Acta Sci. Math., 42 (1980), 175—182

Über einen Satz von Alexits und Sharma

KÁROLY TANDORI

1. Es sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X)<\infty$. Für ein System $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ von Funktionen in $L(X)$ betrachten wir die Lebesgueschen Funktionen

$$L_n(\varphi;\, x) = \int\limits_X \left|\sum_{k=1}^n \varphi_k(x)\,\varphi_k(t)\right| d\mu(t) \quad (x\in X;\; n=1,2,\ldots).$$

Es sei weiterhin $\lambda=\{\lambda_k\}_1^\infty$ eine monoton nichtabnehmende Folge von positiven Zahlen; im folgenden werden wir auch $\lambda_k\to\infty$ $(k\to\infty)$ voraussetzen.

G. ALEXITS und A. SHARMA [1] haben im Fall

$$L_n(\varphi;x) = O(\lambda_n) \quad (x\in X;\; n=1,2,\ldots) \tag{1}$$

den Folgenden Satz bewiesen: Genügt eine Folge $\{a_k\}_1^\infty$ von reellen Zahlen der Bedingung

$$\sum_{k=1}^\infty a_k^2\lambda_k < \infty, \tag{2}$$

weiterhin besteht

$$\int\limits_X \left|\sum_{k=1}^n a_k b_k \varphi_k(x)\right| d\mu(x) = O(1) \quad (n=1,2,\ldots),$$

für jede Folge $\{b_k\}_1^\infty$ mit $\sum_{k=1}^\infty a_k^2 b_k^2<\infty$, dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^\infty a_k\varphi_k(x) \tag{3}$$

in X fast überall.

Eingegangen am 10. April 1979.

Man kann zeigen (s. z. B. [2]), daß im Falle (1) die Bedingung (2) *allein* für die Konvergenz fast überall der Reihe (3) nicht hinreichend ist. Es ist natürlich zu befragen, welche Bedingung für a im Falle (1) die Konvergenz fast überall der Reihe (3) sichert. In dieser Note werden wir auf diese Frage eine genaue Antwort geben.

2. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\lambda_1 \geqq 1$ voraussetzen. Für jede positive ganze Zahl l bezeichne $Z(l)$ die Menge der positiven ganzen Zahlen k, mit $2^l < \lambda_k \leqq 2^{l+1}$. Es seien $l_1 < \ldots < l_i < \ldots$ diejenigen Indizes, für die $Z(l_i) \neq \emptyset$ ist; die Elemente von $Z(l)$ seien in der natürlichen Anordnung $\nu(i)+1, \ldots, \nu(i+1)$. Für eine Folge a setzen wir

$$A_i^2 = \sum_{k=\nu(i)+1}^{\nu(i+1)} a_k^2 \lambda_k \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Satz I. *Ist* (1) *erfüllt, und gilt für die Folge a*

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i < \infty,$$

so konvergiert die Reihe (3) *fast überall in X.*

Beweis. Wir wenden die Methode von Alexits und Sharma an. Die n-te Partialsumme der Reihe (3) bezeichnen wir mit $s_n(x)$. Für eine positive ganze Zahl i setzen wir

$$\delta_i(x) = \max_{\nu(i) < n \leqq \nu(i+1)} |s_n(x) - s_{\nu(i)}(x)|,$$

$$E_i^+ = \left\{x \in X\colon \max_{\nu(i) < n \leqq \nu(i+1)} (s_n(x) - s_{\nu(i)}(x))\right\},$$

$$E_i^- = \left\{x \in X\colon \max_{\nu(i) < n \leqq \nu(i+1)} (-(s_n(x) - s_{\nu(i)}(x)))\right\};$$

$n(x)$ bezeichne die kleinste positive ganze Zahl $(\nu(i) < n(x) \leqq \nu(i+1))$, für die

$$s_{n(x)}x - s_{\nu(i)}(x) = \max_{\nu(i) < n \leqq \nu(i+1)} (s_n(x) - s_{\nu(i)}(x)) \quad (x \in E_i^+)$$

ist. Dann gibt mit dem Rademacherschen System $\{r_k(t)\}_1^\infty$

$$\int_{E_i^+} \max_{\nu(i) < n \leqq \nu(i+1)} (s_n(x) - s_{\nu(i)}(x))\, d\mu(x) = \int_0^1 \left(\sum_{k=\nu(i)+1}^{\nu(i+1)} a_k \sqrt{\lambda_k}\, r_k(t)\right) \left(\sum_{p=\nu(i)+1}^{m(x)} \frac{r_p(t) \varphi_p(x)}{\sqrt{\lambda_p}}\right) dt$$
$$(x \in E_i^+).$$

Durch Anwendung der Bunjakowski—Schwarzschen Ungleichung und des Fubinischen Satzes ergibt sich:

$$\int_{E_i^+} \Big(\max_{\nu(i)<n\leqq\nu(i+1)} (s_n(x)-s_{\nu(i)}(x)\Big)\,d\mu(x) = \tag{5}$$

$$= \int_0^1 \left\{\left(\sum_{k=\nu(i)+1}^{\nu(i+1)} a_k\sqrt{\lambda_k}\, r_k(t)\right) \int_{E_i^+} \left(\sum_{p=\nu(i)+1}^{n(x)} \frac{r_p(t)\varphi_p(x)}{\sqrt{\lambda_p}}\right) d\mu(x)\right\} dt \leqq$$

$$\leqq A_i \left\{\int_0^1 \int_{E_i^+} \int_{E_i^+} \left(\sum_{p=\nu(i)+1}^{n(x)} \frac{r_p(t)\varphi_p(x)}{\sqrt{\lambda_p}}\right)\left(\sum_{q=\nu(i)+1}^{n(y)} \frac{r_q(t)\varphi_q(y)}{\sqrt{\lambda_q}}\right) d\mu(x)\,d\mu(y)\,dt\right\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq A_i \left\{\int_{E_i^+} \int_{E_i^+} \left|\sum_{p=\nu(i)+1}^{\min(n(x),\,n(y))} \frac{\varphi_p(x)\varphi_p(y)}{\lambda_p}\right| d\mu(x)\,d\mu(y)\right\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{2}A_i \left\{\int_X \left(\int_X \left|\sum_{k=\nu(i)+1}^{n(y)} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k}\right| d\mu(x)\right) d\mu(y)\right\}^{1/2}.$$

Auf Grund der Voraussetzung (1) gibt es eine positive Konstante K, für die $L_n(\varphi;\, x) \leqq K\lambda_n$ $(x\in X;\ n=1, 2, \ldots)$ erfüllt ist. Durch eine Abelsche Umformung bekommen wir

$$\sum_{k=\nu(i)+1}^{n(y)} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k} = \sum_{k=\nu(i)+1}^{n(y)-1} \left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_{k+1}}\right) \sum_{s=\nu(i)+1}^{k} \varphi_s(x)\varphi_s(y) + \frac{1}{\lambda_{n(y)}} \sum_{s=\nu(i)+1}^{n(y)} \varphi_s(x)\varphi_s(y),$$

woraus folgt

$$\int_X \left|\sum_{k=\nu(i)+1}^{n(y)} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k}\right| d\mu(x) \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=\nu(i)+1}^{n(y)-1} \left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_{k+1}}\right) \int_X \left|\sum_{s=\nu(i)+1}^{k} \varphi_s(x)\varphi_s(y)\right| d\mu(x) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_{n(y)}} \int_X \left|\sum_{s=\nu(i)+1}^{n(y)} \varphi_s(x)\varphi_s(y)\right| d\mu(x) \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=\nu(i)+1}^{n(y)-1} \left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_{k+1}}\right)\big(L_k(\varphi;\, y) + L_{\nu(i)}(\varphi;\, y)\big) + \frac{1}{\lambda_{n(y)}}\big(L_{n(y)}(\varphi;\, y) + L_{\nu(i)}(\varphi;\, y)\big) \leqq$$

$$\leqq 4K\lambda_{\nu(i+1)}/\lambda_{\nu(i)+1} \leqq 8K$$

für jedes $x\in X$, auf Grund der Definition der Folge $\{\nu(i)\}_1^\infty$. Daraus und aus (5) erhalten wir

$$\int_{E_i^+} \max_{\nu(i)<n\leqq\nu(i+1)} (s_n(x)-s_{\nu(i)}(x))\,d\mu(x) \leqq \sqrt{2}\,8K\mu(X)A_i. \tag{6}$$

Durch Anwendung dieser Ungleichung auf das System $\{-\varphi_k(x)\}_1^\infty$ ergibt sich

$$\int_{E_i^-} \max_{\nu(i)<n\leq\nu(i+1)} (-(s_n(x)-s_{\nu(i)}(x)))\, d\mu(x) \leq \sqrt{2}\, 8K\mu(X)A_i.$$

Daraus und aus (6) folgt

$$\int_X \delta_i(x)\, d\mu(x) \leq \sqrt{2}\, 16K\mu(X)A_i \quad (i=1,2,\ldots). \tag{7}$$

Endlich aus (4) bekommen wir, daß

$$\sum_{i=1}^\infty \delta_i(x) < \infty$$

in X fast überall besteht. Da auf Grund der Definition von $\delta_i(x)$ die Ungleichung $|s_{\nu(i+1)}(x)-s_{\nu(i)}(x)|\leq\delta_i(x)$ $(x\in X;\ i=1,2,\ldots)$ gilt, ergibt sich, daß

$$\sum_{i=1}^\infty |s_{\nu(i+1)}(x)-s_{\nu(i)}(x)| < \infty$$

in X fast überall besteht und so $\lim_{i\to\infty} s_{\nu(i)}(x)$ fast überall in X existiert. Im Falle $\nu(i)<n\leq\nu(i+1)$ gilt weiterhin $|s_n(x)-s_{\nu(i)}(x)|\leq\delta_i(x)\to 0$ $(i\to\infty)$ in X fast überall, und so konvergiert die Reihe (3) in X fast überall.

3. Wir zeigen, daß die Bedingung (4) genau ist.

Satz II. *Gilt*

$$\sum_{i=1}^\infty A_i = \infty, \tag{8}$$

so gibt es ein System $\Phi=\{\Phi_k(x)\}_1^\infty$ *von reellen Funktionen in* $L(0,1)$ *derart, daß*

$$L_n(\Phi;x) = \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^\infty \Phi_k(x)\Phi_k(t)\right| dt \leq 16\lambda_n \quad (x\in(0,1);\ n=1,2,\ldots)$$

besteht und die Reihe

$$\sum_{k=1}^\infty a_k\Phi_k(x) \tag{9}$$

in (0, 1) *überall divergiert.*

Beweis. Für jede positive ganze Zahl i seien $I_s(i)$ $(s=\nu(i)+1,\ldots,\nu(i+1))$ disjunkte Intervalle mit

$$\bigcup_{s=\nu(i)+1}^{\nu(i+1)} I_s(i) = (0,1), \operatorname{mes} I_s(i) = a_s^2 \Big/ \sum_{k=\nu(i)+1}^{\nu(i+1)} a_k^2 \quad \text{und} \quad I_s(i)=\emptyset, \quad \text{wenn} \quad a_s=0.$$

Für einen Index s mit $\nu(i)<s\leqq\nu(i+1)$ und $a_s\neq 0$ setzen wir

$$\Phi_s(x)=\begin{cases}A_i/a_s, & x\in I_s(i),\\ 0, & \text{sonst};\end{cases}$$

im Falle $a_s=0$ sei $\Phi_s(x)\equiv 0$.

Sei i_0 eine positive ganze Zahl und sei $x\in(0,1)$. Dann gibt es für jede positive ganze Zahl i $(1\leqq i\leqq i_0)$ einen Index $s(x;i)$ $\big(\nu(i)<s(x;i)\leqq\nu(i+1)\big)$ mit $x\in I_{s(x;i)}(i)$. Man hat dann

$$\sum_{k=1}^{\nu(i_0+1)} a_k\Phi_k(x)=\sum_{i=1}^{i_0} a_{s(x;i)}\Phi_{s(x;i)}(x).$$

Daraus, auf Grund der Definition der Funktionen $\Phi_k(x)$, folgt

$$\sum_{k=1}^{\nu(i_0)+1} a_k\Phi_k(x)=\sum_{i=1}^{i_0} A_i \quad (x\in(0,1);\; i_0=1,2,\ldots). \tag{10}$$

Aus (8) ergibt sich, daß die Reihe (9) in (0, 1) überall divergiert.

Es sei i eine positive ganze Zahl, $\nu(i)<n\leqq\nu(i+1)$ und $x\in(0,1)$. Dann gibt es einen Index $s(x;i)$ $\big(\nu(i)<s(x;i)\leqq\nu(i+1)\big)$ mit $x\in I_{s(x;i)}(i)$, und so gilt

$$\int_0^1\Big|\sum_{k=\nu(i)+1}^{n}\Phi_k(x)\Phi_k(t)\Big|\,dt\leqq\int_{I_{s(x;i)}(i)}|\Phi_{s(x;i)}(x)\Phi_{s(x;i)}(t)|\,dt=\frac{A_i^2}{a_{s(x;i)}^2}\operatorname{mes} I_{s(x;i)}(i).$$

Daraus folgt, auf Grund der Definition von A_i und $\nu(i)$,

$$\int_0^1\Big|\sum_{k=\nu(i)+1}^{n}\Phi_k(x)\Phi_k(t)\Big|\,dt\leqq 2\lambda_n \quad (x\in(0,1;\; \nu(i)<n\leqq\nu(i+1);\; i=1,2,\ldots). \tag{11}$$

Es sei n eine beliebige positive ganze Zahl. Dann gibt es einen Index i_0 mit $\nu(i_0)<$ $<n\leqq\nu(i_0+1)$, und gilt

$$L_n(\Phi;x)\leqq\sum_{i=1}^{i_0-1}\int_0^1\Big|\sum_{k=\nu(i)+1}^{\nu(i+1)}\Phi_k(x)\Phi_k(t)\Big|\,dt+\int_0^1\Big|\sum_{k=\nu(i_0)+1}^{n}\Phi_k(x)\Phi_k(t)\Big|\,dt\leqq$$

$$\leqq 2(\lambda_{\nu(2)}+\ldots+\lambda_{\nu(i_0+1)}+\lambda_n)\leqq 4(2^2+\ldots+2^{i_0+1})\leqq 16\cdot 2^{i_0}\leqq 16\lambda_{\nu(i_0)+1}\leqq 16\lambda_n$$

für jedes $x\in(0,1)$.

Damit haben wir Satz II bewiesen.

4. Für eine positive Konstante K bezeichne $\Omega(\lambda,K)$ die Klasse der Systeme $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ von reellen Funktionen in $L(0,1)$ für die

$$L_n(\varphi;x)=\int_0^1\Big|\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\varphi_k(t)\Big|\,dt\leqq K\lambda_n \quad (x\in(0,1);\; n=1,2,\ldots)$$

gilt, und sei $\Omega(\lambda)$ die Klasse der Systeme φ mit

$$L_n(\varphi;x)=O(\lambda_n) \quad (x\in(0,1);\; n=1,2,\ldots).$$

$M(\lambda)$ bezeichne die Klasse der Folgen a, für die die Reihe (3) bei jedem System $\varphi \in \Omega(\lambda)$ in (0, 1) fast überall konvergiert. Endlich wird für eine Folge a

$$\|a;\lambda\| = \sup_{\varphi \in \Omega(\lambda;1)} \int_0^1 \sup_n |s_n(x)|\,dx$$

gesetzt. In [3] haben wir bewiesen:

$a \in M(\lambda)$ gilt dann und nur dann, wenn $\|a;\lambda\| < \infty$.

Nach den vorigen Resultaten kann man $\|a;\lambda\|$ auswerten.

Satz III. *Für jede Folge a gilt*

$$C_1 \sum_{i=1}^{\infty} A_i \leqq \|a;\lambda\| \leqq C_2 \sum_{i=1}^{\infty} A_i$$

mit positiven Konstanten C_1, C_2.

Beweis. Da

$$\sup_n |s_n(x)| \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i(x)$$

ist, erhalten wir

$$\int_0^1 \sup_n |s_n(x)|\,dx \leqq \sqrt{2}\,16 \sum_{i=1}^{\infty} A_i$$

auf Grund von (7) für jedes System $\varphi \in \Omega(\lambda;1)$; woraus die zweite Ungleichung mit $C_2 = \sqrt{2}\,16$ folgt.

Weiterhin sei $\varphi_k(x) = \Phi_k(x)/4$ $(k=1,2,\ldots)$ mit den in § 3 definierten Funktionen $\Phi_k(x)$. Dann gilt $\varphi \in \Omega(\lambda;1)$ nach dem Satz II. Weiterhin bekommen wir aus (10)

$$\int_0^1 \sup_n |s_n(x)|\,dx \geqq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} A_i,$$

also besteht die erste Ungleichung mit $C_1 = 1/4$.

5. Bemerkungen. 1) G. Alexits und A. Sharma [1] haben Systeme $\varphi = \{\varphi_n(x)\}_1^{\infty}$ von Funktionen in $L(X)$ betrachtet, für die

$$L_n(\varphi;x) = O(1) \quad (x \in X;\ n = 1, 2, \ldots)$$

gilt, und haben Folgendes bewiesen: Ist die Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \tag{12}$$

endlich, so konvergiert die Reihe (3) in X fast überall.

Weiterhin haben wir in [4] Folgendes bewiesen: Ist die Summe (12) unendlich, so gibt es ein orthonormiertes System $\Phi=\{\Phi_k(x)\}_1^\infty$ im Grundintervall (0,1) mit

$$L_n(\Phi; x) = O(1) \quad (x\in(0, 1);\ n = 1, 2, \ldots)$$

derart, daß die Reihe (9) in (0, 1) fast überall divergiert.

Diese Sätze sind in den Sätzen I—II enthalten. Im Falle $\lambda_k=4$ $(k=1, 2, \ldots)$ ist nämlich die Konvergenz der Reihe (4) mit der Konvergenz der Reihe (12) äquivalent.

2) Im Falle $\lambda_k\to\infty$ $(k\to\infty)$ kann in Satz II das System Φ im allgemeinen nicht normiert gewählt werden. Ist nämlich $\sum_{k=1}^\infty |a_k|<\infty$, und gilt

$$\int_X \Phi_k^2(x)\, d\mu(x) = 1 \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

so konvergiert die Reihe (9) in X fast überall.

3) Es gilt auch der folgende Satz.

Satz IV. *Es sei* $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ *ein System von Funktionen in* $L(X)$ *mit* $L_n(\varphi; x)\leqq K\lambda_n (x\in X;\ n=1, 2, \ldots)$. *Dann gilt*

$$\int_X |\varphi_k(x)|\, d\mu(x) \leqq 2\sqrt{K\mu(X)\lambda_n} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Beweis. Für eine positive ganze Zahl n seien

$$E_n^+ = \{x\in X:\ \varphi_n(x) > 0\}, \quad E_n^- = \{x\in X:\ \varphi_n(x) < 0\}.$$

Da

$$\varphi_n(x) = \int_0^1 r_n(t)\left(\sum_{k=1}^n r_k(t)\varphi_k(x)\right) dt$$

gilt, hat man

$$\int_{E_n^+} \varphi_n(x)\, d\mu(x) = \int_0^1 r_n(t)\left(\int_{E_n^+}\left(\sum_{k=1}^n r_k(t)\varphi_k(x)\right) d\mu(x)\right) dt \leqq$$

$$\leqq \left\{\int_0^1 \int_{E_n^+}\int_{E_n^+}\left(\sum_{p=1}^n r_p(t)\varphi_p(x)\right)\left(\sum_{q=1}^n r_q(t)\varphi_q(y)\right) d\mu(x)\, d\mu(y) dt\right\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \left\{\int_X\left(\int_X\left|\sum_{k=1}^n \varphi_k(x)\varphi_k(y)\right| d\mu(x)\right) d\mu(y)\right\}^{1/2} \leqq \left\{\int_X L_n(\varphi;\ y)\, d\mu(y)\right\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{K\mu(X)\lambda_n}.$$

Durch Anwendung dieser Ungleichung auf das System $\{-\varphi_k(x)\}_1^\infty$ ergibt sich

$$\int_{E_n^-} (-\varphi_n(x))\, d\mu(x) \leqq \sqrt{K\mu(X)\lambda_n}.$$

Diese zwei Ungleichungen ergeben die Behauptung (13).

Schriftenverzeichnis

[1] G. Alexits, A. Sharma, The influence of Lebesgue functions on the convergence of function series, *Acta Sci. Math.*, 33 (1972), 1—10.

[2] K. Tandori, Weitere Bemerkungen über die Konvergenz und Summierbarkeit der Funktionenreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, **28** (1976), 119—127.

[3] K. Tandori, On the Lebesgue functions, *Fourier Analysis and Approximation Theory*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 19. (Budapest, 1976), 845—859.

[4] K. Tandori, Ergänzung zu einem Satz von S. Kaczmarz, *Acta Sci. Math.*, **28** (1967), 147—153.

BOLYAI INSTITUT
UNIVERSITÄT SZEGED
ARADI VÉRTANÚK TERE 1
6720 SZEGED, UNGARN