Acta Sci. Math., 43 (1981), 263—266

Замечания о многообразиях алгебраических систем

С. Д. Бродский и С. Р. Когаловский

Хорошо известна принадлежащая Г. Биркгофу теорема: непустой класс алгебр в точности тогда есть многообразие, когда он 1) замкнут относительно декартовых произведений, 2) наследственен и 3) замкнут относительно гомоморфизмов. В этой теореме первые два условия можно заменить более слабым — замкнутостью относительно поддекартовых произведений. Иначе говоря, имеет место.

Теорема 1. (См. [1], [2].) *Непустой класс алгебр в точности тогда есть многообразие, когда он замкнут относительно поддекартовых произведений и гомоморфизмов.*

Следовательно, для того, чтобы непустой абстрактный класс алгебр K был многообразием, необходимо, чтобы для всякой алгебры $\mathfrak{A}$ множество K-конгруэнтностей на $\mathfrak{A}$ было полной подрешёткой решётки $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ всех конгруэнтностей на $\mathfrak{A}$. В 1978 г. первый из авторов, используя теоретико-групповые средства, установил, что это условие достаточно, если K—класс групп. Оказывается, оно достаточно и в общем случае. Более того, имеет место

Теорема 2. *Непустой абстрактный класс алгебр K в точности тогда есть многообразие, когда для всякой алгебры $\mathfrak{A}$ множество K-конгруэнтностей на $\mathfrak{A}$ есть полная нижняя подполурешётка и верхняя подполурешётка решётки $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$.*

Эта теорема является прямым следствием теоремы 1 и следующей почти очевидной теоремы.

Теорема 3. *Пусть абстрактный класс K таков, что для всякой алгебры $\mathfrak{A}$ множество K-конгруэнтностей на $\mathfrak{A}$ есть верхняя подполурешётка $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$. Тогда K гомоморфно замкнут.*

Поступило 9 /IV/ 1980.

Действительно, пусть $\mathfrak{A}=(X;R)$ — алгебра из K с множеством образующих X и множеством определяющих соотношений R, $\mathfrak{B}$ — её гомоморфный образ. Тогда $\mathfrak{B}$ представима как $(X; R\cup S$, где $S=\{s_i=t_i|i\in I\}$ — дополнительное множество определяющих соотношений. Пусть Y — не пересекающееся с X множество, равномощное I, f — взаимно однозначное отображение I на Y. Рассмотрим алгебры

$$\mathfrak{A}_1=(X\cup Y;\ R\cup\{s_i=f(i)|i\in I\},\quad \mathfrak{A}_2=(X\cup Y;\ R\cup\{t_i=f(i)|i\in I\}.$$

По теореме Тице они изоморфны $\mathfrak{A}$. (См., например, [3], стр. 282). Пусть $\mathfrak{U}$ — абсолютно свободная алгебра с базой $X\cup Y$, θ_1 — конгруэнтность на $\mathfrak{U}$, порождённая множеством $\{(s_i, f(i))|i\in I\}\cup R^*$, θ_2 — конгруэнтность, порождённая множеством $\{(s_i, f(i))|i\in I\}\cup R^*$, где $R^*=\{(u,v)|,,u=v\text{''}\in R\}$. Так как $\mathfrak{U}/\theta_1\cong\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{U}/\theta_2\cong\mathfrak{A}$, то θ_1 и θ_2 — K-конгруэнтности. Тогда, по условию теоремы, $\theta_1\vee\theta_2$ — K-конгруэнтность. Но $\mathfrak{U}/\theta_1\vee\theta_2\cong\mathfrak{B}$. Следовательно, $\mathfrak{B}\in K$.

Будем рассматривать алгебраические системы произвольной фиксированной сигнатуры, не обязательно нормальные в смысле А. Робинсона. (См. [4], стр. 47). Последнее означает, что для всякой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ равенство в $\mathfrak{A}$ будет пониматься как некоторое отношение эквивалентности, стабильное относительно всех основных операций и отношений, в число которых оно входит.

Пусть $\mathfrak{A}=\langle A; F_0,\dots,F_\alpha,\dots;R_0,\dots,R_\beta,\dots\rangle$, $\mathfrak{A}'=\langle A; F_0',\dots,F_\alpha',\dots,R_0',\dots,R_\beta',\dots\rangle$ $(\alpha<\gamma,\ \beta<\delta)$. Полагаем $\mathfrak{A}\leqq\mathfrak{A}'$, если тождественное преобразование A есть гомоморфное отображение $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}'$. Множество всех алгебраических систем $\mathfrak{A}'$, определённых на A и таких, что $\mathfrak{A}\leqq\mathfrak{A}'$, образует полную решётку. Будем обозначать её через $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$.

В связи с теоремой 2 естественен следующий вопрос. Пусть K — непустой абстрактный класс алгебраических систем. Эквивалентны ли условия:

I. Для всякой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ множество K-систем из $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ есть полная нижняя подполурешётка и верхняя подполурешётка решётки $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$;

II. Дла всякой алгебраической системы $\mathfrak{A}$ множество K-систем из $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ есть полная подрешётка $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$;

III. K—многообразие.

Рассмотрим язык, содержащий одноместные предикатные символы P_n $(n<\omega)$. Пусть $\mathfrak{M}_n$ $(n<\omega)$ — одноэлементная модель этого языка, удовлетворяющая системе формул

$$\{\forall x(P_i(x))|i\leqq n\}\cup\{\forall x(\neg P_i(x))|i>n\}.$$

Изоморфное замыкание класса $\{\mathfrak{M}_n|n<\omega\}$ удовлетворяет условию I, но не удовлетворяет условию II (и, следовательно, не является элементарно аксиоматизируемым классом). Класс, определяемый предложением $\forall xy$

$(x=y\wedge\neg P_0(x))$, удовлетворяет условию II, но не удовлетворяет условию III. Таким образом, условие I слабее условия II, а последнее слабее условия III. Однако, имеет место

Теорема 4. *Пусть K — непустой абстрактный класс алгебраических систем. Тогда условие* II *равносильно следующему:*

IV. *K определяется системой предложений, имеющих вид*

$$1.\ \ \forall x_1\dots x_n(Q), \qquad 2.\ \ \forall x_1\dots x_n(\neg P) \quad \text{или} \quad 3.\ \ \forall x_1\dots x_n(P\to Q),$$

где P и Q — атомарные формулы, причём P имеет предикатный вид, то есть вид $P(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$, где P — предикатный символ.

Условие II следует из IV очевидным образом. Во имя большей прозрачности и компактности доказательства обратное докажем для случая, когда K — класс моделей.

Пусть K удовлетворяет условию II. Тогда он $\underline{u}$-замкнут в смысле [1] (теорема 28) и, следовательно, определяется универсальными предложениями хорновского вида. Так как всякое предложение $\sigma=\forall x_1, x_n(\neg P\vee Q)$ такое, что P есть $x_i=x_j$, эквивалентно предложению, образованному из σ заменой вхождений x_j вхождениями x_i и отбрасыванием (указанного) вхождения $\neg P$, то K определим системой $\sum$ (несократимых в K) универсальных хорновских предложений вида $\forall x_1, \dots, x_n(\Phi_1\vee\dots\vee\Phi_p)$, где Φ_i — атомарная формула или отрицание атомарной формулы предикатного вида[1]).

Покажем, что каждое предложение из $\sum$ имеет вид 1, 2 или 3. Допустим противное, то есть что некоторое предложение σ из $\sum$ таково: $\forall x_1\dots x_m(\neg P_1\vee\dots\vee\neg P_n\vee Q)$, где P_i — атомарные формулы предикатного вида, а Q — атомарная формула или пустое слово. Несократимость σ (в K) означает, что в K существуют модель $\mathfrak{M}_1$, определённая на $\{a_1, \dots, a_m\}$, и модель $\mathfrak{M}_2$, определённая на $\{b_1, \dots, b_m\}$, такие, что

$$\mathfrak{M}_1 \models P_2(a_1, \dots, a_m)\wedge\dots\wedge P_n(a_1, \dots, a_m)\wedge\neg Q(a_1, \dots, a_m),$$

$$\mathfrak{M}_2 \models P_1(b_1, \dots, b_m)\wedge P_3(b_1, \dots, b_m)\wedge\dots\wedge P_n(b_1, \dots, b_m)\wedge\neg Q(b_1, \dots, b_m).$$

Пусть $C=\{c_1=\langle a_1, b_1\rangle, \dots, c_m=\langle a_m, b_m\rangle\}$. Обозначим через $\mathfrak{N}_1$ модель из $\mathscr{L}(C)$ такую, что $\mathfrak{N}_1\models c_i=c_j$ равносильно $\mathfrak{M}_1\models a_i=a_j$, а $\mathfrak{N}_1\models P_\alpha(c_{i_1}, \dots, c_{i_k})$ равносильно $\mathfrak{M}_1\models P_{\dot\alpha}(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$. Аналогично определяем $\mathfrak{N}_2$. Так как $\mathfrak{N}_1\cong\mathfrak{M}_1$ и

[1]) Для случая, K-класс алгебраических систем, не являющихся моделями, доказательство этого утверждения использует идею доказательства теоремы 3. Остальная часть доказательства теоремы 4 переносится на этот случай почти без изменений.

$\mathfrak{N}_2 \approx \mathfrak{M}_2$, то $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ принадлежат K. Тогда, по условию теоремы, $\mathfrak{N}_1 \vee \mathfrak{N}_2 \in K$. Но

$$\mathfrak{N}_1 \vee \mathfrak{N}_2 \models P_1(c_1, \ldots, c_m) \wedge \ldots \wedge P_n(c_1, \ldots, c_m) \wedge \neg Q(c_1, \ldots, c_m).$$

Следовательно, $\mathfrak{N}_1 \vee \mathfrak{N}_2 \models \neg\sigma$. Значит, $\mathfrak{N}_1 \vee \mathfrak{N}_2 \notin K$. Пришли к противоречию.

Заметим, что теорема 2 является непосредственнын следствием теоремы 4.

Заметим также, что если ограничиться рассмотрением лишь нормальных систем, то теорема 4 перестаёт быть верной. Более того, в этом случае через свойство решёток $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ не выразимы свойства класса быть универсально аксиоматизируемым, квазимногообразием, многообразием и т. д. Однако, если предположить, что класс K является универсальным хорновским классом, эквивалентность условий II и IV сохраняется. Доказательство этого утверждения можно получить путём незначительной модификации рассуждений, применённых в доказательстве теоремы 4.

Литература

[1] С. Р. Когаловский, Структурные характеристики универсальных классов, *Сибирский Мат. Журнал*, **4** (1963), 97—119.

[2] С. Р. Когаловский, К теореме Биркгофа, *Успехи Мат. Наук*, **20** (1965), 206—207.

[3] А. И. Мальцев, *Алгебраические системы*, Наука (Москва, 1970).

[4] A. Robinson, *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*, North-Holland (Amsterdam, 1963).

(С. Д. Б.)
пер. Кирякиных 26, кв. 43
153032 ИВАНОВО, СССР

(С. Р. К.)
ул. Кузнецова 42/32, кв. 20
153003 ИВАНОВО, СССР