Acta Sci. Math., 43 (1981), 127—130

Beitrag zur Konvergenz der Orthogonalreihen

KÁROLY TANDORI

1. Es sei $r=\{r_k(t)\}_1^\infty$ $(r_k(t)=\text{sign}\sin 2^k\pi t)$ das Rademachersche Funktionensystem. Der folgende Satz ist bekannt (vgl. [4], S. 47).

Es sei $\varphi=\{\varphi_k(t)\}_1^\infty$ ein orthonormiertes System im Intervall (0, 1). Für $a=\{a_k\}_1^\infty\in l^2$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k(t)a_k\varphi_k(x)$$

bei fast jedem festen Punkt $x\in(0, 1)$ für fast jede $t\in(0, 1)$; m. a. W. bei fast jedem Punkt x konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \pm a_k\varphi_k(x)$$

mit der Wahrscheinlichkeit 1.

In dieser Note werden wir zeigen, daß unter einer stärkeren Voraussetzung über die Koeffizientenfolge a, ähnliche Behauptungen auch im Falle gelten, wenn die Vorzeichenverteilung durch ein beliebiges *vorzeichenartiges Funktionensystem* $\psi=\{\psi_k(t)\}_1^\infty$ gegeben ist, d. h. durch meßbare Funktionen $\psi_k(t)$, mit $|\psi_k(t)|=1$ f. ü. für $t\in(0, 1)$, $k=1, 2, \ldots$.

2. Es sei Ω die Klasse aller orthonormierten Systeme $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ im Intervall (0, 1). Weiterhin sei M die Klasse der Koeffizientenfolgen $a=\{a_k\}_1^\infty$, für die die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x) \tag{1}$$

bei jedem System $\varphi\in\Omega$ im Intervall (0, 1) fast überall konvergiert. Es ist bekannt (vgl. [2], [5]), daß

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k^2\log^2 k<\infty \Rightarrow a\in M.$$

Weitere hinreichende Bedingungen für $a\in M$ sind z. B. in der Arbeit [6] gegeben.

Received August 6, 1980.

Für eine Folge a setzen wir

$$\|a\| = \sup_{\varphi\in\Omega}\left\{\int_0^1 \sup_{1\leq i\leq j}\left(\sum_{k=i}^{j} a_k\varphi_k(x)\right)^2 dx\right\}^{1/2}.$$

In [7] haben wir gezeigt, daß $a\in M$ mit $\|a\|<\infty$ äquivalent ist.

Es seien $a\in M$, $\varphi\in\Omega$, und sei ψ ein System von vorzeichenartigen Funktionen in $(0, 1)$. Dann ist $\{\psi_k(t)\varphi_k\}_1^\infty\in\Omega$ für jedes $t\in(0, 1)$, und so folgt, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(t)\,a_k\varphi_k(x) \tag{2}$$

bei jedem $t\in(0, 1)$ in $(0, 1)$ fast überall konvergiert. Durch Anwendung des Fubinischen Satzes erhalten wir:

Satz I. *Es sei $a\in M$, $\varphi\in\Omega$ und ψ ein beliebiges vorzeichenartiges System. Dann konvergiert die Reihe* (2) *bei fast jedem* $x\in(0, 1)$ *für fast jedes* $t\in(0, 1)$.

3. Es sei $\lambda=\{\lambda_k\}_1^\infty$ eine nichtabnehmende Folge von positiven Zahlen. Mit $\Omega(\lambda)$ bezeichnen wir die Klasse der orthonormierten Systeme $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ im Intervall $(0, 1)$, für die die Lebesgueschen Funktionen

$$L_n(\varphi; x) = \int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\varphi_k(t)\right|dt$$

f. ü. mit λ_n beschränkt sind; d. h. für die

$$\sup_n\frac{L_n(\varphi; x)}{\lambda_n}<\infty \tag{3}$$

f. ü. in $(0, 1)$ besteht.

Mit $M(\lambda)$ bezeichnen wir die Klasse der Folgen a, für die die Reihe (1) bei jedem System $\varphi\in\Omega(\lambda)$ in $(0, 1)$ fast überall konvergiert. Es ist bekannt, daß die Folgen a mit

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\lambda_k<\infty$$

zu $M(\lambda)$ gehören [1]. Für jede Folge a setzen wir

$$\|a; \lambda\| = \sup_{\varphi}\int_0^1\sup_{1\leq i\leq j}\left|\sum_{k=i}^{j}a_k\varphi_k(x)\right|dx,$$

wobei das Supremum über alle in $(0, 1)$ orthonormierte Systeme φ mit

$$\int_0^1\sup_n\frac{L_n(\varphi; x)}{\lambda_n}\,dx\leq 1$$

gebildet wird. In [8] haben wir gezeigt, daß die Bedingungen $a \in M(\lambda)$ und $\|a; \lambda\| < \infty$ äquivalent sind.

Es sei $\varphi \in \Omega(\lambda)$ und ψ sei ein beliebiges vorzeichenartiges System. Dann gilt $\{\psi_k(t)\varphi_k\}_1^\infty \in \Omega(\lambda)$ für jedes $t \in (0, 1)$. Ist $a \in M(\lambda)$, dann folgt, daß die Reihe (2) bei jedem $t \in (0, 1)$ in $(0, 1)$ fast überall konvergiert. Durch Anwendung des Fubinischen Satzes ergibt sich:

Satz II. *Es sei $a \in M(\lambda)$, $\varphi \in \Omega(\lambda)$ und ψ ein beliebiges vorzeichenartiges System. Dann konvergiert die Reihe* (2) *bei fast jedem* $x \in (0, 1)$ *für fast alle* $t \in (0, 1)$.

Im Falle $\lambda_n = O(1)$ gilt also die folgende Behauptung.

Gilt $a \in l^2$, und für das orthonormierte System φ besteht $\sup L_n(\varphi; x) < \infty$ f. ü. in $(0, 1)$, dann konvergiert die Reihe (2) bei fast jedem $x \in (0, 1)$ fast überall in $(0, 1)$.

4. Bemerkungen. 1) Ohne die Bedingung $a \in M$, bzw. $a \in M(\lambda)$ gelten die Sätzen nicht. Ist nämlich $a \notin M$, bzw. $a \notin M(\lambda)$, dann gibt es ein System $\varphi \in \Omega$, bzw. $\varphi \in \Omega(\lambda)$, derart, daß die Reihe (1) in $(0, 1)$ fast überall divergiert, also für das System $\psi_k(t) \equiv 1$ $(t \in (0, 1); k = 1, 2, \ldots)$ divergiert die Reihe (2) bei fast jedem $x \in (0, 1)$ für jedes $t \in (0, 1)$.

2) In unseren Sätzen läßt sich Orthonormalität des Systems φ durch die schwächere Voraussetzung ersetzen, daß das System ein Konvergenzsystem für l^2 dem Maß nach ist. Nach einem Satz von NIKISCHIN [3] ist nämlich das System φ in diesem Falle fast orthonormiert, d. h. für jede positive Zahl ε gibt es eine meßbare Menge $F_\varepsilon (\subseteqq (0, 1))$, eine positive Zahl M_ε, und ein orthonormiertes System $\Phi(\varepsilon) = \{\Phi_k(\varepsilon; x)\}_1^\infty$ in $(0, 1)$ mit mes $F_\varepsilon \geqq 1 - \varepsilon$, $\varphi_k(x) = M_\varepsilon \Phi_k(\varepsilon; x)$ $(x \in F_\varepsilon; k = 1, 2, \ldots)$. So ist die folgende Behauptung klar:

Satz I. a. *Es seien $a \in M$, φ ein Konvergenzsystem für l^2 dem Maß nach in* $(0, 1)$, *und ψ ein beliebiges vorzeichenartiges System. Dann konvergiert die Reihe* (2) *bei fast jedem* $x \in (0, 1)$ *für fast alle* $t \in (0, 1)$.

Es gilt auch:

Satz II. a. *Es seien $a \in M(\lambda)$, φ ein Konvergenzsystem für l^2 dem Maß nach in* $(0, 1)$ *mit* (3), *und ψ ein beliebiges vorzeichenartiges System. Dann konvergiert die Reihe* (2) *bei fast jedem* $x \in (0, 1)$ *für fast alle* $t \in (0, 1)$.

Beweis des Satzes II. a. Mit $\Omega^*(\lambda)$ bezeichnen wir die Klasse der Konvergenzsysteme φ für l^2 dem Maß nach in $(0, 1)$, für die (3) f. ü. in $(0, 1)$ besteht. Weiterhin sei $M^*(\lambda)$ die Klasse der Koeffizientenfolgen a, für die Reihe (1) bei jedem $\varphi \in \Omega^*(\lambda)$ fast überall konvergiert. Nach einem Satz in [9] ist $M^*(\lambda) = M(\lambda)$, woher Behauptung folgt.

Schriftenverzeichnis

[1] S. KACZMARZ, Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux, *Studia Math.*, **1** (1929), 87—121.

[2] D. E. MENCHOFF, Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie), *Fundamenta Math.*, **4** (1923), 82—105.

[3] М. Е НИКИШИН, О системах сходимости по мере дця l_2, *Матем. заметки*, **13** (1973), 337—340.

[4] A. M. OLEVSKIĬ, *Fourier series with respect to general orthogonal systems*, Springer-Verlag (Berlin—Heidelberg—New York, 1975).

[5] H. RADEMACHER, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **87** (1922), 121—138.

[6] K. TANDORI, Abschätzungen vom Menchoff—Rademacherschen Typ für die Summen von orthogonalen Funktionen, *Studia Sci. Math. Hung.*, **3** (1968), 325—336.

[7] K. TANDORI, Über die Konvergenz der Orthogonalreihen. II, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 219—232.

[8] K. TANDORI, Über die Lebesgueschen Funktionen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **28** (1976), 103—118.

[9] K. TANDORI, Über die Lebesgueschen Funktionen. III, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **36** (1980), 183—187.

BOLYAI INSTITUT
UNIVERSITÄT SZEGED
ARADI VÉRTANÚK TERE 1
6720 SZEGED, UNGARN