d_0^* \in \mathcal{N}_0$, d_i^* nichtnegative ganze Zahlen sind, ferner $L(\gamma, d^*) = L(\gamma, d)$ gilt. Es sei $\gamma_1 = d_1^* + d_2^*\alpha + \ldots + d_k^*\alpha^{k-1}$, dann ist $\gamma = r_0 + \alpha\gamma_1$, $L(\gamma_1, d^*) \leqq L(\gamma, d^*)$, und Gleichung besteht nur im Falle $r_0 = 0$. Setzen wir diesen Algorithmus fort, so bekommen wir

$$\gamma = r_0 + \alpha\gamma_1, \gamma_1 = r_1 + \alpha\gamma_2, \ldots, \gamma_n = r_n + \alpha\gamma_{n+1}, \quad \text{mit} \quad r_i \in \mathcal{N}_0 \ (i = 0, 1, \ldots) \tag{2.4}$$

und

$$L(\gamma, d) \geqq L(\gamma_1, d) \geqq \ldots \geqq L(\gamma_n, d) \geqq \ldots;$$

Gleichungen bestehen nur im Falle $r_i = 0$.

Da $L(\gamma, d) \geqq 0$ und $L(\gamma_i, d) \geqq 0$ ganze Zahlen sind, ist notwendigerweise $r_k = 0$ $(k \geqq M)$. Dann gilt aber wegen (2.4) für jede natürliche Zahl $s \geqq 1$, daß $\alpha^s | \gamma_M$, was auf Grund von $|N(\alpha)| = V \geqq 2$ nur dann möglich ist, wenn $\gamma_M = 0$ ist. Aus (2.4) bekommen wir die behauptete Darstellung

$$\gamma = r_0 + r_1\alpha + \ldots + r_{M-1}\alpha^{M-1}, \quad r_i \in \mathcal{N}_0.$$

Es soll noch gezeigt werden, daß diese Darstellung eindeutig ist. Dies folgt daraus, daß wenn $0 = s_0 + s_1\alpha + \ldots + s_k\alpha^k$ $(s_j \in \mathcal{N}_0)$, dann $\alpha | s_0$ und deshalb $s_0 = 0$, und aus ähnlichem Grund $s_1 = 0, s_2 = 0, \ldots, s_k = 0$ sind.

Lemma 6. *$\{\alpha, \mathcal{N}_0\}$ ist dann und nur dann ein Zahlensystem in $R(\sqrt{N})$, wenn $\{\bar{\alpha}, \mathcal{N}_0\}$ auch ein Zahlensystem ist.*

Beweis. Klar, denn die Darstellungen

$$\bar{\gamma} = \sum_{j=0}^{m} b_j\alpha^j \quad \text{und} \quad \gamma = \sum_{j=0}^{m} b_j(\bar{\alpha})^j \quad (b_j \in \mathcal{N}_0)$$

für $\gamma \in R(\sqrt{N})$ sich gegenseitig implizieren.

3. Beweis des ersten Satzes. Ist $\{\alpha, \mathcal{N}_0\}$ ein Zahlensystem in $R(\sqrt{N})$, so ist $\{1, \alpha\}$, auf Grund von Lemma 1, eine ganze Basis in $R(\sqrt{N})$. Im Falle $N\equiv 1 \pmod 4$ gilt also $\alpha=\frac{1}{2}(B\pm\sqrt{N})$ und $\alpha^2-B\alpha+\frac{1}{4}(B^2-N)=0$, wobei B eine ungerade ganze Zahl ist. Im Falle $N\not\equiv 1 \pmod 4$ aber ist $\alpha=A\pm\sqrt{N}$ und $\alpha^2-2A\alpha+(A^2-N)=0$, wobei A eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Auf Grund von Lemma 6 genügt es die algebraischen ganzen Zahlen $\alpha=\frac{1}{2}(B+\sqrt{N})$, bzw. $\alpha=A+\sqrt{N}$ nur im Falle $N\equiv 1 \pmod 4$, bzw., im Falle $N\not\equiv 1 \pmod 4$ zu untersuchen. Nach Lemma 2 ist $B<-\sqrt{N}$, $-B\geqq 3$ und $A<-\sqrt{N}$, $-A\geqq 2$.

Es sei zuerst $N\not\equiv 1 \pmod 4$. Da $\mathcal{N}_0$ mindestens zwei Elemente hat, ist

$$|N(\alpha)| = |A^2-N| = A^2-N \geqq 2. \tag{3.1}$$

Da $A<-\sqrt{N}$, ist (3.1) im Falle $A\leqq-\sqrt{N+2}$ erfüllt. Wenn außerdem noch $1\leqq -2A\leqq A^2-N$ gilt, so ist — auf Grund von Lemma 5 — $\{\alpha, \mathcal{N}_0\}$ ein Zahlensystem. Wegen $-A\geqq 2$ ist $-2A\leqq A^2-N$ im Falle $A>-\sqrt{N+1}-1$ nicht erfüllt. Wir brauchen darum nur die α zu untersuchen, für welche $-\sqrt{N+1}-1<A<$ $<-\sqrt{N+2}$ ist. Auf Grund von Lemma 3 im Falle $|A+\sqrt{N}|<1$ wegen $A<-\sqrt{N}$ ist $-A-\sqrt{N}<1$, d. h. $\{\alpha, \mathcal{N}_0\}$ ist kein Zahlensystem in $R(\sqrt{N})$. Da $-\sqrt{N}-1$ keine ganze Zahl ist, genügt es die ganzen Zahlen A zu untersuchen, die die folgende Bedingung erfüllen:

$$-\sqrt{N+1}-1 < A < -\sqrt{N}-1. \tag{3.2}$$

Der Bedingung (3.2) genügt aber keine ganze Zahl A, da aus (3.2) $N<(-A+1)^2<$ $<N+1$ folgt.

Zusammengefaßt: $\alpha=A\pm\sqrt{N}$ ist dann und nur dann ein Zahlensystem in $R(\sqrt{N})$ im Falle $N\not\equiv 1 \pmod 4$, wenn $A\leqq-\sqrt{N+1}-1$, oder — was damit äquivalent ist — wenn $1\leqq-2A\leqq A^2-N\geqq 2$ ist, wobei A eine rationale ganze Zahl ist.

Es sei jetzt $N\equiv 1 \pmod 4$. Da $\mathcal{N}_0$ mindestens zwei Elemente hat, so ist

$$|N(\alpha)| = \left|\frac{1}{4}(B^2-N)\right| = \frac{1}{4}(B^2-N) \geqq 2. \tag{3.3}$$

Da $B<-\sqrt{N}$ ist, wird (3.3) dann erfüllt, wenn $B\leqq-\sqrt{N+8}$ gilt. Wenn außerdem auch $1\leqq -B\leqq\frac{1}{4}(B^2-N)$ gilt, so ist $\{\alpha, \mathcal{N}_0\}$ nach Lemma 5 ein Zahlensystem. Da $-B\geqq 3$ ist, wird $-B\leqq\frac{1}{4}(B^2-N)$ dann nicht erfüllt, wenn $B>-\sqrt{N+4}-2$

ist. Deshalb genügt es nur die α zu untersuchen, für welche

$$-\sqrt{N+4}-2 < B \leqq -\sqrt{N+8}$$

gilt. Auf Grund von Lemma 3 im Falle $\left|\frac{1}{2}(B+\sqrt{N})\right|<1$ wegen $B<-\sqrt{N}$ gilt $-B-\sqrt{N}<2$, d. h. es ist $B>-\sqrt{N}-2$ und so ist $\{\alpha, \mathcal{N}_0\}$ kein Zahlensystem in $R(\sqrt{N})$. Da $-\sqrt{N}-2$ keine ganze Zahl sein kann, genügt es die ganzen Zahlen B zu untersuchen, die die Bedingung

$$-\sqrt{N+4}-2 < B < -\sqrt{N}-2 \tag{3.4}$$

erfüllen. Genügt B (3.4), so gilt $(-B-2)^2=N+1$, oder $(-B-2)^2=N+2$, oder $(-B-2)^2=N+3$. Da B und N ungerade ganze Zahlen sind, so gilt $(-B-2)^2\neq N+1$, und $(-B-2)^2\neq N+3$. Da $N\equiv 1 \pmod 4$ und B ungerade ist, deshalb gilt $N+2\equiv -1 \pmod 4$, und $(-B-2)^2\equiv 1 \pmod 4$, daraus folgt $(-B-2)^2\neq N+2$.

Zusammengefaßt: $\alpha=\frac{1}{2}(B\pm\sqrt{N})$ ist dann und nur dann ein Zahlensystem in $R(\sqrt{N})$ im Falle $N\equiv 1 \pmod 4$, wenn $B\leqq -\sqrt{N+4}-2$, oder — was damit äquivalent ist — wenn $1\leqq -B\leqq \frac{1}{4}(B^2-N)\geqq 2$ ist, wobei B eine ungerade ganze Zahl bedeutet.

4. Beweis des zweiten Satzes. Zum Beweis des zweiten Satzes wird eine Ungleichung benutzt.

Lemma 7. *Es sei* $N\not\equiv 1 \pmod 4$, *und* $\{\alpha, \mathcal{N}_0\}$ *ein Zahlensystem in* $R(\sqrt{N})$. *Dann ist* $|A^2-N-1|\geqq|\alpha|$, *wobei* $\alpha=A\pm\sqrt{N}$.

Beweis. Wir nehmen an, daß $|A^2-N-1|<|\alpha|$ ist. Wegen $\alpha=A\pm\sqrt{N}$ gilt

$$-1<\frac{(A+\sqrt{N})(A-\sqrt{N})}{A\pm\sqrt{N}}-\frac{1}{A\pm\sqrt{N}}<1.$$

Im Fall $\alpha=A+\sqrt{N}$ müßte

$$-1<A-\sqrt{N}-\frac{1}{A+\sqrt{N}}<1$$

gelten. Das ist aber wegen den Bedingungen $N\geqq 2$, $A<-\sqrt{N}$ und $|A+\sqrt{N}|>1$ unmöglich

Wenn aber $\alpha=A-\sqrt{N}$ ist, dann müßte

$$-1<A+\sqrt{N}-\frac{1}{A-\sqrt{N}}<1 \tag{4.1}$$

gelten. Wir zeigen aber, daß (4.1) unmöglich ist. Bei festgelegtem $N \geqq 2$ ist die Funktion $y = x + \sqrt{N} - (x - \sqrt{N})^{-1}$ im Intervall $(-\infty, 0)$ monoton wachsend und in diesem Intervall ist $y = -1$ nur für

$$x = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{1 + 4(N + \sqrt{N} + 1)}\right). \tag{4.2}$$

So ist (4.1) nicht erfüllt, wenn

$$A \leqq \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{1 + 4(N + \sqrt{N} + 1)}\right). \tag{4.3}$$

Da $\{\alpha, \mathcal{N}_0\}$ in $R(\sqrt{N})$ ein Zahlensystem ist, gilt $A \leqq -\sqrt{N+1} - 1$. Eine einfache Rechnung ergibt

$$-\sqrt{N+1} - 1 < \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{1 + 4(N + \sqrt{N} + 1)}\right).$$

Das bedeutet — wegen (4.3), (4.2) und weil die Funktion $y = x + \sqrt{N} - (X - \sqrt{N})^{-1}$ im Intervall $(-\infty, 0)$ monoton wachsend ist —, da (4.1) nicht erfüllt ist. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Bemerkung. Wegen $|\alpha| > 1$ folgt aus diesem Lemma, daß $A^2 - N \geqq 3$.

Lemma 8. *Es sei* $N \equiv 1 \pmod 4$, *und sei* $\{\alpha, \mathcal{N}_0\}$ *ein Zahlensystem in* $R(\sqrt{N})$. *Dann ist* $\left|\frac{1}{4}(B^2 - N) - 1\right| \geqq |\alpha|$, *wobei* $\alpha = \frac{1}{2}(B \pm \sqrt{N})$.

Beweis. Wir nehmen an, daß $\left|\frac{1}{4}(B^2 - N) - 1\right| < |\alpha|$ gilt. Wegen $\alpha = \frac{1}{2}(B \pm \sqrt{N})$ ist:

$$-1 < \frac{\frac{1}{2}(B + \sqrt{N}) \cdot \frac{1}{2}(B - \sqrt{N})}{\frac{1}{2}(B \pm \sqrt{N})} - \frac{1}{\frac{1}{2}(B \pm \sqrt{N})} < 1.$$

Ist $\alpha = \frac{1}{2}(B + \sqrt{N})$, so gilt $-1 < \frac{1}{2}(B - \sqrt{N}) - 2(B + \sqrt{N})^{-1} < 1$. Das ist aber wegen den Bedingungen $N \geqq 5$, $B < -\sqrt{N}$ und $|\alpha| > 1$ unmöglich. Ist aber $\alpha = \frac{1}{2}(B - \sqrt{N})$, so muß gelten:

$$-1 < \frac{1}{2}(B + \sqrt{N}) - \frac{2}{B - \sqrt{N}} < 1. \tag{4.4}$$

Wir zeigen, daß auch (4.4) unmöglich ist. Bei festgelegtem $N\geqq 5$ ist die Funktion $y=x+\frac{1}{2}\sqrt{N}-\left(x-\frac{1}{2}\sqrt{N}\right)^{-1}$ im Intervall $(-\infty, 0)$ monoton wachsend und in diesem Intervall ist $y=-1$ nur für

$$x=\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5+N+2\sqrt{N}}\right). \tag{4.5}$$

Deshalb, im Falle

$$B\leqq -1-\sqrt{5+N+2\sqrt{N}} \tag{4.6}$$

kann (4.4) nicht gelten. Da $\{\alpha, \mathcal{N}_0\}$ ein Zahlensystem in $R(\sqrt{N})$ ist, deshalb gilt $B\leqq -\sqrt{N+4}-2$. Durch eine einfache Rechnung ergibt sich

$$-\sqrt{N+4}-2<-1-\sqrt{5+N+2\sqrt{N}}.$$

Auf Grund von (4.6), (4.5) und da die Funktion $y=x+\frac{1}{2}\sqrt{N}-\left(x-\frac{1}{2}\sqrt{N}\right)^{-1}$ im Intervall $(-\infty, 0)$ monoton wachsend ist, kann (4.4) nicht erfüllt sein. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Bemerkung. Wegen $|\alpha|>1$, auf Grund von diesem Lemma gilt $\frac{1}{4}(B^2-N)\geqq 3$.

Jetzt sind wir imstande Satz 2 zu beweisen.

Es sei $\{\alpha, \mathcal{N}_0\}$ ein Zahlensystem in $R(\sqrt{N})$ und bezeichne C das größte Element von $\mathcal{N}_0$. Nach Lemma 7 und 8 ist $|C|\geqq|\alpha|$ und $C\geqq 2$. Daraus folgt für eine beliebige natürliche Zahl $n\geqq 1$:

$$C\left|\frac{1}{\alpha^n}\right|\geqq\left|\frac{1}{\alpha^{n-1}}\right|. \tag{4.7}$$

Da N quadratfrei und A, B ganze Zahlen sind, sind $A\pm\sqrt{N}$ und $\frac{1}{2}(B\pm\sqrt{N})$ irrationale Zahlen. Deshalb bilden die ganzzahligen Vielfachen von α mod 1 eine überall dichte Menge in $[0, 1]$. Daraus folgt, daß die reellen Zahlen der Form $X+Y\alpha$ (X, Y sind ganze Zahlen) — die ganzen Zahlen von $R(\sqrt{N})$ — im Intervall $(-\infty, \infty)$ überall dicht sind.

Es sei X eine beliebige reelle Zahl. Wir zeigen, daß X in der Form (1.2) geschrieben werden kann. Es sei $\beta\in R(\sqrt{N})$ eine ganze Zahl, für welche $\beta\in(x, x+1)$. Es existiert wegen (4.7) ein $r_1\in\mathcal{N}_0$ mit

$$\beta_1=\beta+\frac{r_{-1}}{\alpha}<x\leqq\beta+\frac{r_{-1}-1}{\alpha}$$

(weil $\alpha<0$ ist). Durch wiederholte Anwendung von (4.7) erhalten wir, daß es ein $r_{-2}\in\mathcal{N}_0$ existiert, mit

$$\beta_1+\frac{r_{-2}-1}{\alpha^2}\leqq x<\beta_1+\frac{r_{-2}}{\alpha^2}=\beta_2$$

(weil $\alpha^2>0$), ferner, wegen (4.7) existiert auch ein $r_{-3}\in\mathcal{N}_0$ mit

$$\beta_3=\beta_2+\frac{r_{-3}}{\alpha^3}<x\leqq\beta_2+\frac{r_{-2}-1}{\alpha^3}.$$

Setzen wir diesen Algorithmus fort, so erhalten wir eine Folge β_n $(n=1, 2, \ldots)$ für die man nach dem ersten Satz hat:

a) $r_{-n}\in\mathcal{N}_0$ $(n=1, 2, \ldots)$,
b) $\lim\beta_n=x$ (wegen $|\alpha|>1$ und $\beta_{2k+1}<x<\beta_{2k}$ $(k=0, 1, \ldots)$),
c) $\beta=r_l\alpha^l+\ldots+r_1\alpha+r_0$ mit $r_i\in\mathcal{N}_0$ $(i=0, 1, \ldots, l)$.

So ist $\beta_n=\sum_{i=l}^{-n} r_i\alpha^i$ und deshalb $x=\sum_{i=l}^{-\infty} r_i\alpha^i$ mit $r_i\in\mathcal{N}_0$. Offensichtlich ist die Wahl von β nicht eindeutig, da die ganzen Zahlen von $R(\sqrt{N})$ auf der Zahlengerade überall dicht liegen: so ist die Form (1.2) von x auch nicht eindeutig. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] I. Kátai and J. Szabó, Canonical number systems for complex integers, *Acta Sci. Math.*, **37** (1975), 255—260.

[2] D. E. Knuth, *The art of computer programming*. 2, Addison-Wesley Publishing Company (London, 1971).

(I.K.)
EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITY
DEPARTMENT OF NUMERICAL ANALYSIS AND COMPUTER SCIENCE
MÚZEUM KRT. 6—8
1088 BUDAPEST, HUNGARY

(B.K.)
KOSSUTH LAJOS UNIVERSITY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
EGYETEM TÉR 1
4032 DEBRECEN, HUNGARY