

Beitrag zur Theorie der starken Summierbarkeit mit einer Anwendung auf Orthonormalreihen

KURT ENDL

§ 1. Einleitung

1. Der Begriff der starken Summierbarkeit — ursprünglich eingeführt von HARDY und LITTLEWOOD im Zusammenhang mit Fourierreihen — findet sich in der Literatur in verschiedenen Formen. Wir legen hier die Definition nach BORWEIN zugrunde, der in einer grundlegenden Arbeit [2] insbesondere die starke Summierbarkeit mittels Hausdorff-Verfahren untersucht hatte.

Definition 1. Es sei $P=(p_{nv})$ eine positive Matrix ($p_{nv} \geq 0$), $Q=(q_{nv})$ eine beliebige Matrix und $k > 0$. Eine Folge $\{s_n\}_0^\infty$ heißt bezüglich P, Q stark limitierbar von der Ordnung k gegen s :

$$s_n \rightarrow s([P, Q]^k)$$

wenn die folgenden Reihen alle existieren und wenn gilt:

$$\sum_{v=0}^{\infty} p_{nv} \left| \sum_{\lambda=0}^{\infty} q_{v\lambda} s_\lambda - s \right|^k = o(1) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Wir werden uns hier besonders mit der $[C_\beta, C_\alpha]^k$ -Summierbarkeit ($\beta > 0, \alpha > -1$) beschäftigen, die in der Vergangenheit schon sehr oft untersucht wurde. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit seien etwa erwähnt: HARDY—LITTLEWOOD [3] ($\beta=1, \alpha=0, k=1, 2$), ZYGMUND [9] ($\beta=1, \alpha > -\frac{1}{2}, k=2$); ALEXITS [1] ($\beta=1, \alpha > -1, k=2$); $[C_1, C_{\alpha-1}]^2$ heißt dort die starke C_α -Summierbarkeit); SUNOUCHI [7] ($\beta > \frac{1}{2}, \alpha > -\frac{1}{2}, k=1$); LEINDLER [6] (allgemeine Parameter).

2. Aus der starken Summierbarkeit läßt sich auf gewöhnliche Summierbarkeit schließen. So gilt allgemein, wenn P regulär und $k \geq 1$ ist: $[P, Q]^k \Rightarrow Q$. (BOR-

WEIN [2], Theorem 3.) In unserem Fall gilt also $[C_\beta, C_\alpha]^k \Rightarrow C_\beta C_\alpha \sim C_{\beta+\alpha}$ ($k \geq 1$). Für $k > 1$ läßt sich sogar auf kleinere Ordnungen schließen.

Satz 1. Es sei $\beta > 0, k > 1$. Dann gilt

- (1) für $\alpha > -1 + \frac{1}{k}$: $[C_\beta, C_\alpha]^k \Rightarrow \begin{cases} C_{(\beta/k)+\alpha+\varepsilon} & (\varepsilon \geq 0) \\ \sigma_n^{(\beta/k)+\alpha} = o((\ln n)^{1-(1/k)}) \end{cases}$
- (2) für $\alpha = -1 + \frac{1}{k}$: $[C_\beta, C_\alpha]^k \Rightarrow \sigma_n^{(\beta/k)+\alpha+\varepsilon} = o((\ln n)^{1-(1/k)})$ ($\varepsilon \geq 0$).

Der erste Teil der Aussage (1) wurde in Spezialfällen bewiesen von ZYGMUND [9] ($\beta=1, k=2$), KUTTNER [5] ($\beta=1, \alpha=0, k>1$), HYSLOP [4] ($\beta=1, k>1$).

Bemerkung. Wählen wir für ein $k > 1$ $\beta = k - 1$, so ist $\frac{\beta}{k} = 1 - \frac{1}{k}$ d. h. für $\alpha = -1 + \frac{1}{k}$ ist $\frac{\beta}{k} + \alpha = 0$ und wir erhalten

$$[C_{k-1}, C_{-1+(1/k)}]^k \Rightarrow \sigma_n^0 = s_n = o((\ln n)^{1-(1/k)}).$$

Für $k=2$ liefert dies einen Satz von ZYGMUND [9]:

$$[C_1, C_{-1/2}]^2 s_n = o(\sqrt{\ln n}).$$

3. Während man, wie oben erwähnt, für $\beta > 0, k \geq 1$ aus der starken Summierbarkeit $[C_\beta, C_\alpha]^k$ immer auf die gewöhnliche Summierbarkeit $C_\beta C_\alpha$ schließen kann, ist das Umgekehrte nicht der Fall. So hat schon WINN [8] ein Beispiel einer Folge gegeben, die $C_1 C_\alpha$ -summierbar ist, aber nicht $[C_1, C_\alpha]^1$ -summierbar. Man benötigt, um von der gewöhnlichen Summierbarkeit auf starke Summierbarkeit schließen zu können, noch eine starke Tauberbedingung. Da diese Bedingung öfters vorkommt, ist es zweckmäßig, eine Abkürzung einzuführen.

Definition 2. Eine Reihe $\sum_0^\infty a_n$ genügt der Tauberbedingung $T([P, Q]^k)$ falls

$$na_n \rightarrow O([P, Q]^k).$$

HYSLOP [4] zeigte nun für $k \geq 1$:

$$\{C_1 C_\alpha, T([C_1, C_1 C_\alpha]^k)\} \Leftrightarrow [C_1, C_\alpha]^k.$$

Dieses Resultat wurde verallgemeinert von BORWEIN [2]. Er zeigte für eine beliebige Hausdorffmatrix H und $k \geq 1$

$$\{C_1 H, T([C_1, C_1 H]^k)\} \Leftrightarrow [C_1, H]^k.$$

Wir werden zeigen:

Satz 2. Es sei $0 < \beta \leq 1, \alpha > -1, k \geq 1$. Dann gilt

$$\{C_\beta C_\alpha, T([C_\beta, C_1 C_\alpha]^k)\} \Leftrightarrow [C_\beta, C_\alpha]^k.$$

Bemerkungen. 1) In der Richtung \Rightarrow läßt sich der Satz verschärfen. Es genügt, $C_1 C_\alpha$ vorauszusetzen.

2) Ist P regulär, so folgt für beliebige Matrizen Q und $k > 0$: $Q \Rightarrow [P, Q]^k$ (vgl. BORWEIN [2], Theorem 3). In unserem Fall lautet die Aussage: $C_\alpha \Rightarrow [C_\beta, C_\alpha]^k$. Mit der Verschärfung unseres letzten Satzes können wir zeigen, daß wir den Index α in der Folgerung erniedrigen können. Ersetzen wir nämlich dort α durch $\alpha - 1$, so lautet die Aussage

$$\{C_\alpha, T([C_\beta, C_\alpha]^k)\} \Leftrightarrow [C_\beta, C_{\alpha-1}]^k.$$

4. Als nächstes zeigen wir, daß Orthonormalreihen unter einer gewissen Koeffizientenbedingung eine starke Tauberbedingung erfüllen.

Satz 3. Es sei $0 < \beta \leq 1$ und $\sum c_n \varphi_n(x)$ eine beliebige Orthonormalreihe. Dann folgt aus

$$(1) \quad \sum_1^\infty n^{1-\beta} c_n^2 < \infty \quad \text{für} \quad \alpha > \frac{1}{2},$$

$$(2) \quad \sum_1^\infty n^{1-\beta} \ln n c_n^2 < \infty \quad \text{für} \quad \alpha = \frac{1}{2},$$

die Tauberbedingung $T([C_\beta, C_\alpha]^2)$ f. ü.

Aus den beiden vorangehenden Sätzen folgt schließlich aus Bemerkung 2 zu Satz 2 und Satz 3:

Satz 4. Es sei $0 < \beta \leq 1$ und $\sum c_n \varphi_n(x)$ eine beliebige Orthonormalreihe. Dann folgt aus der C_α -Summierbarkeit f. ü. und

$$(1) \quad \sum_1^\infty n^{1-\beta} c_n^2 < \infty \quad \text{für} \quad \alpha > \frac{1}{2}$$

$$(2) \quad \sum_1^\infty n^{1-\beta} \ln n c_n^2 < \infty \quad \text{für} \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

die $[C_\beta, C_{\alpha-1}]^2$ -Summierbarkeit f. ü.

§ 2. Beweis von Satz 1

Wir benutzen öfters, mit der üblichen Bezeichnung $A_v^\gamma = \binom{\nu+\gamma}{\nu}$, die Beziehung

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{A_\nu^\gamma}{n-\nu} \sim n^\gamma \ln n \quad (\gamma > -1). \quad \text{Ferner definieren wir wie üblich für eine Reihe} \quad \sum_{\nu=0}^\infty a_\nu$$

mit Partialsummenfolge $\{s_n\}_0^\infty$ die n -ten Cesàromittel der Ordnung α :

$$\sigma_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^\alpha a_\nu = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{\alpha-1} s_\nu = \frac{S_n^\alpha}{A_n^\alpha}.$$

1) Es genügt, den Satz unter der Annahme $\sum_0^\infty a_n = O([C_\beta, C_\alpha]^k)$ zu beweisen.

Ist nämlich $\sum_0^\infty a_n = s$ $([C_\beta, C_\alpha]^k)$, so folgt für die Reihe $\sum_0^\infty \bar{a}_n = (a_0 - s) + a_1 + \dots$

wegen $\bar{\sigma}_n^\alpha = \sigma_n^\alpha - s$: $\sum_0^\infty \bar{a}_n = o([C_\beta, C_\alpha]^k)$. Hieraus folgt dann $\bar{\sigma}_n^{(\beta/k)+\alpha+\varepsilon} \rightarrow 0$ bzw.

$\bar{\sigma}_n^{(\beta/k)+\alpha+\varepsilon} = o((\ln n)^{1-(1/k)})$ und damit $\sigma_n^{(\beta/k)+\alpha+\varepsilon} \rightarrow s$ bzw. $\sigma_n^{(\beta/k)+\alpha+\varepsilon} = o((\ln n)^{1-(1/k)})$.

2) Es sei also $\sum_0^\infty a_n = O([C_\beta, C_\alpha]^k)$, d. h. $\sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{\beta-1} |a_\nu|^\beta = o(n^\beta)$. Dann folgt mit der Hölder'schen Ungleichung für $\varepsilon \geq 0$:

$$\begin{aligned} |\sigma_n^{(\beta/k)+\alpha+\varepsilon}| &= \left| \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{(\beta/k)+\varepsilon-1} A_\nu^\alpha \sigma_\nu^\alpha \right| = \\ &= \left| \sum_{\nu=0}^n (A_{n-\nu}^{\beta-1})^{1/k} \sigma_\nu^\alpha \cdot A_{n-\nu}^{(\beta/k)+\varepsilon-1} A_\nu^\alpha (A_{n-\nu}^{\beta-1})^{-1/k} \right| \leq \left\{ \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{\beta-1} |\sigma_\nu^\alpha|^\beta \right\}^{1/k} \{S_n\}^{(k-1)/k}, \end{aligned}$$

mit

$$S_n := \sum_{\nu=0}^n \langle A_{n-\nu}^{(\beta/k)+\varepsilon-1} A_\nu^\alpha (A_{n-\nu}^{\beta-1})^{-1/k} \rangle^{k/(k-1)}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} S_n &= O(1) \left\{ \langle n^{-1+(1/k)+\varepsilon} \rangle^{k/(k-1)} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \langle (n-\nu)^{-1+(1/k)+\varepsilon} \nu^\alpha \rangle^{k/(k-1)} + \langle n^\alpha \rangle^{k/(k-1)} \right\} = \\ &= O(1) \left\{ n^{-1+\varepsilon(k/k-1)} + \sum_{\nu=1}^{n-1} (n-\nu)^{-1+\varepsilon(k/k-1)} \nu^\alpha \langle \nu^{k/k-1} \rangle + n^\alpha \langle k/k-1 \rangle \right\}. \end{aligned}$$

a) für $\alpha > -1 + \frac{1}{k}$, d. h. $\alpha \frac{k}{k-1} > -1$ und $\varepsilon > 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} S_n &= O(1) \left\{ n^{-1+\varepsilon(k/k-1)} + \sum_{\nu=1}^{n-1} A_{n-\nu}^{-1+\varepsilon(k/k-1)} A_\nu^\alpha \langle \nu^{k/k-1} \rangle + n^\alpha \langle k/k-1 \rangle \right\} = \\ &= O(1) \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{-1+\varepsilon(k/k-1)} A_\nu^\alpha \langle \nu^{k/k-1} \rangle = O(1) A_n^{\varepsilon(k/k-1)+\alpha(k/k-1)}. \end{aligned}$$

Es folgt $s_n^{(\beta/k)+\alpha+\varepsilon} = o(n^{\beta/k}) O(n^{\alpha+\varepsilon})$ oder $\sigma_n^{(\beta/k)+\alpha+\varepsilon} = o(1)$.

b) Für $\alpha > -1 + \frac{1}{k}$ und $\varepsilon = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} S_n &= O(1) \left\{ n^{-1} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{A_\nu^\alpha \langle \nu^{k/k-1} \rangle}{n-\nu} + n^\alpha \langle k/k-1 \rangle \right\} = \\ &= O(1) \{ n^{-1} + n^\alpha \langle k/k-1 \rangle \ln n + n^\alpha \langle k/k-1 \rangle \} = O(n^\alpha \langle k/k-1 \rangle \ln n). \end{aligned}$$

Es folgt $s_n^{(\beta/k)+\alpha} = o(n^{\beta/k}) \cdot O(n^\alpha (\ln n)^{(k-1)/k})$ oder $\sigma_n^{(\beta/k)+\alpha} = o((\ln n)^{(k-1)/k})$.

c) Für $\alpha = -1 + \frac{1}{k}$ und $\varepsilon > 0$ ergibt sich

$$S_n = O(1) \left\{ n^{-1+\varepsilon(k/k-1)} + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{A_{n-v}^{-1+\varepsilon(k/k-1)}}{v} + n^{-1} \right\} =$$

$$= O(1) \{ n^{-1+\varepsilon(k/k-1)} + n^{-1+\varepsilon(k/k-1)} \ln n + n^{-1} \} = O(n^{-1+\varepsilon(k/k-1)} \ln n).$$

Es folgt $s_n^{(\beta/k)+\alpha+\varepsilon} = o(n^{\beta/k}) \cdot O(n^{-(k-1/k)+\varepsilon} (\ln n)^{(k-1)/k})$ oder

$$s_n^{(\beta/k)+\alpha+\varepsilon} = o((\ln n)^{(k-1)/k}).$$

d) Für $\alpha = -1 + \frac{1}{k}$ und $\varepsilon = 0$ ergibt sich

$$S_n = O(1) \left\{ n^{-1} + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{(n-v)v} + n^{-1} \right\} =$$

$$= O(1) \left\{ 2n^{-1} + \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{n-v} \right) \right\} = O(1) \left\{ 2n^{-1} + \frac{2}{n} \ln n \right\} = O(n^{-1} \cdot \ln n).$$

Es folgt $s_n^{(\beta/k)+\alpha} = o(n^{\beta/k}) \cdot O(n^{-(k-1)/k} (\ln n)^{(k-1)/k})$ oder $s_n^{(\beta/k)+\alpha} = o((\ln n)^{(k-1)/k})$.

§ 3. Beweis von Satz 2

1) Es sei $\sum a_n = s$ ($[C_\beta, C_\alpha]^k$). Dann folgt zuerst $\sum a_n = s$ (C_β, C_α). Ferner mit der bekannten Beziehung

$$(3.1) \quad \tau_n^\alpha := \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=1}^n A_{n-v}^{\alpha-1} v a_v = -\alpha (\sigma_n^\alpha - \sigma_n^{\alpha-1});$$

$$\frac{1}{A_n^\beta} \sum_{v=1}^n A_{n-v}^{\beta-1} |\tau_v^{\alpha+1}|^k = O(1) \cdot \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{v=1}^n A_{n-v}^{\beta-1} |\sigma_v^{\alpha+1} - \sigma_v^\alpha|^k =$$

$$= O(1) \left\{ \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{v=0}^n A_{n-v}^{\beta-1} |\sigma_v^{\alpha+1} - s|^k + \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{v=0}^n A_{n-v}^{\beta-1} |\sigma_v^\alpha - s|^k \right\} = O(1) \{ (1) + (2) \}.$$

Da aus der $C_\beta C_\alpha$ -Summierbarkeit die $C_1 C_\alpha \sim C_{1+\varepsilon}$ -Summierbarkeit folgt, gilt $\sigma_n^{\alpha+1} \rightarrow s$ und wegen der Regularität von C_β folgt (1) = o(1). Die Voraussetzung besagt gerade (2) = o(1). Damit ist gezeigt, daß $na_n \rightarrow 0$ ($[C_\beta, C_{1+\alpha}]^k$) d. h. es gilt $T([C_\beta, C_{1+\alpha}]^k)$.

2) Es sei $\sum_{\alpha} a_n = s$ ($C_1 C_\alpha$) und es gelte $T([C_\beta, C_{1+\alpha}]^k)$. Mit $(\alpha+1)\sigma_v^\alpha = \tau_v^{\alpha+1} +$

$+(\alpha+1)\sigma_v^{\alpha+1}$ und $(\alpha+1)(\sigma_v^\alpha-s)=\tau_v^{\alpha+1}+(\alpha+1)(\sigma_v^{\alpha+1}-s)$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{v=0}^n A_{n-v}^{\beta-1} |\sigma_v^\alpha - s|^k &= O(1) \left\{ \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{v=0}^n A_{n-v}^{\beta-1} |\tau_v^{\alpha+1}|^k + \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{v=0}^n A_{n-v}^{\beta-1} |\sigma_v^{\alpha+1} - s|^k \right\} = \\ &= O(1) \{(3)+(4)\}. \end{aligned}$$

Die Voraussetzung $\sum_0^\infty a_n = s$ ($C_1 C_\alpha$) besagt $\sigma_v^{\alpha+1} \rightarrow s$. Hieraus folgt wegen der Regularität von C_β (4) = $o(1)$. Die Voraussetzung $T([C_\beta, C_{1+\alpha}]^k)$ bedeutet gerade (4) = $o(1)$. Damit ist die $[C_\beta, C_\alpha]^k$ -Summierbarkeit gezeigt.

§ 4. Beweis von Satz 3

Die zu beweisende Tauberbedingung $T([C_\beta, C_\alpha]^k)$ lautet

$$\frac{1}{A_n^\beta} \sum_{v=0}^n A_{n-v}^{\beta-1} |\tau_v^\alpha|^2 = o(1).$$

Wir setzen

$$\delta_n(\beta, \alpha; 2; x) := \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{v=0}^n A_{n-v}^{\beta-1} |\sigma_v^\alpha(x) - \sigma_v^{\alpha-1}(x)|^2$$

und haben also wegen (3.1) zu zeigen: $\delta_n(\beta, \alpha; 2; x) = o_x(1)$ f. ü.

1) Wir behandeln zuerst den Fall $\alpha > \frac{1}{2}$

a) Für $v \geq 1$ gilt (vgl. etwa ALEXITS [1] S. 67):

$$\int_a^b (\sigma_v^\alpha - \sigma_v^{\alpha-1})^2 dx = \frac{1}{\alpha^2 (A_v^\alpha)^2} \sum_{j=1}^v j^2 (A_{v-j}^{\alpha-1})^2 c_j^2.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b \delta_n(\beta, \alpha; 2; x) dx &= \frac{1}{\alpha^2 A_n^\beta} \sum_{v=1}^n A_{n-v}^{\beta-1} \frac{1}{(A_v^\alpha)^2} \sum_{j=1}^v j^2 (A_{v-j}^{\alpha-1})^2 c_j^2 = \\ &= \frac{1}{\alpha^2 A_n^\beta} \sum_{j=1}^n j^2 c_j^2 \sum_{v=j}^n \frac{A_{n-v}^{\beta-1} (A_{v-j}^{\alpha-1})^2}{(A_v^\alpha)^2}. \end{aligned}$$

Wegen $-1 < \beta - 1 < 0$ ist $A_k^{\beta-1}$ mit k monoton abnehmend, also $A_{n-v}^{\beta-1} \leq 1$. Wegen

$$R_j^\alpha = \sum_{v=j}^\infty \frac{(A_{v-j}^{\alpha-1})^2}{(A_v^\alpha)^2} = O\left(\frac{1}{j}\right)$$

(vgl. etwa ALEXITS [1], S. 102) ergibt sich

$$\int_a^b \delta_n(\beta, \alpha; 2; x) dx \cong \frac{1}{\alpha^2 A_n^\beta} \sum_{j=1}^n j^2 c_j^2 \sum_{v=j}^\infty \frac{(A_v^{\alpha-1})^2}{(A_v^\alpha)^2} = O(1) \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{j=1}^n j c_j^2.$$

Für eine beliebige Folge $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ natürlicher Zahlen mit $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$ folgt ($n_0=0$):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^\infty \int_a^b \delta_{n_i}(\beta, \alpha; 2; x) dx &\cong O(1) \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{A_{n_i}^\beta} \sum_{j=1}^{n_i} j c_j^2 = \\ &= O(1) \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{A_{n_i}^\beta} \left(\sum_{k=1}^i \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} j c_j^2 \right) = O(1) \sum_{k=1}^\infty \sum_{i=k}^\infty \frac{1}{A_{n_i}^\beta} \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} j c_j^2 = \\ &= O(1) \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} j c_j^2 \sum_{i=k}^\infty \frac{1}{A_{n_i}^\beta}. \end{aligned}$$

Wählen wir $n_i=2^i$ ($i=1, 2, \dots$), so gilt

$$\sum_{i=k}^\infty \frac{1}{A_{n_i}^\beta} = O(1) \sum_{i=k}^\infty \frac{1}{n_i^\beta} = O(1) \sum_{i=k}^\infty \frac{1}{2^{\beta i}} = \frac{O(1)}{2^{\beta k}} \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{2^{\beta i}} = O(1) \frac{1}{2^{\beta k}}.$$

Nun gilt für $2^{k-1}+1 \leq j \leq 2^k$: $j^\beta \leq 2^{\beta k}$. Es folgt

$$\sum_{i=1}^\infty \int_a^b \delta_{2^i}(\beta, \alpha; 2; x) dx \cong O(1) \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} j^{1-\beta} c_j^2 j^\beta \frac{1}{2^{\beta k}} \cong O(1) \sum_{j=0}^\infty j^{1-\beta} c_j^2 < \infty.$$

Hieraus folgt $\delta_{2^n}(\beta, \alpha; 2; x) \rightarrow 0$ f. ü.

b) Für $2^n < k < 2^{n+1}$ folgt mit $\sigma_v(x) := (\sigma_v^\alpha(x) - \sigma_v^{\alpha-1}(x))^2$ aus

$$\delta_k(\beta, \alpha; 2; x) - \delta_{2^n}(\beta, \alpha; 2; x) = \sum_{v=2^n+1}^k \{ \delta_v(\beta, \alpha; 2; x) - \delta_{v-1}(\beta, \alpha; 2; x) \};$$

$$\begin{aligned} (1) = |\delta_k(\beta, \alpha; 2; x) - \delta_{2^n}(\beta, \alpha; 2; x)| &\cong \sum_{v=2^n+1}^{2^{n+1}} |\delta_v(\beta, \alpha; 2; x) - \delta_{v-1}(\beta, \alpha; 2; x)| \cong \\ &\cong \sum_{v=2^n+1}^{2^{n+1}} \left| \sum_{k=0}^{v-1} \left(\frac{A_{v-k}^{\beta-1}}{A_v^\beta} - \frac{A_{v-1-k}^{\beta-1}}{A_{v-1}^\beta} \right) \sigma_k(x) + \frac{A_0^{\beta-1}}{A_v^\beta} \sigma_v(x) \right|. \end{aligned}$$

Aus $0 \leq k \leq v-1 < v$ folgt $k\beta < v$ und hieraus

$$\frac{A_{v-k}^{\beta-1}}{A_v^\beta} - \frac{A_{v-1-k}^{\beta-1}}{A_{v-1}^\beta} = \frac{A_{v-1-k}^{\beta-1}}{A_{v-1}^\beta} \left(\frac{v-k+\beta-1}{v-k} \cdot \frac{v}{v+\beta} - 1 \right) = \frac{A_{v-1-k}^{\beta-1}}{A_{v-1}^\beta} \cdot \frac{k\beta - v}{(v-k)(v+\beta)} < 0.$$

Hieraus ergibt sich unter Berücksichtigung von $A_0^{\beta-1}=1$:

$$\begin{aligned}
 (1) &\equiv \sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{\nu-1} \left(\frac{A_{\nu-1-k}^{\beta-1}}{A_{\nu-1}^{\beta-1}} - \frac{A_{\nu-k}^{\beta-1}}{A_{\nu}^{\beta-1}} \right) \sigma_k(x) + \sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{\sigma_{\nu}(x)}{A_{\nu}^{\beta}} = \\
 &= \sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{\nu-2} \frac{A_{\nu-1-k}^{\beta-1}}{A_{\nu-1}^{\beta-1}} \sigma_k(x) + \sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{\sigma_{\nu-1}(x)}{A_{\nu-1}^{\beta-1}} - \\
 &\quad - \sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{A_{\nu-k}^{\beta-1}}{A_{\nu}^{\beta-1}} \sigma_k(x) + \sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{\sigma_{\nu}(x)}{A_{\nu}^{\beta}} = \\
 &= \sum_{\mu=2^n}^{2^{n+1}-1} \sum_{k=0}^{\mu-1} \frac{A_{\mu-k}^{\beta-1}}{A_{\mu}^{\beta-1}} \sigma_k(x) + \sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{\sigma_{\nu-1}(x)}{A_{\nu-1}^{\beta-1}} - \\
 &\quad - \sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{A_{\nu-k}^{\beta-1}}{A_{\nu}^{\beta-1}} \sigma_k(x) + \sum_{\nu=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{\sigma_{\nu}(x)}{A_{\nu}^{\beta}} = \\
 &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{A_{2^n-k}^{\beta-1}}{A_{2^n}^{\beta-1}} \sigma_k(x) - \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} \frac{A_{2^{n+1}-k}^{\beta-1}}{A_{2^{n+1}}^{\beta-1}} \sigma_k(x) + 2 \sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}} \frac{\sigma_{\nu}(x)}{A_{\nu}^{\beta}} \equiv \\
 &\equiv \sum_{k=0}^{2^n} \frac{A_{2^n-k}^{\beta-1}}{A_{2^n}^{\beta-1}} \sigma_k(x) + \sum_{k=0}^{2^{n+1}} \frac{A_{2^{n+1}-k}^{\beta-1}}{A_{2^{n+1}}^{\beta-1}} \sigma_k(x) + 2 \sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}} \frac{\sigma_{\nu}(x)}{A_{\nu}^{\beta}} = \\
 &= \delta_{2^n}(\beta, \alpha; 2; x) + \delta_{2^{n+1}}(\beta, \alpha; 2; x) + 2 \sum_{\nu=2^n}^{2^{n+1}} \frac{\sigma_{\nu}(x)}{A_{\nu}^{\beta}}.
 \end{aligned}$$

Da die letzte Summe ein Cauchy-Abschnitt der Reihe $\sum_1^{\infty} \frac{\sigma_{\nu}(x)}{A_{\nu}^{\beta}}$ ist, folgt mit 1) die Aussage $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k(\beta, \alpha; 2; x) = 0$ f. ü. wenn wir noch die Konvergenz f. ü. dieser Reihe zeigen. Dies folgt aber aus

$$\begin{aligned}
 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{A_{\nu}^{\beta}} \int_0^1 \sigma_{\nu}(x) dx &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{A_{\nu}^{\beta}} \frac{1}{\alpha^2 (A_{\nu}^{\alpha})^2} \sum_{j=1}^{\nu} j^2 c_j^2 (A_{\nu-j}^{\alpha-1})^2 = \\
 &= \frac{1}{\alpha^2} \sum_{j=1}^{\infty} j^2 c_j^2 \sum_{\nu=j}^{\infty} \frac{(A_{\nu-j}^{\alpha-1})^2}{A_{\nu}^{\beta} (A_{\nu}^{\alpha})^2} \equiv \frac{1}{\alpha^2} \sum_{j=1}^{\infty} j^2 c_j^2 \frac{1}{A_j^{\beta}} \sum_{\nu=j}^{\infty} \frac{(A_{\nu-j}^{\alpha-1})^2}{(A_{\nu}^{\alpha})^2} = O(1) \sum_{j=1}^{\infty} j^{1-\beta} c_j^2.
 \end{aligned}$$

2) Wir betrachten nun den Fall $\alpha = \frac{1}{2}$.

a) Hier ergibt sich im Beweisschritt 1a) eine andere Abschätzung für $R_j^{1/2}$:

$$R_j^{1/2} = \sum_{\nu=j}^{\infty} \frac{(A_{\nu-1/2}^{\alpha})^2}{(A_{\nu}^{1/2})^2} = \sum_{\nu=j}^{2j} + \sum_{\nu=2j+1}^{\infty}.$$

Es ergibt sich

$$\sum_{\nu=j}^{2j} \cong \frac{1}{(A_j^{1/2})^2} \sum_{\nu=j}^{2j} (A_{\nu-j}^{-1/2})^2 = O(1) \frac{1}{j} \left(1 + \sum_{l=1}^j \frac{1}{l} \right) = O\left(\frac{\ln j}{j}\right),$$

$$\sum_{\nu=2j+1}^{\infty} = O(1) \sum_{\nu=2j+1}^{\infty} \frac{(\nu-j)^{-1}}{\nu} = O(1) \sum_{\nu=2j+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = O\left(\frac{1}{j}\right).$$

Es ergibt sich also $R_j^{1/2} = O\left(\frac{\ln j}{j}\right)$. Hieraus folgt schließlich $\delta_{2n}(\beta, \alpha; 2; x) = o_x(1)$

f. ü., wenn wir die Voraussetzung der Aussage (2) heranziehen.

b) Der zweite Teil des Beweises verläuft analog wie 1b) bis zum Schluß, wo wieder die obige Abschätzung für $R_j^{1/2}$ und dann die Voraussetzung der Aussage (2) herangezogen werden muß.

Literatur

- [1] G. ALEXITS, *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (Berlin, 1960).
- [2] D. BORWEIN, On strong and absolute summability, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 4 (1960), 122—139.
- [3] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 156 (1913), 1307—1309.
- [4] J. M. HYSLOP, Note on the strong summability of series, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 1 (1951—3), 16—20.
- [5] B. KUTTNER, Note on strong summability, *J. London Math. Soc.*, 21 (1946), 118—122.
- [6] L. LEINDLER, On the strong approximation of orthogonal series, *Acta Sci. Math.*, 32 (1971), 41—50.
- [7] G. I. SUNOUCHI, Strong approximation by Fourier series and orthogonal series, *Indian J. Math.*, 9 (1967), 237—246.
- [8] C. E. WINN, On strong summability for any positive order, *Math. Zeitschr.*, 37 (1933), 481—492.
- [9] A. ZYGMUND, Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries orthogonales, *Fund. Math.*, 10 (1927), 356—362.

MATH. INSTITUT
JUSTUS LIEBIG UNIVERSITÄT
HERING STRASSE 6
D—6300 GIESSEN, BRD